

专家型数学教师教学提升锦囊

李玉文 陈翠花 方学荣 主编

.....

数学教育 论点述评



电子科技大学出版社

专家型数学教师教学提升锦囊

数学教育论点述评

李玉文 陈翠花 方学荣 主编

电子科技大学出版社

数学教育论点述评

李玉文 陈翠花 方学荣 主编

出版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)
责任编辑:卿 春
发行:电子科技大学出版社
印刷:北京市朝教印刷厂
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:7.5 字数:160千字
版次:1994年2月第一版
印次:2005年10月第二次印刷
书号:ISBN 7-81016-545-3/G·166
定价:18.80元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误,请寄回印刷厂调换。

序

数学和数学教育的历史大概是一样长的。可是，数学理论源远流长，已是洋洋大观，而数学教育的理论却仍在襁褓之中，至多是一个匍匐爬行的孩子，离独立成人，还差一大截子呢！以中国的情形来说，唐朝曾有数学教育的极盛时期，但并无理论形态的数学教育论述。宋元之后渐渐衰落，明清之际，竟无数学教育可言。直至鸦片战争之后，门禁洞开，同文馆中始设天算馆，才有了数学教育的事业。数学教授法之类的课程，在本世纪初的京师大学堂已有开设。从那时以来，快有近百年的历史了。若问：中国数学教育学是否已经成熟？答案恐怕仍旧是否定的。

这倒不是悲观主义的想法。实在是因为数学教育太复杂了。在世界上，至今没有一部公认的“数学教育学”权威著作问世。数学教育的基本规律，并没有真正搞清楚。

不过，应该看到，第二次大战之后的几十年中，数学教育研究的进展还是十分迅猛的。主要是 60 年代的“新数”时期，社会上投入大量资金研究数学教育，于是科研成果大量出版，研究人才也成批涌现，其效应至今仍能感觉到。其中有些口号完全是“数学教育”的，而非“教育”规律加数学例子的那一种。例如“大众数学”、

“问题解决”、“非形式化”、“计算机对数学教育影响”、“数学学习心理学”等等,都有特定的含义,使“数学教育学”丰满了许多。

中国自1949年之后,教育上搬50年代苏联的一套,数学教材教法课程体系几乎全部移植过来,其基本框架一直影响到今天。80年代的改革开放给数学教育带来了新的生机。研究成果和研究队伍都有了很大发展、但也正是在这一时期,“应试教育”的阴影,使数学教育的发展出现了某种扭曲现象。

就国外数学教育的引进而言,有两件事影响巨大。一是玻利亚的“怎样解题”,正好拿来为“题海”服务,二是布鲁姆的目标分类教学体系,恰为“科学化”考试提供理论依据。至于其它的国际数学教育进展,影响就很小了。许多情形根本没有介绍、即使介绍了,也是听过算数,并不认真研究的。另一方面国内研究倒出现了一些新的课题。比如,钱学森教授提倡思维研究,就有大批的数学思维著作问世。认知心理学的传播,也推动了“数学教育心理学”的研究。用信息论、控制论观点研究数学教育也曾热闹一阵子。当然,最引人注目的成就是数学奥林匹克竞赛的开展,简直到了如火如荼的程度。

在这样的基础上,中国大地上的数学教育研究达到了新的高度,一大批数学教育著作在短短的几年内相继问世,可以说呈现出空前的繁荣。一方面是数学教育研究的环境比较优越,数学教育工作者对学术水平的努力追求,另一方面,也因为各地的出版机构有较强的财力给予支持,这是我们应当感谢各位出版界朋友的。

1992年初,我自美国访问两年后归来。戴再平教授帮我收集

了国外数学教育方面的出版物,林林总总很是不少,使我本来宽松的书架变得拥挤起来。我想抽空把它们读一下,太多了,抽不出那么多的时间来。恰巧,系里通知我,说有三名访问学者要来华东师人;新乡的陈翠花,德州的李玉文和远道来自新疆的方学荣。我于是把读书任务分给他们,让他们在比较中获取正确的看法。我和他们曾经有过几次长谈。最后,又请他们综合整理成文,加入自己的意见,形成了本书的初稿。

