北大燕园

2016年 李正元·范培华

考研数学 6

# 数学

数学三

# 历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华



中国政法大学出版社

2016年李正元·范培华考研数学⑥

# 数学

数学三

# 历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华



中国政法大学出版社
2015·北京

**图书在版编目(CIP)数据**

李正元·范培华考研数学．数学历年试题解析．数学三/李正元，尤承业，范培华主编．—北京：中国政法大学出版社，2015. 1
ISBN 978-7-5620-5829-8

Ⅰ. ①李…　Ⅱ. ①李…　②尤…　③范…　Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 309739 号

---

| | |
|---|---|
| 出版者 | 中国政法大学出版社 |
| 地　址 | 北京市海淀区西土城路 25 号 |
| 邮寄地址 | 北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088 |
| 网　址 | http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社） |
| 电　话 | 010－58908285（总编室）　58908433（编辑部）　58908334（邮购部） |
| 承　印 | 北京旺都印务有限公司 |
| 开　本 | 787mm×1092mm　1/16 |
| 印　张 | 25 |
| 字　数 | 656 千字 |
| 版　次 | 2015 年 1 月第 1 版 |
| 印　次 | 2015 年 1 月第 1 次印刷 |
| 定　价 | 39.80 元 |

# 前　言

## （一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

## （二）

本书汇集了2001年～2015年全国硕士研究生招生统考数学三试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

**编者按**——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

**题型分类解析**——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了1998年（含）以前数学三相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

**综述**——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

## （三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书（数学三）**》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2～3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2015年1月

# 目　录

## 第一篇　2015 年考研数学三试题及答案与解析



## 第二篇　2001 ~ 2014 年考研数学三试题



## 第三篇　2001 ~ 2014 年考研数学三试题分类解析

# 第一篇　2015 年考研数学三试题及答案与解析

## 2015 年考研数学三试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是

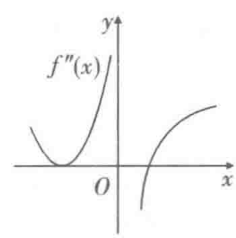
(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$　　【　　】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y = f(x)$ 的拐点的个数为




(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3　　【　　】

(3) 设 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x, x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$,函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　【　　】

(4) 下列级数中发散的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 1}{\ln n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$　　【　　】

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{d} \\ \mathrm{d}^2 \end{bmatrix}$,若集合 $\Omega = \{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a \notin \Omega, \mathrm{d} \notin \Omega$　　(B) $a \notin \Omega, \mathrm{d} \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$ (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$ 【 . 】

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$\boldsymbol{P}=(e_1,e_2,e_3)$. 若$\boldsymbol{Q}=(e_1,-e_3,e_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 【 】

(7) 若$A,B$为任意两个随机事件,则

(A) $P(AB) \leqslant P(A)P(B)$ (B) $P(AB) \geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ 【 】

(8) 设总体$X \sim B(m,\theta)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,则

$E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$ (B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$ (D) $mn\theta(1-\theta)$ 【 】

**二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.**

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

(10) 设函数$f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,dt$,若$\varphi(1)=1$,$\varphi'(1)=5$,则$f(1)=$ ________.

(11) 若函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定,则$dz\big|_{(0,0)}=$ ________.

(12) 设函数$y=y(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解,且在$x=0$处$y(x)$取得极值3,则$y(x)=$ ________.

(13) 若3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$2,-2,1$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵,则行列式$|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(14) 设二维随机变量$(X,Y)$服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$,则$P\{XY-Y<0\}=$ ________.

**三、解答题:15 ~ 23 小题,共94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)(**本题满分 10 分**)

设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$,$g(x)=kx^3$,若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$时是等价无穷小,求$a,b,k$的值.

(16)(**本题满分 10 分**)

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\,dx\,dy$,其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

(17)(**本题满分 10 分**)

为了实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型,设$Q$为该商品的需求量,$P$为价格,MC为边际成本,$\eta$为需求弹性($\eta>0$).

(Ⅰ) 证明定价模型为$P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ) 若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$,需求函数为$Q=40-P$,试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格.

(18)(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x)$ 在定义域 $I$ 上的导数大于零,若对任意的 $x_0 \in I$,曲线 $y = f(x)$ 在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与直线 $x = x_0$ 及 $x$ 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0) = 2$,求 $f(x)$ 的表达式.

(19)(**本题满分 10 分**)

(Ⅰ)设函数 $u(x), v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(Ⅱ)设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20)(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{0}$.

(1)求 $a$ 的值;

(2)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(21)(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 $a, b$ 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. .

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

对 $X$ 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现时停止.记 $Y$ 为观测次数.

(Ⅰ)求 $Y$ 的概率分布;

(Ⅱ)求 $EY$.

