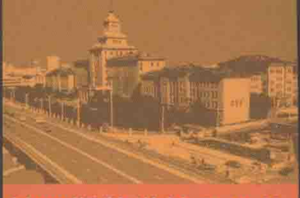


俄罗斯数学精品译丛

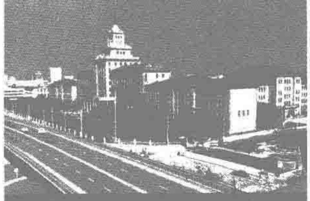
"十二五"国家重点图书

Geometric Transformations (IV)

几何变换(IV)

[苏] 雅格洛姆 著　郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

几何变换（IV）

Geometric Transformations (IV)

[苏] 雅格洛姆 著

郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08-2015-001 号

内容简介

本书研究了反演变换及其性质、圆与反演变换、两圆的互反性等几何知识，系统地阐述了这些几何变换的理论和它们在几何证题方面的应用.

本书写得简明扼要，通俗易懂，引人入胜，是中学生、大学低年级学生以及他们的教师和几何爱好者的一本很好的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何变换.4/(苏)雅格洛姆著；郑元禄译.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.12

书名原文：Geometric Transformations

ISBN 978-7-5603-5477-4

Ⅰ.①几… Ⅱ.①雅… ②郑… Ⅲ.①平面几何—研究Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 232634 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘家琳　李宏艳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 15.5　字数 310 千字
版　　次　2015 年 12 月第 1 版　2015 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5477-4
定　　价　38.00 元

◎ 作者简介

雅格洛姆(Яглом),1921 年出生于苏联哈尔科夫市,1942 年毕业于斯维尔德洛夫大学,1945 年获得副博士学位.他早年曾在莫斯科大学、奥彼克霍夫基辅教育学院等校任教,1957～1968 年任莫斯科国立教育学院的几何学教授.1968 年以后,他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教.

他对苏联的数学教学具有相当大的影响.他还发表了许多科学论著,其中有不少被译成英文,如 *Complex Numbers in Geometry*,*Conves Figures*,等等.

◎目录

在圆上的反射(反演)

第1章

为了用在直线 l 上的反射作出点 A 的像 A'，通常采用如下方法：

作两个圆心在 l 上且通过点 A 的圆. 所要求的点 A' 是这两个圆的第 2 个交点(图 1.1). 我们说 A' 与 A 关于 l 对称.

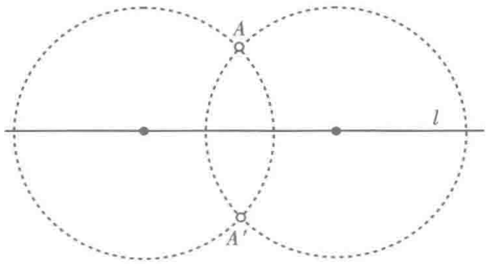


图 1.1

这里我们利用一个事实：所有圆心在直线 l 上且通过点 A 的圆，也通过与 A 关于 l 对称的点 A'(图 1.2). 这一事实可以作为在直线上反射的定义：如果圆心在 l 上且通过 A 的每个圆也通过 A'，则称点 A 与 A' 关于直线 l 对称. 显然，这个定义等价于《几何变换 I》第 19 页中的定义.

在本章中我们研究在圆上的反射. 这个变换在许多方面类似于在直线上的反射，它经常被用来解几何问题.

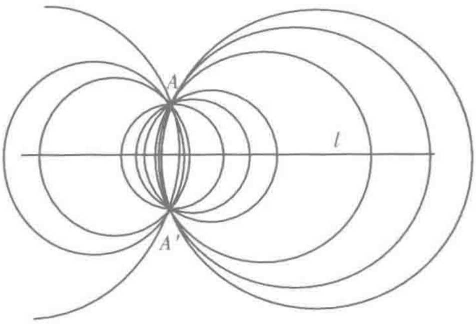


图 1.2

我们的起点是刚才给出的在直线上反射的定义. 把这个定义稍微改变.