数学教育界的传统是大家比较客气,很少指名道姓地进行商榷讨论。因此,尽管彼此意见很不相同,也是各说各的,很少交锋。好,现在的这本书,把许多论点都放在一起,就便于大家比较了。就这一点而言,此书大概还是有些用处的。

正如上述,数学教育学还未出现“一锤定音”的经典型权威著作,所以要研究数学教育也就不能只读一本,而要多方涉猎,以求较为全面,这也许是学习“数学教育”不同于学习数学的一个特点。对于师范大学的学生,如果想多读几本书,博采众长的话,本书或许会起一份“导游”的作用。

我在1991年和本校的几位同事也出版了一本《数学教育学》,自然也成为本书摘编的对象。几位主编在评述时颇有溢美之词,希望读者不要太认真,至于本书由我主审,这也是应作者之请,按流行出版惯例办事。我确实是此书的始作俑者,也提过一些看法,至于“审”,我实在来不及做,没法对几位作者的文字负责。好在大家都是圈中人,为了数学教育事业的兴旺,我想不会多所计较的。

20世纪只剩下不到6年的时间了,在历史的长河中,这本书也许不会留下什么痕迹。最高的期望是会有一些读者表示喜欢,为

数学教育论点述评

他们节约了搜寻各家论点的时间。最后,我愿中国数学教育界能在 90 年代后半期有更大作为,出现数学教育研究的新高潮,并希望过若干年之后,能再次出版新的“论点摘编”,在新的水平上作出评述,为形成具有中国特色的数学教育学作一份贡献。

张奠宙于华东师大数学系 94 年 3 月

编者的话

我们三位主编先后来华东师大数学系进修数学教育,本想听点课,作点笔记,把“全套”数学教育的理论带回学校,以应教学的需要,可是,导师张奠宙教授叫我们自己看书,独立思考,还说“数学教育学”很不成熟,正在草创之中,最好是比较各家观点,择善而从,需要经过若干年,方能有大家比较公认的“数学教育学”问世。

确实,这几年各地出版的“数学教育学”也真不少,原来十三院校编写的“数学教材教法”的一统天下,现在已是“百家争鸣”了。于是,我们想把各家观点摘编出来,加上我们自己的一些看法,编成一本讲义,让师范院校的教师和学生,教育学院的进修教师,以及广大的数学教育工作者,有一本可供参阅的基础,让主讲教师谈自己的观点。听讲者用自己的眼光去分析,并展开讨论与争论。这样学“数学教育”也许更加有味道些,于是我们分工,写出了《数学教育论点述评》初稿,并油印成册,1993年7月底在四平召开的全国高师数学教育年会上进行交流,并特邀全国部分数学教育专家、学者作为编委,他们是:戴再平(浙江教育学院)、牛家骧(枣庄师专)、方欣华(郑州教育学院)、伊秀枝(昭乌达蒙族师专)、李玉琪(山东教育学院)、杨弢亮(青海教育学院)、姜秉利(德州师专)、姜涛(通化师范学院)、徐兆环(通化师范学院)、左敬亮(新乡师范)、李新波(滑县师范)、姚光同(克山师专)、韩西涛(新疆教育学院)、张绍超(鞍山师专)等。对初稿进行

修改、补充。同时,陈翠花老师于93年下半年给河南师大数学系本科生进行了试讲,多方征求意见。

各编委在认真审阅初稿的基础上,提出了很多具体的忠恳的建议,有的编委对某些章节进行了重新改写,使我们这本书的质量上了一个新台阶。

现在本书共十一章,第一、九、十、十一章由陈翠花执笔,第二、六章由方学荣执笔;第三、四、五章由李玉文执笔;第七章由左敬亮执笔;第八章由李新波执笔;全书由陈翠花统稿。

