# 线性代数与空间解析几何（第四版）学习指导教程

电子科技大学数学科学学院
黄廷祝　蒲和平　主编

高等教育出版社

# 线性代数与空间解析几何（第四版）学习指导教程

Xianxing Daishu yu Kongjian Jiexi Jihe
(di-si ban) Xuexi Zhidao Jiaocheng

电子科技大学数学科学学院
黄廷祝　蒲和平　主编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数与空间解析几何》(第四版)(黄廷祝、成孝予主编)的配套教学用书。全书共分七章，每章内容包括三部分：内容提要，典型例题，单元检测。

本书内容全面，题型丰富，融入了编者多年的教学实践经验，对问题分析透彻、叙述深入浅出，便于自学，可作为高等学校理、工、医、农、经、管等专业数学基础课程“线性代数”或“线性代数与空间解析几何”的学习参考书，对参加全国硕士研究生入学统一考试的学生具有很好的帮助与指导作用。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与空间解析几何(第四版)学习指导教程/黄廷祝,蒲和平主编.--北京:高等教育出版社,2015.9

ISBN 978-7-04-043897-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①黄… ②蒲… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②空间几何-解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第217441号

策划编辑 兰莹莹　　责任编辑 兰莹莹　　封面设计 赵 阳　　版式设计 马敬茹
插图绘制 郝 林　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 保定市中画美凯印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 19.75
字 数 380千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2015年9月第1版
印 次 2015年9月第1次印刷
定 价 31.00元


物 料 号 43897-00

preface

# 前　　言

本书是"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数与空间解析几何》(第四版)(黄廷祝、成孝予主编)的配套教学用书,也是电子科技大学国家工科数学课程教学基地系列教材之一。第一版自2005年出版以来深受读者的喜爱,也得到了同行专家的普遍赞誉。在多年教学实践并广泛征集意见的基础上,本版我们做了较大的修改和完善,主要体现在以下几个方面:

1. 在内容结构上做了适当的优化与调整。将原来每章五个部分的内容精简为每章三个部分的内容,即内容提要、典型例题、单元检测。其中"典型例题"又细分为选择题、解答题、证明题,"单元检测"细分为检测题、检测题答案与提示。这样使各章的内容更加清晰、简明。最后增加了电子科技大学近几年本课程的期末试题与参考答案,为读者进行课程复习提供参考。

2. 对例题、检测题进行了重新精选与补充。增加了一些具有典型性、综合性的例题;主教材中涉及但未深入展开的部分内容,本书中设置了相关例题,以帮助读者学习理解;增选了近几年全国硕士研究生入学统一考试中的部分题目。

3. 对所选例题给出解答前的"分析",对某些具有代表性与普适性的方法以"评注"的形式给出点评,意在帮助读者提高分析问题、解决问题的能力,掌握解决问题的一般性方法。

4. "典型例题"中三个子块(选择题、解答题、证明题)所涉及的知识逻辑关系完全与主教材同步,以利于读者进行同步学习或参考。

本书由黄廷祝、蒲和平担任主编。各章编者分别是:王转德(第一章、第二章),王博(第三章),蒲和平(第四章、第五章、附录),王也洲(第六章、第七章)。

借此机会,向一贯支持我们工作的高等教育出版社、电子

科技大学教务处以及校内外关心、使用本书的同行们致以诚挚的谢意！

由于编者水平所限，不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 6 月于成都

contents

# 目　　录

第一章　矩阵及其初等变换 …… 001

一、内容提要 …… 001
（一）矩阵及其运算 …… 001
（二）高斯消元法与矩阵的初等变换 …… 003
（三）逆矩阵 …… 005
（四）分块矩阵 …… 006
二、典型例题 …… 006
（一）选择题 …… 006
（二）解答题 …… 009
（三）证明题 …… 023
三、单元检测 …… 030
（一）检测题 …… 030
（二）检测题答案与提示 …… 031

第二章　行列式 …… 035

一、内容提要 …… 035
（一）行列式的概念 …… 035
（二）行列式的性质与计算 …… 035
（三）拉普拉斯展开定理 …… 037
（四）克拉默法则 …… 038
（五）矩阵的秩 …… 039
二、典型例题 …… 039
（一）选择题 …… 039
（二）解答题 …… 044
（三）证明题 …… 066

