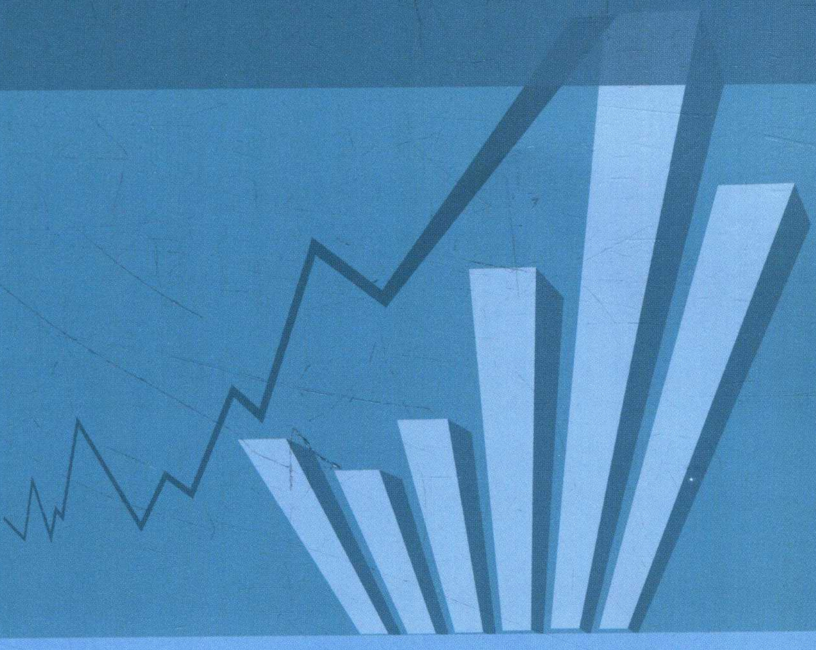
普通高等教育"十二五"规划教材

经济数学（二）

（线性代数、概率论与数理统计）

主编 林 谦 陈传明



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

经济数学(二)

(线性代数、概率论与数理统计)

主　编　林　谦　陈传明

参　编　王爱菊　马保忠
　　　　李梦媛　甄博倩

科学出版社

北　京

内 容 简 介

为适应高等学校数学类课程改革的需要，编者经过多年教学实践经验，并在吸收"十五"和"十一五"规划系列教材成果的基础上编写了本书. 本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步和概率分布表等，书后附有习题参考答案或提示.

本书可作为普通高等学校经济类各专业的教材，也可作为普通高等学校教师的教学参考书，还可供经济管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 2，线性代数、概率论与数理统计/林谦，陈传明主编. —北京：科学出版社，2015

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-046073-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①林… ②陈… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③概率论-高等学校-教材④数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0②O151.2③O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 249473 号

责任编辑：李淑丽 李 萍 / 责任校对：蒋 萍

责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 12 月第一次印刷 印张：17 1/4

字数：348 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

经济数学在社会经济活动中的应用十分广泛.随着计算机技术及其他高科技的普及和发展,线性代数和概率论与数理统计在经济活动中的重要性日渐突出,这就决定了线性代数和概率论与数理统计的理论和方法具有广泛的应用价值.从1999年我国高等学校扩大招生规模至今,我国高等教育已实现从精英教育向大众化教育的转变,但与之相应的教材建设不尽如人意,还或多或少地停留在传统教育模式上,过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性,重理论而轻实践.那么,什么样的教材才适应当今学生的特点?针对这个问题,编者根据高等学校经济类专业经济数学(线性代数和概率论与数理统计)的教学大纲和教学基本要求,结合编者多年的教学实践经验,并在吸收"十五"和"十一五"规划教材成果的基础上编写了本书.在本书的编写过程中,力求体现如下特点.

(1) 强调概念,淡化理论.教材以现实、生动的实例引进数学概念,以简明通俗的语言深入浅出地阐述基本概念和基本理论,在保证数学概念的准确性及基本理论完整性的原则下,减少抽象的理论证明,并借助几何直观图形和实际意义解释概念和定理,使抽象的概念形象化,使复杂的问题简单化,从而降低难度,精简内容,以适应教学改革的时代需要.

(2) 结合专业,强化实用.在教学内容上充分体现"贴近实际,面向专业"的思想,并以"实用为目的",以"必须、够用为度",同时加强计算.因此,本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容,精选了一定数量的经济应用实例,将数学知识模块与经济案例相结合,使学生能将所学基本知识和基本理论应用到解决实际问题中去,从而使学生充分感受到数学的应用价值.