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体 $X$ 的概率密度为:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\theta$ 为未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 $\theta$ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 $\theta$ 的最大似然估计量.

## 2015 年考研数学三试题答案与解析

**一、选择题**

(1)【**分析**】 由数列极限存在的充要条件,即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$$

可知选项(A),(B),(C)均正确,故选项(D)是不正确的.

---

(2)【**分析**】 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$连续,除 $x = 0$ 外处处二阶可导.可能是 $y = f(x)$ 的拐点的是

$f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点.

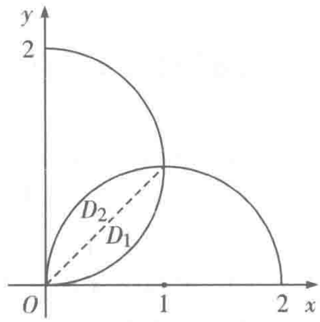
$f''(x)$ 的零点有二个,其中一个它的两侧 $f''(x)$ 变号,对应于 $y=f(x)$ 的拐点.另一个它的两侧 $f''(x)$ 恒正,对应的点不是 $y=f(x)$ 的拐点.

$x=0$,虽 $f''(0)$ 不存在,但 $x=0$ 两侧 $f''(x)$ 变号,因而 $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.

因此共有两个拐点.选(C).

---

(3)【分析】 区域 $D$ 如右图所示.




$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

$x^2+y^2=2y$ 在极坐标系下的方程为 $r=2\sin\theta$,

$x^2+y^2=2x$ 在极坐标系下的方程为 $r=2\cos\theta$.

所以 $\iint\limits_{D}f(x,y)=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

故应选(B).

---

(4)【分析】 用排除法.对于(A)和(D)可以用比值判别法,可知其收敛,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1/3^{n+1}}{n/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1.$$

对于(B)可以用比较判别法

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性.由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是 $p$ 级数,$p>1$,收敛,故(B)收敛.

另一方法是直接判断(C)发散.当 $n$ 为偶数时,$u_n=\frac{2}{\ln n}>\frac{2}{n}$,而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以级数(C)发散.或 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$,第一个级数是交错级数收敛,第二个级数与调和级数比较,知其发散,故两级数的和发散.正确选项为(C).

---

(5)【分析】 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$.

$|\boldsymbol{A}|$ 是一个范得蒙行列式,值为 $(a-1)(a-2)$,如果 $a\notin\Omega$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,(A),(B)排除.

类似地,如果 $\mathrm{d}\notin\Omega$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$,(C)排除.

当 $a$,d 都属于 $\Omega$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.选(D).

---

(6)【分析】 设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

说明 $e_1,e_2,e_3$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，特征值依次为 2，1，-1，于是 $-e_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，特征值也是 -1．因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

从而正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下，化得标准二次型为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. 选(A)．

(7)【分析】 由于事件 $A\supset AB,B\supset AB$，

故有 $P(A)\geqslant P(AB),P(B)\geqslant P(AB),P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB),P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

所以应选(C)．

(8)【分析】 $X$ 服从二项分布 $B(m,\theta)$，故 $\boldsymbol{D}X=m\theta(1-\theta)$

$$\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\boldsymbol{E}[(n-1)S^2]=(n-1)\boldsymbol{E}S^2=(n-1)\boldsymbol{D}X=(n-1)m\theta(1-\theta)$$

所以正确选项为(B)．

## 二、填空题

(9)【分析一】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

【分析二】 用等价无穷小因子替换：

$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1(x\to0)$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$．

(10)【分析】 由于 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导，$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$，由 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，可得 $5=1+2f(1)$．从而 $f(1)=2$．

(11)【分析】 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

当 $y=0$ 时，方程为 $\mathrm{e}^{x+3z}=1$，对 $x$ 求偏导，$\mathrm{e}^{x+3z}\left(1+3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}$

当 $x=0$ 时，方程为 $\mathrm{e}^{2y+3z}=1$，对 $y$ 求偏导，$\mathrm{e}^{2y+3z}\left(2+3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$．

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$．

(12)【分析】 这是二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为

$\lambda^2+\lambda-2=0$，

特征根为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$，

通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{x}$.

由于在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，可知 $y(0)=c_1+c_2=3$．

$y'(x)=-2c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{x}$，　$y'(0)=-2c_1+c_2=0$

解之,得 $c_1 = 1, c_2 = 2$.

故 $y = e^{-2x} + 2e^{x}$.

(13)【分析】 $A$ 的特征值为 2. $-2$,1,则 $B$ 的特征值为 3.7,1,$|B| = 21$.