三、单元检测 …… 079
（一）检测题 …… 079
（二）检测题答案与提示 …… 082

第三章　几何空间 …… 085

一、内容提要 …… 085
（一）向量的概念与运算 …… 085
（二）平面与空间直线 …… 087
二、典型例题 …… 089
（一）选择题 …… 089
（二）解答题 …… 092
（三）证明题 …… 108
三、单元检测 …… 110
（一）检测题 …… 110
（二）检测题答案与提示 …… 111

第四章　$n$ 维向量空间 …… 113

一、内容提要 …… 113
（一）$n$ 维向量空间的概念 …… 113
（二）向量组的线性相关性 …… 114
（三）向量组的秩与最大无关组 …… 115
（四）线性方程组解的结构 …… 116
二、典型例题 …… 116
（一）选择题 …… 116
（二）解答题 …… 122
（三）证明题 …… 142
三、单元检测 …… 156
（一）检测题 …… 156
（二）检测题答案与提示 …… 158

第五章　特征值与特征向量 …… 161

一、内容提要 …… 161
（一）特征值与特征向量的概念与计算 …… 161

（二）相似矩阵 …… 162
（三）$\mathbf{R}^n$空间中的正交性 …… 163
（四）实对称矩阵的相似对角化 …… 164
二、典型例题 …… 165
（一）选择题 …… 165
（二）解答题 …… 168
（三）证明题 …… 194
三、单元检测 …… 206
（一）检测题 …… 206
（二）检测题答案与提示 …… 208

第六章　二次型与二次曲面 …… 213

一、内容提要 …… 213
（一）实二次型及其标准形 …… 213
（二）正定二次型与正定矩阵 …… 214
（三）曲面与空间曲线 …… 215
（四）二次曲面 …… 216
二、典型例题 …… 217
（一）选择题 …… 217
（二）解答题 …… 219
（三）证明题 …… 233
三、单元检测 …… 239
（一）检测题 …… 239
（二）检测题答案与提示 …… 241

第七章　线性空间与线性变换 …… 244

一、内容提要 …… 244
（一）线性空间的概念 …… 244
（二）线性空间的基、维数与坐标 …… 244
（三）欧氏空间 …… 246
（四）线性变换 …… 246
二、典型例题 …… 247
（一）选择题 …… 247

（二）解答题 …………………………………………… 252
（三）证明题 …………………………………………… 262
**三、单元检测** …………………………………………… 268
（一）检测题 …………………………………………… 268
（二）检测题答案与提示 ……………………………… 270

附录一　期末检测题与参考答案 ……………………… 273

附录二　期末试题与参考答案 ………………………… 287

Chapter 01

# 第一章 矩阵及其初等变换

## 一、内容提要

### （一）矩阵及其运算

**1. 矩阵的概念**

（1）**定义** 由 $m\times n$ 个数排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m$ 行 $n$ 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列的元，$i$ 称为 $a_{ij}$ 的行指标，$j$ 称为 $a_{ij}$ 的列指标.

（2）几类特殊矩阵

$n$ 阶方阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$.

零矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

对角矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=0(j\neq i)$，记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

数量矩阵：$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 且 $a_{ii}=k$（$k$ 为非零常数）$(i=1,2,\cdots,n)$.

单位矩阵：$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 且 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

上三角形矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij}=0(j<i)$.

下三角形矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij}=0(j>i)$.

**2. 矩阵的线性运算**

（1）同型矩阵

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times q}$，若 $m=p,n=q$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

（2）矩阵相等

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

（3）矩阵的线性运算

矩阵的加法：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，定义 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为常数，定义 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算.

矩阵的线性运算满足下列八条性质：

1° $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$； 2° $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

3° $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$； 4° $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

5° $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$； 6° $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

7° $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$； 8° $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$，

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，$k,l$ 为常数.

**3. 矩阵的乘法**

（1）**定义** 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

则由元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$$

组成的 $m\times s$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$.

