奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 | 组编

奥林匹克数学中的代数问题

沈文选　张　垚　冷岗松 / 编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

专 题 研 究 系 列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的代数问题

沈文选 张 垚 冷岗松 / 编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学中的代数问题 / 沈文选，张垚，冷岗松编著. —修订本.
—长沙：湖南师范大学出版社，2014.12
ISBN 978-7-5648-1996-5

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①沈… ②张… ③冷… Ⅲ.①代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 288716 号

奥林匹克数学中的代数问题

沈文选　张　垚　冷岗松　编著

◇策　　划：廖小刚　颜李朝
◇责任编辑：颜李朝
◇责任校对：石　岘
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.88873071　88873070　传真/0731.88872636
网址/http：//press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙瑞和印务有限公司
◇开本：787mm×1092mm　1/16
◇印张：29
◇字数：772 千字
◇版次：2015 年 1 月第 3 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-1996-5
◇定价：46.00 元

沈文选

男，1948年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究会理事长，全国高等师范院校数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省高师教育研究会理事长，湖南省数学会初等数学委员会副主任，湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者，湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练。

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等30余部，发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等80余篇，发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章200余篇。多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛，2002年全国初中数学联赛，2003年第18届数学冬令营命题组成员。

◆张垚

男，1938年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，中国数学奥林匹克高级教练，湖南省数学奥林匹克主教练，美国《数学评论》评论员。1987～1999年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，负责全省数学竞赛的组织及培训工作，并主持了1989年全国初中数学联赛和1997年全国高中数学联赛的命题工作。

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等17部，发表学术论文80余篇。从1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。曾荣获湖南省优秀教师，全国优秀教师，曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖，湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励。所培训的学生有100余人进入全国中学生数学冬令营，其中有40余人进入国家集训队，14人进入国家队，在国际中学生数学竞赛(IMO)中，共夺得10枚金牌和3枚银牌。

冷岗松

男，1961年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院、上海大学数学系教授，博士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所所长，中国数学奥林匹克委员会委员，美国《数学评论》评论员。从2000年起参加中国数学奥林匹克国家集训队的教练工作和上海市数学奥林匹克选手的培训工作。2001～2004年，多次参加国家集训队，中国数学奥林匹克(CMO)，西部数学竞赛，女子数学竞赛的命题工作。1991～2004年担任湖南省数学奥林匹克培训主要教练，为湖南师大附中、长沙市一中前后10位同学在IMO中获取金牌做了大量培训工作。

已出版专著《高中数学竞赛解题方法研究》，在国内外重要数学学术期刊发表论文30余篇。先后承担国家自然科学基金项目，教育部博士点基金项目等多项。曾获湖南省教委科技进步奖二等奖。

奋发图强，力争上游，为提高我国数学水平而共同努力。

王梓坤敬书

▲王梓坤：中国科学院院士

湖南中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届 次	获奖情况
第28届（1987）	刘　雄（湖南湘阴一中）金牌
第32届（1991）	郭早阳（湖南师大附中）银牌
第34届（1993）	刘　炀（湖南师大附中）金牌
第35届（1994）	彭建波（湖南师大附中）金牌
第39届（1998）	艾颖华（湖南师大附中） 进国家队，该届国家队未参赛
第40届（1999）	孔文彬（湖南师大附中）银牌
第41届（2000）	刘志鹏（长沙市一中）金牌
第42届（2001）	张志强（长沙市一中）金牌 余　君（湖南师大附中）金牌
第43届（2002）	肖　维（湖南师大附中）金牌
第44届（2003）	王　伟（湖南师大附中）金牌 向　振（长沙市一中）金牌
第45届（2004）	李先颖（湖南师大附中）金牌
第48届（2007）	胡　涵（湖南师大附中）银牌
第52届（2011）	龙子超（湖南师大附中）金牌
第55届（2014）	谌澜天（湖南师大附中）金牌

前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动. 多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,去与其他"高手"互相琢磨,激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进. 这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自 1986 年参加国际数学奥林匹克以来,所取得成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先的水平. 其中,到 2014 年止,湖南的学生已取得 12 块金牌、3 块银牌的好成绩. 这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望. 为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系. 为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,2003 年,湖南师范大学成立了"数学奥林匹克研究所". 研究所组建以来,我们都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书,分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷. 这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感. 从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

由于这套丛书篇幅较大,本次修订不可能解决存在的所有问题,不足之处,敬请专家、同行和读者不吝指正.