在本书中,我们将经常提到两个圆之间的角或圆与直线之间的角. 作两个圆在它们交点处的切线. 自然称这两条切线间的角为这两圆之间在这点处的角(图 1.3(a)). 这个定义蕴涵两圆间的角等于在切点处两条半径间的角(或者邻角;两圆间的角以及两条直线间的角,不是唯一确定的,可以说等于 α 或 $180°-\alpha$). 类似地,如果直线 l 与圆 S 相交于一点,那么我们说直线与圆在这点处的切线之间的角是直线与圆之间的角(图 1.3(b)).[1]

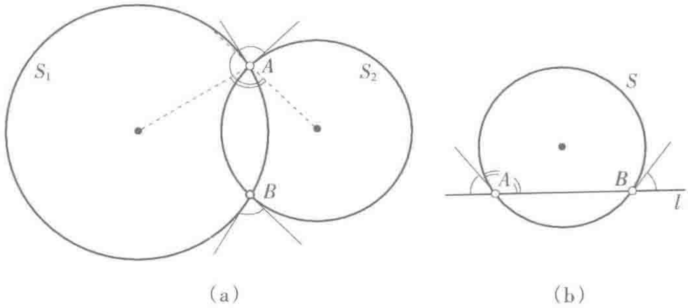


图 1.3

圆心在直线 l 上的诸圆(并且只有这些圆)垂直于 l(图 1.4). 这说明以下关于在直线上反射的定义是正确的:

如果通过点 A 且垂直于直线 l 的每个圆也通过点 A',那么 A 与 A' 关于 l 对称.

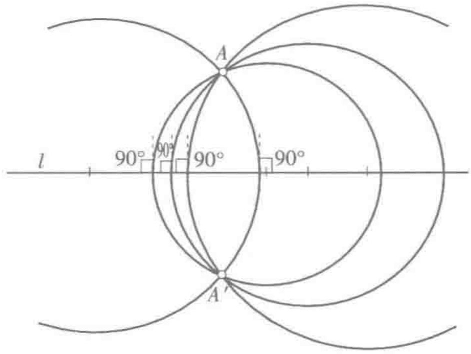


图 1.4

我们现在来证明以下定理.

定理 1 所有通过点 A 且垂直于已知圆 Σ(不通过 A)的诸圆也通过不同于 A 的点 A'.

证 令 S 是通过 A 且垂直于圆 Σ 的圆(图 1.5). 通过点 A 作一直线与圆 Σ 的圆心相交,联结点 O 与圆 Σ 和 S 的交点 B. 因为圆 S 垂直于 Σ,所以 OB 是圆 S 的切线. 令 A'是直线 OA 与圆 S 的第 2 个交点. 由于圆切线众所周知的性质,我们有

$$OA \cdot OA' = OB^2$$

或

$$OA' = \frac{R^2}{OA}$$

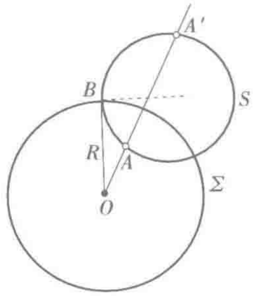


图 1.5

其中 R 是圆 Σ 的半径. 这证明了 OA 与圆 S 的交点 A'不依赖于圆 S 的选择. 因此垂直于 Σ 且通过 A 的所有圆 S 与直线 OA 相交于同一点 A'(图 1.6),这就是我们所要证明的.