本书的主要特点是:一、介绍了国内外数学教育的发展趋势和改革方向,以及数学教育中的一些值得探讨的问题。收集了目前国内外各种不同的观点和信息,加上我们自己的一些看法,力图进一步促进我国的数学教育改革和发展。二、使处在教学第一线的教师,通过阅读本书,对自己的教学经验不断升华,以使教学和科研内容更加丰富多彩。三、本书作为师范院校数学专业的学生用书,适应教师和学生共同参与教学活动,以活跃课堂气氛和开阔学生眼界。另外,还可作为中学数学教师集体讨论教学改革的参考资料。

在编写本书的过程中,我们得到了华东师大数学系的张莫宙、唐瑞芬、邹一心三位先生的大力支持和热情鼓励。张莫宙教授从课题的选定、编写计划的审定乃至初稿的审阅都付出了大量的心血,成稿后又亲自写序。在此,谨向他(她)们表示衷心的感谢。除此之外,由于我们参考了大量的有关数学教育方面的书籍,以及报刊杂志,有些人的论点我们还作了大量的引用,在此亦向他们表示感谢!

限于作者水平,加上我们自身对数学教育的深入研究不够,书中定有不少错漏和不妥之处,期望能得到读者的指教。

第一章 数学和数学的特点的不同论述	(1)
§1 数学是什么	(1)
§2 数学的特点	(3)
第二章 数学教育目的之种种提法	(7)
第三章 数学教学原则	(22)
§1 数学教学原则的传统提法	(22)
§2 数学教学原则的新提法	(36)
第四章 数学教学方法综述	(42)
§1 数学教学方法	(42)
§2 数学教学方法的选择	(51)
第五章 数学能力的有关论述	(58)
§1 数学能力的有关论述	(58)
§2 数学基本能力的培养	(61)
第六章 中学数学中若干问题的探讨	(78)
§1 语 言	(78)
§2 集 合	(84)
§3 函 数	(86)
§4 运 算	(92)

第七章 数学教育中的“问题解决”	(94)
§1 “问题解决”——数学教育的发展趋势	(94)
§2 问题的意义和分类	(100)
§3 “问题解决”的含义及它对数学教育的启示	(118)
第八章 影响学生学习的心理因素	(123)
§1 影响学生学习的外部因素	(124)
§2 影响学生学习的内部因素	(132)
第九章 数学教学怎样使知识和智能和谐发展	(143)
§1 智力的不同论述	(143)
§2 知识与智力和能力的联系与区别	(147)
§3 数学教学怎样使知识和智能和谐发展	(151)
第十章 中学数学思想和方法	(158)
第十一章 中学数学教育改革动向	(197)
§1 数学教育改革的原因	(197)
§2 美国数学教育改革介绍	(209)
§3 英国数学教育改革介绍	(212)
§4 日本数学教育改革介绍	(214)
§5 我国数学教育改革动向	(217)
主要参考文献	(228)

第一章 数学和数学的特点

的不同论述

§ 1 数学是什么

数学是什么？中学时期就已熟知，“数学是研究现实世界的数量关系与空间形式的科学”，这是恩格斯(F. Engels · 1820—1895年)在1878年写的《反杜林论》中对数学所下的定义。这个定义至今已经一百多年了，这期间，数学在基础方面的发展和应用范围的拓广，已改变了数学的外貌和本质，现在数学的研究对象已由空间形式和数量关系扩大到任意性质的元素集上的运算和关系，把它叫做抽象结构、形式体系和一般关系。比如，射影几何，就是完全不用线段长度、角度大小、面积多少等与量有关的概念，而用的仅仅是直线及点的位置关系。集合论是研究集合的性质。拓扑学是研究图形在连续变形下不发生变化的性质。象这些非数非量的研究对象，已进入了数学的大多数领域。显然恩格斯的定义有不够完善之处。但是，无论现代数学的结构变得多么复杂，以至于几乎完全超出了原来定义的空间形式和数量关系的范围，然而它们的数学结构都是从许多具体的数学结构抽象得来的，而具体的数学