编 者
2014 年 5 月

目 录

第一篇 集合问题

第一章 集合中的对应原理

【基础知识】

定义 1 设 A 和 B 是两个集合(二者可以相同),如果对于每个 $x \in A$,都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应,则称这个对应关系为 A 到 B 的映射,记为 $f: A \to B$,这时 $y = f(x) \in B$ 称为 $x \in A$ 的象,而 x 称为 y 的原象.

特别地,当 A 和 B 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义 2 设 f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$,都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为单射.

(2) 如果对于任何 $y \in B$,都有 $x \in A$,使得 $f(x) = y$,则称 f 为满射.

(3) 如果映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射,或一一映射.

(4) 如果 f 为满射,且对任何 $y \in B$,恰有 A 中的 m 个元素,它们的象都是 y,则称 f 为(倍数为 m 的)倍数映射.

我们用 $|A|$ 表示集 A 的元素个数(或基数),则有下面的对应原理:

对应原理 设 A 和 B 都是有限集,f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果 f 为单射,则 $|A| \leqslant |B|$;

(2) 如果 f 为满射,则 $|A| \geqslant |B|$;

(3) 如果 f 为双射,则 $|A| = |B|$;

(4) 如果 f 为倍数是 m 的倍数映射,则 $|A| = m|B|$.

【典型例题与基本方法】

例 1 如果从数 $1, 2, \cdots, 14$ 中,按由小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3,使同时满足 $a_2 - a_1 \geqslant$

3 与 $a_3-a_2\geqslant 3$，那么所有符合上述要求的不同取法有________种.

(1989 年全国高中联赛题)

解 令 $S=\{1,2,\cdots,14\}$，$S'=\{1,2,\cdots,10\}$.

$T=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3\in S,a_2-a_1\geqslant 3,a_3-a_2\geqslant 3\}$，

$T'=\{(a'_1,a'_2,a'_3)\mid a'_1,a'_2,a'_3\in S',a'_1<a'_2<a'_3\}$.

作对应 $(a_1,a_2,a_3)\rightarrow(a'_1,a'_2,a'_3)$，这里 $a'_1=a_1,a'_2=a_2-2,a'_3=a_3-4(a_1,a_2,a_3\in T)$.

容易验证，这个对应是一个一一对应或一一映射或双射，则 $|T|=|T'|$.

从而，问题转化为求 $|T'|$，即求在 S' 集中选取三个不同元素的组合数 $C_{10}^3=120$.

另解 赋值 $x_i=\begin{cases}1,若\ i\ 被选取,\\0,若\ i\ 没被选取,\end{cases}$ 其中 $i=1,2,\cdots,14$.

于是，从 14 个数的集合中任选三个数的子集表示一种取法，对应着一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$，反之，任一排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$ 必对应着一个取法. 故任取三个数的子集所表示的一种取法的取法集合到所有的排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$ 集之间的对应是一一映射.

根据题设的要求，取法总数等于排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$ 中有 3 个 1，11 个 0，而且每两个 1 中至少隔着两个 0 的排列数. 为了求出这样的排列数，我们选排好模式 1001001，然后将剩下的 7 个 0 插入 3 个 1 形成的 4 个空位中，故有 $C_{7+4-1}^7=C_{10}^3$ 种方法，此即为所有不同的取法总数

注 此问题可推广到一般情形：求从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中任取满足下列条件的 r 个 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的不同取法数. (1) $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_r\leqslant n$；(2) $a_{k+1}-a_k\geqslant m,k=1,2,\cdots,r-1$，其中 $m\in\mathbf{N}^+$.

事实上，可将所有满足(1)，(2) 的 r 数组的集合记为 A. 由(2) 有 $a_k\leqslant a_{k+1}-m(k=1,2,\cdots,r-1)$，即 $a_k<a_{k+1}-(m-1)$.

所以，
$$a_1<a_2-(m-1)<a_3-2(m-1)<a_4-3(m-1)$$
$$<\cdots<a_r-(r-1)(m-1).$$

令 $b_i=a_i-(i-1)(m-1),i=1,2,\cdots r$，则

$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant n-(r-1)(m-1)$.

记集合 $\{1,2,\cdots,n-(r-1)(m-1)\}$ 的(无重复) r 元数组的集合为 B，则 A 与 B 之间存在一一对应，即双射.