(3) 把方法的应用程序化、步骤化.

(4) 强调数学思想方法.本书注重培养学生用数学思想方法去分析和解决实际问题的能力,力求将数学的思想和方法融到经济生活中,体现学习经济数学的终极目标是解决实际生活中的经济问题,更好地为国家的经济建设服务,同时为后继相关课程的学习打下良好的数学基础.

(5) 适应少学时要求,本书内容按每周3学时,18周共54学时来编写.教师可以根据实际情况决定教学内容的取舍.

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步和概率分布表;每章、节后都附有一定量的习题,题型较全,以帮助学生巩固和提高所学知识,同时书后附有习题参考答案或提示,以供参考.

另外,为适应不同层次、不同学科的需要,书中有的地方加了*号,它相对独立,可根据需要及学时多少进行适当删减.

本书由6位具有丰富教学实践经验的教师,在云南省多所高等院校近十年来使用的《经济数学》讲稿基础上,结合高等学校数学类课程改革的需要编写而成.编写组为保证本书的质量,将书稿以讲义的形式在多所院校进行试用,并根据广大师生提出的建议、意见,反复对书稿进行修改和补充.其中第1章由陈传明(云南师范大学商学院)编写;第2、3章由林谦(云南师范大学)编写;第4章由王爱菊(云南师范大学商学院)编写;第5章由马保忠(云南师范大学商学院)编写;第6章由李梦媛和甄博倩(云南师范大学商学院)编写.全书由林谦教授负责框架结构安排、统稿、定稿和主审.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请广大读者和同行批评指正,以便我们再版时进行纠正.

编　者

2014年11月于昆明

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中的重要概念之一，它来源于解线性方程组的问题，并且广泛应用于数学、工程技术及经济学等众多领域. 本章主要介绍行列式的概念、性质及计算方法，并介绍用行列式解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则. 最后，利用克拉默法则给出方程个数与未知量个数相等的线性齐次方程组有非零解的充要条件.

1.1　行列式的定义及其展开定理

1.1.1　二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

定义 1.1　由 $4=2^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 排成的 2 行 2 列的正方形数表，并在它的两旁各加一条竖线所得到的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D_2 \tag{1.1}$$

称为**二阶行列式**，它表示一个数，其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

$$(-)\qquad\qquad(+)$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式 D_2 的**元素**，且第一个下标 i 称为**行标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式中的第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式中的第 j 列. 由此知，元素 a_{ij} 位于行列式 D_2 中第 i 行与第 j 列的交叉点处.

从式(1.2)看出：$a_{11}a_{22}$ 是实线(称为**主对角线**)上两数之积，$a_{12}a_{21}$ 是虚线(称为**次对角线**)上两数之积. 因此，按式(1.2)计算二阶行列式的方法(或法则)称为**对角线展开法**(或**对角线法则**).

例 1.1　$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5\times2-(-1)\times3=10+3=13.$

例 1.2　$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

2. 三阶行列式

定义 1.2　由 $9=3^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成的 3 行 3 列的正方形数表，并在它的两旁各加一条竖线所得到的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D_3 \tag{1.3}$$

称为**三阶行列式**，它表示一个数，其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$D_3=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1.4}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为行列式 D_3 的**元素**，且位于 D_3 中第 i 行与第 j 列的交叉点处，同时可将式(1.4)按下面规律性较强的**莎路展开法**(仍可称为**对角线展开法**)来进行记忆，即有

$$D_3=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$(-)\quad(-)\quad(-)\qquad\quad(+)\quad(+)\quad(+)$$

$$=a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.5}$$

另外，可规定**一阶行列式** $|a_{11}|=a_{11}$，并注意 $|a_{11}|$ 和绝对值的差别，不要混淆.

例 1.3　计算三阶行列式：$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

解　原式 $=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right.=2\times3\times(-2)+3\times1\times2+5\times(-4)\times1$

$$-5\times3\times2-2\times1\times1-3\times(-4)\times(-2)$$

$$=-12+6-20-30-2-24=-82.$$　**解毕**

例 1.4　$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}<0$ 的充分必要条件是什么?