**评注** 也可设 $A$ 是对角线元素为 2. $-2$,1 的对角矩阵,则 $B$ 是对角线元素为 3,7,1 的对角矩阵,$|B| = 21$.

(14)【分析】 由 $(X,Y)$ 服从二维正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,可知 $X \sim N(1,1)$,$X-1 \sim N(0,1)$,$Y \sim N(0,1)$ 且 $X,Y$ 相互独立,$X-1$ 与 $Y$ 也相互独立,故有

$$\begin{aligned}P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X-1)Y < 0\} = P\{X-1 < 0, Y > 0\} + P\{X-1 > 0, Y < 0\}\\ &= P\{X-1 < 0\} \cdot P\{Y > 0\} + P\{X-1 > 0\}P\{Y < 0\}\\ &= 2\Phi(0) \cdot \Phi(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## 三、解答题

(15)【分析与求解】 由 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = 1$

求出参数 $a,b$ 及 $k$.

【解法一】 用泰勒公式.已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$x\sin x = x(x + o(x^2)) = x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}f(x) &= x + a\ln(1+x) + bx\sin x\\ &= x + ax - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + o(x^3)\\ &= (a+1)x + \left(b - \frac{1}{2}a\right)x^2 + \frac{1}{3}ax^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a + 1 = 0, b - \dfrac{a}{2} = 0$,即 $a = -1, b = -\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{kx^3} = -\frac{1}{3k} = 1$$

$\Rightarrow \quad k = -\dfrac{1}{3}$

因此 $a = -1, b = -\dfrac{1}{2}, k = -\dfrac{1}{3}$.

【解法二】 用洛必达法则(为简化计算注意某些技巧).

$$I = \lim_{x \to 0}\frac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = \lim_{x \to 0}\frac{1 + \frac{a}{1+x} + b\sin x + bx\cos x}{3kx^2}$$

由分子的极限必须为零(否则该极限 I 为 $\infty$)得 $a = -1$.代入得

$$I = \lim_{x \to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x} + b\sin x + bx\cos x}{3kx^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx}{3kx^2}+\lim_{x\to 0}\frac{bx(\cos x-1)}{3kx^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+b\cos x+b}{6kx}+0$$

再由分子极限必须为零得 $b=-\frac{1}{2}$,代入得

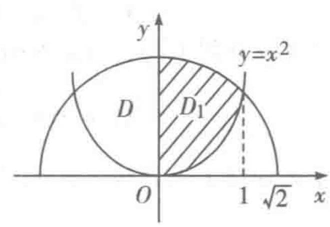
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{2}(\cos x+1)}{6kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\frac{1}{2}\sin x}{6k}=-\frac{1}{3k}=1$$

$\Rightarrow\ k=-\frac{1}{3}$.

因此 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$.

---

(16)【解】 积分区域 $D$ 如图所示.曲线 $y=x^2$ 与 $x^2+y^2=2$ 的交点为 $(-1,1),(1,1)$.区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称,$xy$ 关于 $x$ 是奇函数.




故
$$I=\iint_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint_{D_1}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}$$

其中
$$\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\cdot\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}2t$$
$$\xlongequal{u=2t}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

所以 $I=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.

**评注** 由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$,故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

---

(17)(Ⅰ)【证】 收益函数 $R(Q)=pQ$,成本函数为 $C(Q)$.

利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$,边际收益 $MR$,边际成本 $MC$.

利润最大时,有 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=MR-MC=0$.

需求弹性 $\eta=-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$,故 $\frac{Q}{Q'}=-\frac{p}{\eta}$

由于
$$MC=MR=R'(Q)=\frac{\mathrm{d}(pQ)}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=(Q+pQ')\cdot\frac{1}{Q'}=\frac{Q}{Q'}+p$$
$$=-\frac{p}{\eta}+p=p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$$

从而 $p = \dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$.

（Ⅱ） $C(Q) = 1600 + Q^2, MC = C'(Q) = 2Q, Q = 40 - p$

$$|\eta| = \left|\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}\right| = \frac{p}{40-p}$$

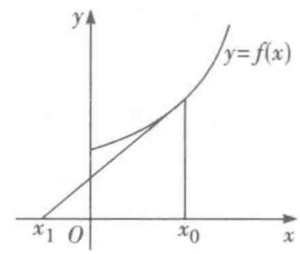
将 $\eta, MC$ 代入（Ⅰ）中，有

$$p = \frac{2(40-p)}{1-\dfrac{40-p}{p}},$$

解之，得 $p = 30$.

(18)【分析与求解】 这是微分方程的应用题，由导数的几何意义列出微分方程，然后求解.