于是 $|A|=|B|=C_{n-(r-1)(m-1)}^r$.

例 2 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列).

(1991 年全国高中联赛题)

解 当 $n=2k$ 时，满足题目要求的每个数列 A 中有两连续项，使其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，而后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中；反之，从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中各取一数，并以两数之差作为公差，可作出一个满足要求的 A. 容易看出，这种对应是一一对应，即双射. 故 A 的个数为 $k\cdot k=\dfrac{1}{4}n^2$.

当 $n=2k+1$ 时，满足题目要求的每一个数列 A 中必有连续两项，其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k+1\}$ 中，讨论与前面类似. 故此时 A 的个数为 $k\cdot(k+1)=\frac{1}{4}(n^2-1)$ 个.

两种情况统一起来，共有 $[\frac{n^2}{4}]$ 个 A.

例 3 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 X 的容量为奇(偶) 数，则称 X 为 S_n 的奇(偶) 子集.

(1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2) 求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和. (1992 年全国高中联赛题)

解 (1)S_n 的子集有 2^n 个，可分为两类：(a) 不含元素 1 的子集(包括空集 $\varnothing$)；(b) 含有元素 1 的子集. 对(a) 中任一集合 X_1，对应着(b) 中的集合 $Y_1=X_1\cup\{1\}$；反之，(b) 中任一元素 Y_1 都是(a) 中元素 X_1 的象，并满足 $Y_1=X_1\cup\{1\}$，且(a) 中不同集合也对应着(b) 中不同的集合. 因此，(a)、(b) 的集合间可建立一一对应，即双射.

又若 X_1 是 S_n 的偶子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是奇子集；反之，若 X_1 是 S_n 的奇子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是偶子集. 因此，S_n 的奇子集与偶子集个数相等，都等于 2^{n-1} 个.

(2) 设 A_n 表示 S_n 中全体奇子集容量之和，B_n 表示 S_n 中全体偶子集容量之和. 又设 a_n、b_n 分别表示 S_n 中奇、偶子集的个数，由(1) 知 $a_n=b_n=2^{n-1}$.

(i) 若 n 为奇数($n\geqslant 3$) 时，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：①S_{n-1} 的奇子集；②S_{n-1} 的每个偶子集与集$\{n\}$ 的并. 于是 $A_n=A_{n-1}+(B_{n-1}+n\cdot b_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$. 类似可得 $B_n=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$，因此，$A_n=B_n$.

(ii) 若 n 为偶数($n\geqslant 4$) 时，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：①S_{n-1} 的所有奇子集；②S_{n-1} 的每个奇子集与集$\{n\}$ 的并. 于是，$A_n=A_{n-1}+(A_{n-1}+n\cdot a_{n-1})=2A_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$. 类似可得，$B_n=2B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$. 由(i) 知 $A_{n-1}=B_{n-1}$，所以 $A_n=B_n$.

综上，对任何 $n\geqslant 3$，$A_n=B_n$.

(3)X 对 S_n 的补集为 $\complement_{S_n}X$，则 X 与 $\complement_{S_n}X$ 的容量之和等于 S_n 的容量，即 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. 因此，$S_n$ 中所有子集的容量之和是 $2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n-2}\cdot n(n+1)$. 因为 $A_n=B_n$，当 $n\geqslant 3$ 时，故 $A_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot n(n+1)=2^{n-3}\cdot n(n+1)$.

例 4 设 n 是正整数，集合 $M=\{1,2,\cdots,2n\}$，求最小的正整数 k，使得对于 M 的任何一个 k 元子集，其中必有 4 个互不相同的元素之和等于 $4n+1$. (2005 年东南地区奥林匹克题)

解 考虑 M 的 $n+2$ 元子集 $P=\{n-1,n,n+1,\cdots,2n\}$. P 中任何 4 个不同元素之和不小于 $n-1+n+n+1+n+2=4n+1$，所以 $k\geqslant n+3$.

将 M 的元配为 n 对，$B_i=(i,2n+1-i)$，$1\leqslant i\leqslant n$.

对 M 的任一 $n+3$ 元子集 A，必有三对 B_{i1}，B_{i2}，B_{i3} 同属于 A(i_1，i_2，i_3 两两不同).

又将 M 的元配为 $n-1$ 对，$C_i=(i,2n-i)$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，对 M 的任一 $n+3$ 元子集 A，

必有一对 C_{i4}，同属于 A.