解 因 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 4 & 1 \end{matrix} = a^2+0+0-0-0-1=a^2-1$，故

$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0 \Leftrightarrow a^2-1<0 \Leftrightarrow a^2<1 \Leftrightarrow |a|<1 \Leftrightarrow -1<a<1.$ **解毕**

1.1.2 n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的概念及行列式的展开定理之前，先介绍**余子式**和**代数余子式**的概念.

1. 二阶、三阶行列式的余子式和代数余子式

定义 1.3 从二阶或三阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩下的元素不改变原来的顺序所构成的一阶或二阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} $(i,j=1,2$ 或 $i,j=1,2,3)$ 的**代数余子式**.

例 1.5 在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中，它的各元素的余子式和代数余子式分别为

$$a_{11}:\quad M_{11}=|a_{22}|=a_{22},\quad A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=a_{22};$$
$$a_{12}:\quad M_{12}=|a_{21}|=a_{21},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-a_{21};$$
$$a_{21}:\quad M_{21}=|a_{12}|=a_{12},\quad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}=-a_{12};$$
$$a_{22}:\quad M_{22}=|a_{11}|=a_{11},\quad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=a_{11}.$$

例 1.6 在三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{11}=1$ 和元素 $a_{32}=4$ 的余子式和代数余子式分别为

$$a_{11}=1:\quad M_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=-4;$$
$$a_{32}=4:\quad M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-7.$$

有了代数余子式的概念之后，便可将二阶或三阶行列式表示为它们的第一行各元素与其所对应代数余子式的乘积之和式，并称该和式为所给行列式**按第一行的展开式**(其实可按任何一行或任何一列展开，该结论将在 1.1.3 节中给出)，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1行展开}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按第2列展开}]{} a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1行展开}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

2. n 阶行列式及其余子式和代数余子式

归纳二阶、三阶行列式及其余子式和代数余子式的概念,以及二阶、三阶行列式的展开规律,便可推广出一般 n 阶行列式及其余子式和代数余子式的定义如下.

定义 1.4　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$(也称其为**元素**)排成的 n 行 n 列的正方形数表,并在它的两旁各加一条竖线所得到的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D_n \xlongequal{\text{简记为}} |a_{ij}|_n$$

称为 **n 阶行列式**,它表示一个数,其值为 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$,即

$D_n=|a_{ij}|_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$,

其中 M_{ij} 是从 n 阶行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后,剩下的元素不改变原来的顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,并分别称 M_{ij} 和 A_{ij} 是元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$的**余子式**和**代数余子式**.

由 n 阶行列式 D_n 的定义看出:要计算 D_n 的值,可通过计算 n 个 $n-1$ 阶行列式 $M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的值而得到. 以此类推,对每个 $n-1$ 阶行列式 M_{1j},又可通过计算 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式的值而得到,继续下去,最终便可得到 D_n 的值.

例 1.7　在四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中,元素 a_{32} 的余子式和代数余

子式分别为$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$和$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

1.1.3　*n* 阶行列式的展开定理

为后面计算行列式的需要,也限于本书的篇幅,下面不加证明地给出行列式展开定理. 对后面类似的情形也如此处理,不再赘述.

定理 1.1(行列式展开定理)　n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n$$

的值等于它的任一行(或任一列)的各元素与其所对应代数余子式乘积之和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n).$$

从行列式的定义和展开定理可以看出,根据定义或展开定理计算高阶行列式时,其实质是将高阶行列式降低一阶来进行计算,这是计算行列式的重要方法(称为**降阶计算法**)之一,应熟练掌握. **同时还需指出**:对阶数 $n\geqslant 4$ 的行列式 D_n 来说,不存在对角线展开法. 另外,**由展开定理立知**:当一个行列式中的某一行(或某一列)中的元素全为零时,该行列式的值必为零.

例 1.8　计算四阶下三角形行列式$(D_4)_{下三角}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$和四阶上

三角形行列式$(D_4)_{上三角}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$的值.

解 反复应用行列式的定义和展开定理并结合二阶行列式的对角线展开法有

$$(D_4)_{下三角}\xlongequal{按第1行展开}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\xlongequal{按第1行展开}a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44};$$

$$(D_4)_{上三角}\xlongequal[按第1列展开]{}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}\xlongequal[按第1列展开]{}a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

解毕

上、下三角形行列式的概念还可推广到 n 阶的情形,即有以下定义.

定义 1.5 形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的 n 阶行列式分别称为 n 阶**上三角形行列式**和 n 阶**下三角形行列式**,统称为**三角形行列式**.