由条件知，在含 $x = 0$ 的某区间 Ⅰ 上，曲线 $y = f(x) > 0, f'(x) > 0$，曲线上任意点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线 $L$ 的方程是




$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $y = 0$ 得 $L$ 与 $x$ 轴交点的 $x$ 坐标 $x_1$,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

于是切线 $L$ 与直线 $x = x_0$ 及 $x$ 轴所围成区域（直角三角形）的面积

$$S = \frac{1}{2}f(x_0)(x_0 - x_1) = \frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}$$

按题意得 $\dfrac{1}{2}\dfrac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4$

将 $x_0$ 改为 $x$，$f(x)$ 记为 $y(x)$，于是得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{8}y^2$.

分离变量得 $\dfrac{8dy}{y^2} = dx$，积分得

$$\frac{8}{y} = c - x, \quad y = \frac{8}{c-x}.$$

再由初值 $y(0) = 2 \Rightarrow c = 4$. 因此求得 $f(x)$ 表达式

$$f(x) = \frac{8}{4-x}.$$

(19)【分析与求解】

$$\begin{aligned}
(\text{Ⅰ})[u(x)v(x)]' &\xlongequal[\text{导数定义}]{} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\
&\xlongequal[\text{同一项}]{\text{加减}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} \\
&\xlongequal[\text{运算法则}]{\text{求极限四则}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x) \\
&\qquad + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
&\xlongequal[\text{可导}]{u(x),v(x)} u'(x)v(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

其中因可导必连续，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x) = v(x)$.

（Ⅱ）反复用两个函数乘积的求导公式：

$$\begin{aligned}&[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'\\&=[u_1(x)(u_2(x)\cdots u_n(x))]'\\&=u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)(u_2(x)\cdots u_n(x))'\\&=u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2(x)(u_3(x)\cdots u_n(x))'\\&=u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2(x)u'_3(x)\cdots u_n(x)+\cdots\\&\quad+u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x).\end{aligned}$$

---

(20)【解】（Ⅰ）因为$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值$\boldsymbol{\lambda}$都满足$\boldsymbol{\lambda}^3=0$，因此$\boldsymbol{A}$的特征值全为0，于是$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$，即$3a=0$，得$a=0$.

（Ⅱ）化简等式$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$.

得$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}$.

又由$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，得

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E},$$

于是$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2)$，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$，代入上式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2\\&=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\2&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

**评注** （Ⅰ）也可从$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$推出$|\boldsymbol{A}|=0$，求出$|\boldsymbol{A}|=a^3$，得到$a=0$. $|\boldsymbol{A}|=0$是$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$的必要条件，不是充分条件．如果本题条件中将$\boldsymbol{A}$的对角线元素改为$a,0,a$（其他条件不变），用$|\boldsymbol{A}|=0$就不能求得$a=0$了．

（Ⅱ）也可用初等变换法求出$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$和$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}$再相乘，计算量大些．

---

(21)【解】（Ⅰ）因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似，所以$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，并且$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，得

$$\begin{cases}3+a=2+b,\\2a-3=b,\end{cases}$$

解得$a=4,b=5$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$，$\boldsymbol{B}$的特征值为1,1,5．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{A}$的特征值也是1,1,5.

求$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的特征向量：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$和$x_1-2x_2+3x_3=0$同解，求得两个无关的特征向量$(2,1,0)^{\mathrm{T}}$和$(3,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

求$\boldsymbol{A}$的属于特征值5的特征向量：

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-5&2&-3\\-1&-2&-3\\1&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 和$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$同解，

求得一个特征向量$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix},\text{则 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

(22)【解】 设单次试验 $X>3$ 的概率为 $p$,则

$$p=\boldsymbol{P}\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln2\mathrm{d}x=-2^{-X}\Big|_3^{+\infty}=\frac{1}{8}$$

$$q=1-p=\frac{7}{8}.$$

(Ⅰ)$Y$ 的概率分布为

$$\boldsymbol{P}\{Y=k\}=\mathrm{C}_{k-1}^1p^2q^{k-2}=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$
$$=\frac{k-1}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},k=2,3,\cdots.$$

(Ⅱ) $$\boldsymbol{E}Y=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{1}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}$$
$$=\frac{1}{64}(\sum_{k=2}^{\infty}q^k)''=\frac{1}{64}(\sum_{k=0}^{\infty}q^k)''$$
$$=\frac{1}{64}\left(\frac{1}{1-q}\right)''=\frac{1}{64}\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{p^3}=16.$$

(23)(Ⅰ) $$\boldsymbol{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_\theta^1x\cdot\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_\theta^1=\frac{1+\theta}{2}$$

又 $\boldsymbol{E}X=\overline{X}$

故$\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\overline{X},\hat{\theta}=2\overline{X}-1=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$.

(Ⅱ)对于总体 $X$ 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n},\theta\leqslant x_i\leqslant1$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0,\theta x_i\leqslant1.$$

由于 $L(\theta)$ 是 $\theta$ 的单调增函数,因此 $\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,最大似然估计量 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.