这一对 C_{i4} 必与刚才三对 B_{i1}，B_{i2}，B_{i3} 中至少一对无公共元，这 4 个元素互不相同，且和为 $2n+1+2n=4n+1$.

因此，所求的最小正整数 $k=n+3$.

【解题思维策略分析】

1. 注意单射方法的运用

例 5 设 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$. 若(i) S 中每 r 个元的集合的交集非空；(ii) 每 $r+1$ 个元的集合的交集为空集. 问：(1) $|A|$ 至少是多少？(2) 当 $|A|$ 最小时，集 $|A_i|$ 为多少？

解 (1) 考虑足标集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的任一 r 元子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，在 $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}$ 中任取一个元素 a，作映射 $f:\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\to a$.

于是，f 是足标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射. 事实上，若 $\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 也对应于 a，则会形成 $r+1$ 个子集的交集不空，矛盾.

因此，$|A|$ 不少于足标集的 r 元子集的个数，即 $|A|\geqslant C_k^r$.

(2) 考虑任一 A_i，在 S 中任取其余 r 个集，它们的交集至少有一个元(不空)，而此交集与 A_i 取交为空集. 由于有 C_{k-1}^r 种不同取法，因而 $|A_i|\leqslant|A|-C_{k-1}^r$. 当 $|A|=C_k^r$ 时，$|A_i|\leqslant C_{k-1}^{r-1}$.

另一方面，A_i 与 S' 中任选 $r-1$ 个其余的集取交，至少有一个，从而 $|A_i|\geqslant C_{k-1}^{r-1}$.

这说明，当 $|A|$ 取最小值 C_n^k 时，每个 A_i 的集都是 C_{k-1}^{r-1}.

注 此例的结论具有一般性，许多竞赛题都是它的特殊情形. 如第 13 届莫斯科竞赛题："某城市有公共汽车 10 条线路，现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站，但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站. 问至少有多少个不同的车站？" 按上述例题中结论(1) 知，至少有 45 个车站.

例 6 在一个车厢中，任何 $m(m\geqslant 3)$ 个旅客都有唯一的公共朋友(当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友. 任何人不作为他自己的朋友). 问在这个车厢中，朋友最多的人有多少个朋友？ (第 5 届中国国家集训队选拔试题)

解 设朋友最多的人有 k 个朋友，显然，$k\geqslant m$. 若 $k>m$，设 A 有 k 个朋友 B_1，B_2，$\cdots$，B_k，并记 $S=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$.

设 B_{i_1}，B_{i_2}，$\cdots$，$B_{i_{m-1}}$ 是从 S 中任取的 $m-1$ 个元素，则 A_1，B_{i_1}，B_{i_2}，$\cdots$，$B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有唯一的一个公共朋友，记为 C_i. 因 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i\in S$，这说明 S 中的每 $m-1$ 个元素对应着 S 中的唯一确定的一个元素.

又若 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\neq\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$，且 $\{A,B_{i_1},\cdots,B_{i_{m-1}}\}$ 与 $\{A,B_{j_1},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$ 对应的唯一的公共朋友分别为 $C_i,C_j\in S$，则必有 $C_i\neq C_j$，否则 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\cup\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$ 至少有 m 个元素，而他们至少有两个朋友 A 和 C_i，此与已知矛盾.

这样一来，上述的对应就是一个单射. 因此，S 中的 $m-1$ 元子集的个数 $C_k^{m-1}\leqslant k$.

但 $m\geqslant 3$ 时，$m-1\geqslant 2$，这时 $C_k^{m-1}>C_k^1=k$ 与上述结果矛盾，这说明 $k>m$ 不能成立.

故朋友最多的人的朋友个数的最大值为 m.

例 7 设 $n(n\geqslant 2)$ 是整数. S 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集, S 中没有一个数整除另一个数,也没有两个互质的数. 求 S 的元素个数的最大值. (2005 年巴尔干地区奥林匹克题)

解 构造映射 f:

$S\to\left\{\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,\left[\dfrac{n}{2}\right]+2,\cdots,n\right\}$,

f 把 $x\in S$ 变成 $2^kx\in(\dfrac{n}{2},n]$(其中, k 是非负整数), 集合 $\left\{\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,\left[\dfrac{n}{2}\right]+2,\cdots,n\right\}$ 中的元素满足"没有一个数整除另一个数"这一条件.