反复应用行列式的定义和展开定理,同理可得到**三角形行列式的值如下**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

且该结果是今后计算行列式的一个重要依据,必须熟练掌握.

例 1.9 计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$的值.

解 因第 2 列含有三个零,故根据展开定理和上三角形行列式的特点,按第 2 列展开有

$$D_4\xlongequal[按第2列展开]{}2A_{12}=-2M_{12}=-2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-2\times3\times4\times(-5)=120.$$ **解毕**

习 题 1.1

1. 计算下列二阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} a-b & a+1 \\ a-1 & a+b \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

3. 当 λ 取何值时，三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$?

4. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 4 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

5. 写出下列行列式中元素 a_{13}，a_{21} 和 a_{32} 的代数余子式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ b & c & -a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

6. 解方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & x & 4 \\ x^2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$.

1.2 行列式的性质及其计算

1.2.1 行列式的性质

由行列式的定义和展开定理知，对低阶行列式和零元素较多的行列式，用定义或展开定理计算是较方便的. 但是，对阶数较大的行列式，应用定义或展开定理来

进行计算则较烦琐且困难. 因此,有必要先导出行列式的一些基本性质,以便利用这些性质来简化行列式的计算. 为此,先介绍**转置行列式**概念.

定义 1.6　将 n 阶行列式 D_n 的行与列依次互换后得到的行列式称为行列式 D_n 的**转置行列式**,记为 D_n^{T},即若 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n$,则 $D_n^{\mathrm{T}}=$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_N,\text{亦即}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n.$$

例 1.10　若 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

性质 1.1　n 阶行列式 D_n 的值与它的转置行列式 D_n^{T} 的值相等(此变换称为行列式的**转置等值变换**),即 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$,亦即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1 表明:行列式中行与列的地位是相等的,即对行列式的性质来说,凡是对行成立的性质对列也同样成立,反之亦然. 因此,在下面的性质中仅介绍行列式行的情形.

性质 1.2　将行列式的任两行互换位置后得到的行列式,其值与原行列式的值反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n \xlongequal{(i)\leftrightarrow(s)} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n \quad (i\neq s).$$

注　符号 $(i)\leftrightarrow(s)$ 放在等号上(下)面表示互换行列式中第 i,s 两行(列)的

位置.

例 1.11 若 $D_3=\begin{vmatrix}2&-4&2\\3&-1&5\\2&1&5\end{vmatrix}$,则由三阶行列式的莎路展开法有

(1) $D_3=\left|\begin{matrix}2&-4&2\\3&-1&5\\2&1&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&-4\\3&-1\\2&1\end{matrix}=-10-40+6+4-10+60=10;$

$$D_3^{\mathrm{T}}=\left|\begin{matrix}2&3&2\\-4&-1&1\\2&5&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&3\\-4&-1\\2&5\end{matrix}=-10+6-40+4-10+60=10=D_3.$$

(2) $D_3\xlongequal{(1)\leftrightarrow(3)}\left|\begin{matrix}2&1&5\\3&-1&5\\2&-4&2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&1\\3&-1\\2&-4\end{matrix}=-4+10-60+10+40-6=-10=-D_3.$

由例 1.11 看出,性质 1.1 和性质 1.2 的结论的确成立.

推论 1.1 若行列式中有两行的对应位置的元素相同,则该行列式的值必为零.例如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}=0.$$

性质 1.3 用数 k 乘行列式的某一行中的每一个元素,相当于用数 k 乘此行列式(此变换称为行列式的**倍乘等值行变换**),即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}_{n\times n}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}_n\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

推论 1.2 若行列式中有某两行的对应元素成比例,则该行列式的值必为零.例如,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2a_{11}&2a_{12}&2a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}=0.$$

例 1.12　计算三阶行列式：$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times(-4) & 2\times 2 & 2\times(-1) \\ 3\times(-4) & 3\times 2 & 3\times 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 2\times 3\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times 3\times(-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -24(-2+2+1+2+1+2) = -24\times 6 = -144.$$

解毕

例 1.13　设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解　原式 $= -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6\times 2 = 12.$

解毕

性质 1.4　若行列式中某一行的每一个元素都是两数之和，则该行列式可分解为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.5　将行列式中某行元素的 k 倍加到另一行对应位置的元素上，所得新行列式的值与原行列式的值相等(此变换称为行列式的**倍加等值行变换**)，即当