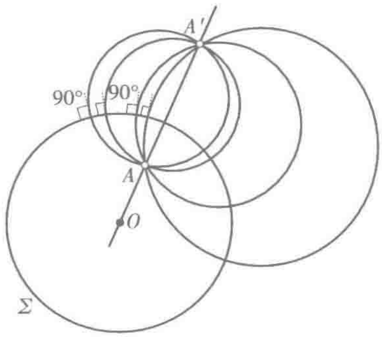


图 1.6

现在可以看出以下定义：

如果通过 A 且垂直于圆 Σ 的每个圆也通过 A'，点 A 称为关于圆 Σ 对称于点 A'.[2] 显然，如果 A'关于圆 Σ 对称于 A，那么 A 关于圆 Σ 对称于 A'. 这容许我们说点关于圆相互对称的内容. 图形 F 的诸点关于圆 Σ 对称的全部点构成一个关于圆 Σ 对称于 F 的圆形 F'（图 1.7）. 如果 A'关于圆 Σ 对称于 A，那么我们也说 A'是从 A 在圆 Σ 上反射得出的.

把在直线上的反射看作在圆上的反射的极限情形是合理的. 因为我们可以把直线看作是“无限大半径的圆”. 以后将看出，把直线包含在圆类将简化许多关于圆上反射的论证.

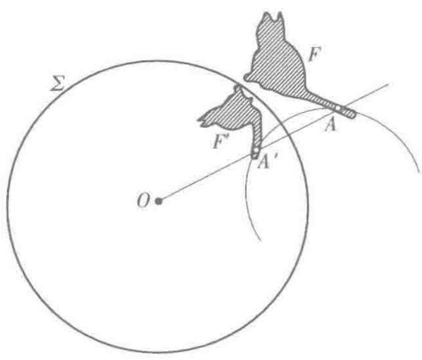


图 1.7

在圆上的反射也称为反演. 所以从圆上反射得出的圆称为反演圆，它的圆心称为反演中心，它的半径的平方，即 $k=R^2$ 称为反演幂. 术语“反演”与“在圆上的反射”相比，似乎不大直观，但是由于它简短，因此被普及. 以后我们按惯例采用这个术语.

显然，反演也可以定义为：含反演幂 k 与中心 O 的反演是使平面上的点 A 变为射线 OA 上的点 A'的映射（变换），即

$$OA'=\frac{k}{OA} \tag{*}$$

(图 1.8(a)).[3] 显然这个定义等价于以前给出的定义(见定理 1 的证明). 虽然这个定义比以前的定义缺少几何直观性,但是这个定义有简单的优点.[4]

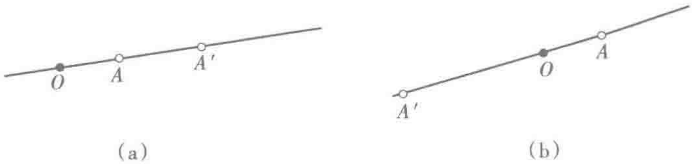


图 1.8

通常研究这样的变换比较方便,它把点 A 变为 A',使 A 与 A'和定点 O 共线,且在 O 的任一侧,即 $OA'=k/OA$(图 1.8(b)). 我们称这种变换为含中心 O 与负幂 $-k$ 的反演.[5] 显然,含中心 O 与负幂 $-k$ 的反演等价于含中心 O 与正幂 k 的反演(在圆心 O,半径为$\sqrt{k}$的圆上的反射),其后再用在 O 上的反射.

含负幂的反演在几何上可以用类似于含正幂反演的第一定义(在圆上的反射)的方式定义. 关于这一点以下定理起了主要的作用.

定理 1′ 通过已知点 A 且与已知圆相交于两个对径点的所有圆也通过不同于 A 的点 A'.

事实上,令 B_1 与 B_2 是圆 Σ 的直径的两端点,通过已知点 A 的圆 S 与 Σ 相交于这两点(图 1.9(a)). 通过 A 与圆 Σ 的圆心作一直线,以 A'表示与圆 S 的第 2 个交点. 令 MN 是圆 S 通过 O 的直径. 因为圆 S 的圆心到 B_1 与 B_2 的距离相等,O 是线段 B_1B_2 的中点,所以由此推出 $MN\perp B_1B_2$. 这蕴涵 OB_1 是 $\mathrm{Rt}\triangle MB_1N$的高. 由众所周知的定理知 $OB_1^2=MO\cdot ON$. 另一方面,由圆中弦的性质,$MO\cdot ON=A'O\cdot OA$. 因此

$$A'O\cdot OA=OB_1^2$$

即

$$A'O=\frac{R^2}{OA} \tag{**}$$

其中 R 是圆 Σ 的半径. 这蕴涵 $A'O$ 与圆 O 的选择无关. 因此通过 A 且与圆 Σ 相交于对径点的所有圆通过同一点 A'.