易知这是一个单射, 这是因为若存在非负整数 k_1、k_2, 使得 $2^{k_1}x=2^{k_2}y$, 不妨设 $k_1<k_2$, 则 $y\mid x$, 矛盾.

又对于 x、$y\in S$, 则 $(x,y)>1$.

而 $(x,y)\mid(f(x),f(y))$, 则 $(f(x),f(y))>1$.

从而, $f(S)$ 中不含有两个连续的整数.

因此, $|S|\leqslant\left[\dfrac{\frac{n}{2}+1}{2}\right]=\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$.

另外, 当 $S=\{k\mid k$ 是偶数, $k>\dfrac{n}{2}\}$ 时, S 满足题设要求.

故 $|S|$ 的最大值为 $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$.

例 8 考虑方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

其中系数 a_{ij} 为整数, 不全为 0. 试证: 在 $n\geqslant 2m$ 时, 有一组整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $0<\max|x_i|\leqslant n(\max|a_{ij}|)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$.

证明 先假定 $n=2m$. 设 $A=\max|a_{ij}|$, $B=mA$, 集合

$X=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid|x_j|\leqslant B,j=1,2,\cdots,n\}$,

$Y=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mid|y_i|\leqslant nAB,i=1,2,\cdots,m\}$.

作映射 $f:y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n(i=1,2,\cdots,m)$.

显然 f 是从集 X 到 Y 的映射(因为 $|y_i|\leqslant|a_{i1}|\cdot|x_1|+|a_{i2}|\cdot|x_2|+\cdots+|a_{in}|\cdot|x_n|\leqslant nAB$).

由于 $|x|=(2B+1)^n=(2mA+1)^{2m}=(4m^2A^2+4mA+1)^m$

$\qquad>(2nAB+1)^m=|Y|$.

所以 f 一定不是单射, 也就是说, X 中必有两个不同元素 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$, $(x''_1,x''_2,\cdots,x''_n)$ 具有相同的象.

令 $x_j=x'_j-x''_j(j=1,2,\cdots,n)$,

则 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是方程组的解, 并且

$0 < \max|x_j| < \max|x'_j| + \max|x''_j| \leqslant 2B = nA$.

如果 $n > 2m$，根据上面所证，方程组有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, \cdots, 0)$ 满足 $0 < \max|x_j| \leqslant 2mA < nA$.

注 此例是从反面运用单射的概念来解题的.

2. 构造适当的映射,利用对应原理实现问题的转化

通过构造适当的映射,进而利用对应原理实现问题的转化,可以达到另辟蹊径的效果.

例 9 在一个 6×6 的棋盘上放置了 11 块 1×2 的骨牌,每一个骨牌恰好覆盖两个方格. 证明:无论这 11 块骨牌怎么放置,总能再放入一块骨牌.

证明 若有某一行存在 4 个空格,由于每行仅有 6 格,必有两空格是相邻的,可放置一块骨牌,否则每行至多有 3 个空格.

如果这 11 块骨牌放置以后,不能再放入一块骨牌,考虑两个集合:

$X = \{$下面 5×6 的空格集合$\}$，$Y = \{$上面 5×6 的骨牌集合$\}$.

则必有:(i) 空格的上方必须对应骨牌(否则,若空格的上方还对应空格,则连续两个空格可以放置一块骨牌).

(ii) 不同的空格必定对应不同的骨牌(否则,若两个不同的空格对应同一骨牌,这个空格必相邻,因而这两个空格可以放置一块骨牌).

于是,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的映射:$f: x \to y$. 显然,这是一个单射.

由上述可见,$|x| \leqslant |y| \leqslant 11$.

又由于整个棋盘上有空格 $6\times6-11\times2=14$ 个,除最上面一行可能有的空格外,应有 $|X| \geqslant 11$.

故 $\quad |X| = |Y| = 11$.

这说明,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的一一映射. 于是,集合 Y 中有 11 块骨牌,即棋盘上面的 5×6 上有 11 块骨牌,从而棋盘的最后一行全是空格. 这又导致矛盾.

综上所述,命题获证.

例 10 用 n 个数(允许重复)组成一个长为 N 的数列,且 $N \geqslant 2^n$. 试证:可在这个数列中找出若干个连续的项,它们的乘积是一个完全平方数.