结构又是起源于现实的空间形式和数量关系,从这个意义上讲,恩格斯所下的定义仍然保持其有效性和现实性。

现在有些数学家认为,数学是艺术,与音乐相类似,可看成人类思维的一种自由创造,一种发明;有些数学家认为,数学乃是一种科学,与物理学一样乃是源于现实的关系的结构的模型,一种发现;也有一些数学家认为,数学是一种文化,“每一种文化都有自己的数学,这种数学随着相应文化的死亡而死亡。”〔1〕

罗素说,“数学是这样一门科学,我们全然不知道我们在数学中谈论些什么,也不知道我们说的是不是真的。”按照罗素的说法,数学研究的对象是什么,以及它的研究结果是真还是假,都是不清楚的,若真是这样,数学岂不成了一门稀奇古怪的学问?!乍听罗素的话,会使人产生一种他似乎在愚弄人的感觉,但仔细推敲,会觉得这些看法确实表达了今日纯数学的真髓。它毫无夸张、诡辩的成份,且能知道数学的变化情况。〔2〕所以,现在一些数学家认为,要想用最简单的几句话来定义如此广泛的数学,概括它的范围内容、本质和研究方法等是十分困难的,恐怕也是没有益的。日本的米山国藏就认为,由于数学发展的速度太快,与其给数学下定义,倒不如把数学分为纯数学和应用数学,给出它们的定义,或者分别列出各个侧面看到数学的特征。即

数学研究方法的特征,

数学对象的特征,

数学本质的特征,

应用方面的数学的特征。

尽力把握住它们的真髓,这比勉强去定义数学要远为有用。〔3〕

§ 2 数学的特点

数学的特点,基本上是众口一词,就是抽象性,严谨性,应用广泛性。

有的数学家正好和它持相反的意见,比如著名的数学哲学家拉卡托斯就把数学看作证明与反驳的交互过程。他认为数学从来不是严谨的。我国有的数学专家对此也有些质疑。

一、关于抽象性。这不是数学所独有的属性,各门学科乃至全部人类思维都具有这个特性。如果不指出数学抽象的特点,泛泛地谈抽象性是没有意义的。具体来说,数学的抽象与自然科学以及社会科学的抽象区别在于:数学的抽象是撇开对象的具体内容,仅仅保留空间形式或数量关系,这些形式或关系已是一种形式化的思维材料。例如:公式 $A=B \cdot C$, 世界上并没有这个实物,它是人类从现实世界数量关系中得出来的思维材料。在物理学中,它只有表示匀速直线运动的路程=速度 $\times$ 时间,才具有实际意义,而在数学中,它可以撇开具体的内容,把具体内容当作无所谓的东西,成了一种形式化的材料,它既可以表示路程=速度 $\times$ 时间,又可以表示矩形面积=长 $\times$ 宽,还可以表示购物总价=购物单价 $\times$ 购物件数。随着数学的发展,数学的抽象程度越来越高,它即可以表示数的乘法关系,也可以表示式的乘法关系,甚至可以表示向量、集合、矩阵运算的乘法关系。除此之外,数学中有许多概念,并非与现实世界中的物体对立着,而且甚至不存在这样的物体,它是

人们经过思维加工,或假想出来的。例如,人们对自然数的认识,当自然数无限制地继续下去时,相应的数距我们越来越远,那些距我们很远很远的大数是决不可能由真实事物中直接抽象出来,而是依靠人的想象,这种想象的数实际上是人的思维的产物。类似地,直线可以向两边无限延伸;极限、有理数的稠密性、实数的连续性等,都不能由真实事物中抽象出来,都是人们思维的结果。