矩阵乘法具有以下特点：

1° 当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 才有意义；

2° $\boldsymbol{C}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

3° $\boldsymbol{C}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元 $c_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列元对应乘积之和.

（2）矩阵乘法的运算规律

结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$ （$k$ 为常数）；

分配律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

矩阵乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

**4. 方阵的幂与矩阵多项式**

（1）方阵的幂 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，定义 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个\boldsymbol{A}相乘}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 次幂.

（2）矩阵多项式

设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 $x$ 的 $k$ 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，则称

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 次多项式.

(3) 运算规律

1° $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{k+m}$,$(\boldsymbol{A}^k)^m=\boldsymbol{A}^{km}$($k,m$ 为正整数);

2° 设 $f(\boldsymbol{A})$,$g(\boldsymbol{A})$都是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,有

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

一般说来,$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})\neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$;若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})=g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$.

特别地,当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时,有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i\boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}^i.$$

**5. 矩阵的转置运算**

(1) **定义** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,将 $\boldsymbol{A}$ 的行、列互换后,所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) 转置的运算规律

1° $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

2° $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

3° $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

4° $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

其中 $k$ 为常数.

(3) 基于转置运算的两类矩阵

1° 对称矩阵:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

2° 反对称矩阵:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

## (二) 高斯消元法与矩阵的初等变换

**1. 矩阵的初等变换**

对矩阵施行以下 3 种变换称为矩阵的初等变换:

(1) 交换矩阵的两行(列);

（2）用某一非零数 $k$ 乘矩阵的某一行（列）；

（3）把矩阵某一行（列）的 $k$ 倍加到另一行（列）.

**2. 矩阵的等价**

（1）**定义** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行（列）初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行（列）等价.

（2）矩阵的等价性质

1° 反身性：$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$；

2° 对称性：$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$；

3° 传递性：$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

**3. 初等矩阵**

（1）**定义** 对单位矩阵施行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \\ \end{array},$$

$$\boldsymbol{E}_i(c) = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}), \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & c & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

(2) 性质

1° 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次行(列)初等变换相当于左(右)乘上对应的初等矩阵;

2° $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价⇔存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_s$,使得 $\boldsymbol{E}_s\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

3° $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价⇔存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_t$,使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\cdots\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{B}$;

4° $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价⇔存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_t$,使得

$$\boldsymbol{E}_s\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\cdots\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{B}.$$

**4. 方程组求解的高斯消元法**

**定理** 设有线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

对增广矩阵作行初等变换化为阶梯形

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $d_{r+1}=0$.

在 $d_{r+1}=0$ 时,若 $r=n$,方程组有唯一解;若 $r<n$,方程组有无穷多组解.

**推论 1** 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $r<n$.

**推论 2** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,若 $m<n$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

## (三) 逆矩阵

**1. 定义** 对于 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若存在 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

**2. 性质**

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆,且有 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆,且有 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

推广:若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,s)$ 可逆,则 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

(4) 若 $A$ 可逆,且 $k\neq0$,则 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

**3. 矩阵可逆的充要条件**

$n$ 阶矩阵 $A$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 $n$ 阶矩阵 $B$,使得 $AB=BA=I$

$\Leftrightarrow A$ 可表示成有限个初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow A$ 与单位矩阵 $I$ 等价

$\Leftrightarrow AX=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow AX=b$ 有唯一解.

**4. 用初等变换求逆矩阵**

$$(A,I)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I,A^{-1})$$

### (四) 分块矩阵

以子矩阵为元的矩阵称为分块矩阵.对分块矩阵做加法、数乘、乘法运算时,与矩阵的加法、数乘、乘法运算对应一致,特别是求分块对角矩阵的逆矩阵时,可把它化为求对角线上的子矩阵的逆.

## 二、典型例题

### (一) 选择题

**例 1** 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶矩阵,则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 的充分必要条件是(　　).

(A) $A=I$　　(B) $B=O$　　(C) $AB=BA$　　(D) $A=B$

**分析** 矩阵运算与代数运算的差异主要有两点:不满足交换律与消去律,即一般地 $AB\neq BA$;$AB=O$ 未必有 $A=O$ 或 $B=O$.(A)、(B)、(D) 均为等式 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立的充分条件,但非必要条件,故(C)是正确答案.