证明 设 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的长为 N 的数列为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，这里 $b_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}(i=1,2,\cdots,N)$

作映射 $f: B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \to \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，其中 $v_j = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 对于每个 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$，我们赋值

$$c_i = \begin{cases} 0, \text{若 } a_i \text{ 在 } b_1, b_2, \cdots, b_j \text{ 中出现偶数次}, \\ 1, \text{若 } a_i \text{ 在 } b_1, b_2, \cdots, b_j \text{ 中出现奇数次}. \end{cases}$$

如果有某个 $v_j = \{0, 0, \cdots, 0\}$，那么,在乘积 $b_1 b_2 \cdots b_j$ 中,每个 a_i 都出现偶数次,所以积为完全平方数.

如果每个 $v_i \neq (0,0,\cdots,0)$，那么,由于集合 $\{(c_1, c_2, \cdots, c_n) \mid c_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,\cdots,n\}$ 恰有 $2^n - 1$ 个元素,由题设 $N \geqslant 2^n > 2^n - 1$，所以必有 h 和 $k(1 \leqslant k < h \leqslant N)$ 满足 $v_k = v_h$. 这时,在乘积 $b_1 b_2 \cdots b_k$ 和 $b_1 b_2 \cdots b_h$ 中每个 a_i 出现的次数具有相同的奇偶性,从而它们的

商，即乘积 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 中每个 a_i 出现偶数次，亦即 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 为完全平方数.

3. 综合运用各种方法

例 11 S 是至少含有两个元素的集合，在 S 上定义了一个二元运算"$*$"[即对任意的 $a,b\in S$，对于有序元素对 (a,b)，在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应]. 若对任意的 $a,b\in S$，有 $a*(b*a)=b$，则对任意的 $a,b\in S$，下列等式中不恒成立的是 ( )

A. $(a*b)*a=a$　　B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$　　D. $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

(2007 年高考广东卷题)

解 对任意的 $a,b\in S$，有 $a*(b*a)=b$，所以 $[a*(b*a)]*(a*b)=b*(a*b)=a$，可见 B 成立；在 C 选项中，将 $a*(b*a)=b$ 中的 a 换成 b，即得 $b*(b*b)=b$ 成立，故 C 正确；在 D 选项中，令 $a*b=c$，则 $c*(b*c)=b$ 成立，故 D 正确；只有 A 选项不能恒成立.

例 12 对于 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ 的子集 $X=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}$，定义 X 的"特征数列"$x_1,x_2,\cdots,x_{100}$，其中 $x_{i_1}=x_{i_2}=\cdots=x_{i_k}=1$，其余项均为 0. 例如，子集 $\{a_2,a_3\}$ 的"特征数列"为 $0,1,1,0,0,\cdots,0$.

(1) 子集 $\{a_1,a_3,a_5\}$ 的"特征数列"的前 3 项和等于________.

(2) 若 E 的子集 P 的"特征数列"$p_1,p_2,\cdots,p_{100}$ 满足 $p_1=1,p_i+p_{i+1}=1(1\leqslant i\leqslant 99)$；$E$ 的子集 Q 的"特征数列"$q_1,q_2,\cdots,q_{100}$ 满足 $q_1=1,q_j+q_{j+1}+q_{j+2}=1(1\leqslant j\leqslant 98)$，则 $P\cap Q$ 的元素个数为________.

(2013 年高考湖南卷题)

解 根据定义，明确"特征数列"的性质，即子集中元素的个数为"特征数列"中项 1 的个数，并且 1 所在项即为"特征数列"中的第 i 项.

(1) 子集的"特征数列"中共有 3 个 1，其余均为 0，即数列为 $1,0,1,0,1,0,0,\cdots,0$. 故该数列前 3 项的和为 2.

(2) 依题意，E 的子集 P 的"特征数列"为 $1,0,1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0$，即 $P=\{a_1,a_3,a_5,a_7,\cdots a_{99}\}$；$E$ 的子集 Q 的"特征数列"为 $1,0,0,1,0,0,1,0,0,\cdots,0,1$，即 $Q=\{a_1,a_4,a_7,a_{10},\cdots,a_{100}\}$，集合 Q 中有 34 个元素，其下标为奇数的有 17 个. 因此，$P\cap Q=\{a_1,a_7,a_{13},a_{19},\cdots,a_{97}\}$，共有 17 个元素.

例 13 书架上有 21 本书，编号从 1 到 21，从其中选 4 本，其中每两本的编号都不相邻的选法一共有________种.