又如,虚数“ i ”就是作为一种思维材料在数学中出现的。这正如欧拉当时所言:“因为所有可以想象的数都或者比零大或者比零小,或者等于零。所以很清楚,负数的平方根不能包括在可能的数中,从而,我们必须说它是不可能的数。然而,这种情况使我们得到这样一种数的概念,它们就其本性来说,是不可能的数,因而通常叫做虚数或者想象中的数,因为它们只存在于想象之中”。莱布尼兹也说:“虚数是理想世界的奇异创造,几乎是介于存在与不存在之间。”然而,随着科学的发展和人们认识的深入,到了19世纪,高斯给出了虚数的几何表示,帮助人们直观地理解了它的真实意义,随后又在流体力学中得到了应用。由此可见,假想的数对数学的发展起着不可估量的作用。而且随着数学的发展,思维材料的形式在数学中占据越来越重要的位置。正如数学家M·克莱因所指出的:“1700年以后,越来越多的、更远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌出来的概念进入了数学”。它们逐渐取代了那些“直接观念化”的概念,并在数学中占据了主导地位。”

二、关于严谨性。数学推理严谨是众所周知的,欧几里得的《几何原本》可称为逻辑严谨的一个典型例子,它从少数定义、公理出发,利用逻辑推理的方法,推演出整个几何体系,把丰富而零散

的几何材料整理成系统严密的整体,成为人类历史上的科学杰作之一,一直被后世推崇。但是,数学的严谨性不是绝对的,数学的原则也不是一成不变的,它也在发展。《几何原本》就有不完善之处,因此,后来又逐步建立了严密的希尔伯特公理体系。〔4〕除此之外,那一门科学也都是严谨的,治学严谨,这是起码的科学态度。所以把数学的特点简单地归结为严谨性是不妥当的。它既不符合历史的过程,又不符合学生的学习过程。一个人的数学思维有宏观和微观两个方面,宏观上,数学思维乃是生动活泼的策略创造,微观上,要求数学思维步步为营,言必有据,进行严谨的逻辑演绎,这两者有机的结合,才是数学思维的特点。17世纪,牛顿、莱布尼兹创立微积分时,并没有严格的极限定义, dx 究竟是什么?是零?还是非零?他们说不清。我们现在熟知的极限理论“ $\epsilon-\delta$ ”语言是19世纪魏尔斯特拉斯、柯西等人给出的,但是人们仍然把功劳归于首创者,即是说首创者做了宏观上的工作,补行证明做的是微观上的工作。

三、广泛的应用性。关于数学的广泛应用,华罗庚教授作了一个概括,他说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。”然而,其它学科也具有广泛的应用,平常说,马克思主义是放之四海而皆准的真理,当然有广泛的应用性,语言人人都要学,因而也具有广泛的应用性。而数学的广泛应用,主要在于它使用了精确简约通用的科学符号。化学符号和化学方程式,工程中传递信息的图纸,这些符号都只能在各自领域中发生作用。唯有数学符号,它是一切科学都使用的符号。另外,数学符号精确简约,它可以在人们进行交往时用最少最

明确的符号传达最大最准确的信息,关于数学符号的优越性请参看第十章、一。

△ 数学的特点除了上面谈到的三性外,还有下面的说法。

四、科学的预见性。比如,在火箭、导弹发射之前,可以通过精密的计算,预测它的飞行轨道和着陆地点,在天体力学中的未知行星未被直接观察到之前,就从天文计算上预测到它的存在。

五、幽美性。这是美籍华裔数学家王浩在其《从数学到哲学》中提出来的,书中对这一特征未作详细解释。一般的理解是:数学从表面上看好像是枯燥无味的,然而它却具有一种隐蔽的深邃的美,一种理性的美。例如,数学定理的和谐美,数学推理的完全美,数学语言的简约美,数学构思的创新美,等等。〔3〕