**答案** (C).

**例 2** 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶对称矩阵,则下列结论不正确的是(　　).

(A) $A+B$ 也是对称矩阵

(B) $AB$ 也是对称矩阵

(C) $A^m+B^m$($m$ 为正整数)也是对称矩阵

(D) $BA^{T}+AB^{T}$ 也是对称矩阵

**分析** 逐项计算转置矩阵看是否为对称矩阵即可.因 $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}=BA$,但一

般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故(B)是正确答案.

**答案** (B).

**例 3** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶方阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,则 $\boldsymbol{ABC}$ 等于(　　).

(A) $\boldsymbol{ACB}$　　(B) $\boldsymbol{CBA}$　　(C) $\boldsymbol{BCA}$　　(D) $\boldsymbol{CAB}$

**分析** $\boldsymbol{ABC}=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=\boldsymbol{BCA}$,故(C)是正确答案.

**答案** (C).

**例 4** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶方阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2$ 等于(　　).

(A) $3\boldsymbol{I}$　　(B) $2\boldsymbol{I}$　　(C) $\boldsymbol{I}$　　(D) $\boldsymbol{O}$

**分析** $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CA})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{BC})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{CA})(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^2$,所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=3\boldsymbol{I}$,故(A)是正确答案.

**答案** (A).

**例 5** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵,则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆,必有 $\boldsymbol{AB}$ 可逆　　(B) $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,必有 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆

**分析** 若 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,不妨设 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,则存在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,使得 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$.因此 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,必有 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆.故(B)是正确答案.

**答案** (B).

**例 6** 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 为同阶方阵,则(　　).

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　(B) $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为可交换矩阵　　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为可逆矩阵

**分析** $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,故(D)是正确答案.

**答案** (D).

**例 7** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶方阵,且 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$,则必有(　　).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{I}$　　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{I}$　　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{I}$　　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{I}$

**分析** 由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$,说明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{BC}$,或 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 互为逆矩阵,即 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BC}$,故有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{I}$,对比选项可知(D)为正确答案.其余选项因矩阵乘法不满足交换律而不成立.

**答案** (D).

**例 8** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 $n$ 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

**分析** (A)可立即排除,因为 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 的逆矩阵一般不等于自身;另外矩阵和的逆并不等于矩阵逆的和,故(B)错误.剩下(C),(D)直接验证有一定的难度,不妨反求答案(C),(D)的逆矩阵,看是否等于 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$,因 $[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$,$[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}]^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,故可知(C)为正确答案.

**答案** (C).

**例 9** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,则(  ).

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$

(B) $\boldsymbol{A}$ 总可以经过行初等变换化为 $\boldsymbol{I}$

(C) 对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$施行若干次初等变换,当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{I}$ 时,相应地 $\boldsymbol{I}$ 变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

(D) 以上都不对

**分析** 由于矩阵乘法不满足消去律,当 $\boldsymbol{B}$ 不可逆时,一般 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{C}$,即(A)错误;(C)必须限于行初等变换,在 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件下,$\boldsymbol{A}$ 总可以经过行初等变换化为单位矩阵,故(B)为正确答案.

**答案** (B).

**例 10** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则必有(  ).

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$  (B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$  (C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$  (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

**分析** $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经过把第一行加到第三行,然后交换第一行与第二行的行初等变换得到的,因此(C)为正确答案.本题应注意左乘与右乘初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 分别对应行、列初等变换,同时还应注意所作初等变换的前后顺序.

**答案** (C).

**例 11** 设分块矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 & \alpha \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $n\times 1$ 矩阵,$\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $1\times n$ 矩阵,$i=1,2$,$\alpha$ 为实数,则 $\alpha$ 等于(  ).

(A) 1  (B) $\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1$  (C) $\dfrac{1}{1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1}$  (D) $\dfrac{1}{1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1}$

**分析** 由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 & \alpha \end{pmatrix}=\boldsymbol{XX}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}$ 得

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{I}, \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_2+\alpha\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\alpha}_2+\alpha=1. \end{cases}$$