(第 14 届全国青少年信息学奥赛初赛试题(高中组)第三大题第 2 小题)

解 我们不妨将选出的四个编号从小到大排列成四元数组 (a,b,c,d)，为使"编号都不相邻"，只须满足从第二个编号开始的每个编号都比其左边编号至少大 2，即满足 $1\leqslant a<b-1<c-2<d-3\leqslant 18$. 不妨将这种数组的集合记为 A，显然，题目所要求的选法数 $=$ 集合 A 元素个数(即 $\mathrm{card}(A)$).

另一方面，我们考虑从 $1\sim 18$ 的自然数中任意选出四个不同数，然后从小到大排列组成一组，这种数组的集合记为 B，易知 B 的元素个数 $\mathrm{card}(B)=C_{18}^4$.

对于任意一个 $(a,b,c,d)\in A$，作变换 Φ：$a'=a,b'=b-1,c'=c-2,d'=d-3$. 于

是有 $1 \leqslant a' < b' < c' < d' \leqslant 18$,知数组 $(a',b',c',d') \in B$.

换言之,对于任意一个 $(a,b,c,d) \in A$,对应唯一一个 $(a',b',c',d') \in B$,且 A 中不同的元素对应 B 中的元素也不同,由定理得 $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$.

反过来,对于任意一个 $(a',b',c',d') \in B$,作对应 Ψ:$a = a'$,$b = b'+1$,$c = c'+2$,$d = d'+3$,得数组 (a,b,c,d) 满足 $1 \leqslant a,b,c,d \leqslant 21$ 且编号 a,b,c,d 任意两个都不相邻,所以 $(a,b,c,d) \in A$.

换言之,对于任意一个 $(a',b',c',d') \in B$,对应唯一一个 $(a,b,c,d) \in A$. 且易知 B 中不同的元素对应 A 中的元素也不同,由定理得 $\text{card}(B) \leqslant \text{card}(A)$.

因此得 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$. 因为 $\text{card}(B) = C_{18}^4$,所以 $\text{card}(A) = C_{18}^4$.

要求的选法数 = 集合 A 元素个数 $= C_{18}^4 = 3060$.

例 14 给定整数 $n \geqslant 2$.

(1) 求证:可以将集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集适当地排列为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$,使得 A_i 与 A_{i+1} 的元素个数恰相差 1,其中 $i = 1,2,\cdots,2^n$ 且 $A_{2^n+1} = A_1$;

(2) 对于满足(1)中条件的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$,求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i)$ 的所有可能值,其中 $S(A_i) = \sum\limits_{x \in A_i} x$,$S(\varnothing) = 0$. (2011 年中国西部奥林匹克题)

证明 (1) 下面用数学归纳法证明,存在满足要求的子集序列 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$,且 $A_1 = \{1\}$,$A_{2^n} = \varnothing$.

当 $n = 2$ 时,序列 $\{1\},\{1,2\},\{2\},\varnothing$ 满足要求;

假设 $n = k$ 时,存在满足要求的子集序列 $B_1,B_2,\cdots,B_{2^k}$. 对于 $n = k+1$,构造序列如下:

$A_1 = B_1 = \{1\}$,

$A_i = B_{i-1} \cup \{k+1\}$,$i = 2,3,\cdots,2^k+1$,

$A_j = B_{j-2^k}$,$j = 2^k+2,2^k+3,\cdots,2^{k+1}$.

易验证序列 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^{k+1}}$ 满足要求.

综上所述,对任意正整数 $n \geqslant 2$,存在满足要求的子集序列.

(2) 不妨设 $A_1 = \{1\}$,由于相邻两个子集的元素个数相差 1,所以必然是一个奇数和一个偶数,因此子集的元素个数与该子集的脚标的奇偶性相同.

于是 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i) = \sum\limits_{A \in P} S(A) - \sum\limits_{A \in Q} S(A)$,其中 P 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有偶数元子集构成的集合,Q 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有奇数元子集构成的集合.

对于任意 $x \in \{1,2,\cdots,n\}$,它在所有的 k 元子集中出现了 C_{n-1}^{k-1} 次,因此它在 $\sum\limits_{A \in P} S(A) - \sum\limits_{A \in Q} S(A)$ 中的贡献为

$$-C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 - C_{n-1}^2 + \cdots + (-1)^n C_{n-1}^{n-1} = -(1-1)^{n-1} = 0.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i) = 0$.