关系式(**)证明了,如果通过点 A 且与圆心为 O,半径为 R 的圆 Σ 相交于对径点的每一圆,那么 A'可以从 A 用含负幂 $-R^2$ 与中心 O 的反演得出.

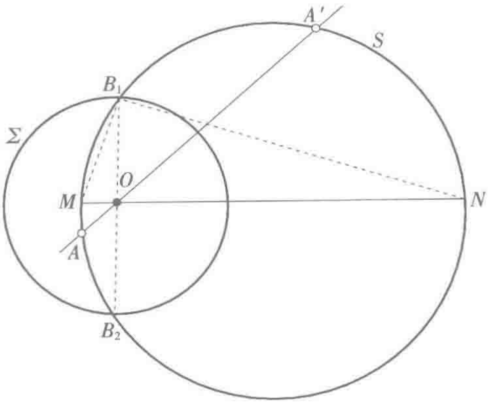
我们现在列出反演的一些基本性质.

A. 在含中心 O 与幂 k 的反演下,圆心为 O,半径为 $\sqrt{|k|}$ 的圆 Σ(如果 k 是正的,那么圆 Σ 是反演圆)变为它本身,它内部的点(除圆心外)变为它外部的

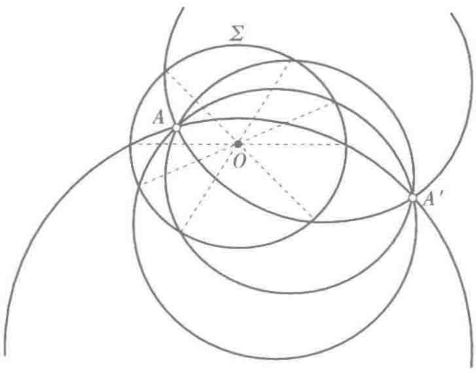
点，反之亦然.

反演中心 O 只是平面上一点，不会变为平面上的任一点(也不是平面上任一点的像).

反演性质 A，即从基本公式(*)推出：如果 $OA=\sqrt{|k|}$(点 A 在反演圆 Σ 上)，那么 $OA'=|k/OA|=\sqrt{|k|}$，即 A' 还在圆 Σ 上；如果 $OA<\sqrt{|k|}$(点 A 在反演圆 Σ 的内部)，那么 $OA'=|k/OA|>\sqrt{|k|}$，即 A' 在圆 Σ 的外部；如果 $OA>\sqrt{|k|}$，那么 $OA'=|k/OA|<\sqrt{|k|}$.



(a)



(b)

图 1.9

我们注意到，如果反演幂是正的(反演是在圆 Σ 上的反射)，那么圆 Σ 的每一点变为它本身(是固定的反演点)；如果反演幂是负的，那么圆 Σ 的每一点变为圆 Σ 的对径点(含负幂的反演没有固定点).

B_1. 反演把通过反演中心 O 的直线 l 变为它本身.

这个论断的证明是以下事实的直接推论：

点 A 在反演下的像 A'在直线 OA 上.

B_2. 反演把不通过反演中心 O 的直线 l 变为通过 O 的一圆.

令 P 是 l 与从 O 到 l 垂线的交点，令 P'是它在反演下的像(图 1.10(a)，它描述了含正幂的反演的情形；如果反演幂是负的，那么证明实际上是一样的). 反演的第 2 个定义蕴涵

$$OP'=\frac{k}{OP}$$

其中 k 是反演幂. 令 A 是 l 上的点，令 A'是它在反演下的像，则

$$OP \cdot OP'=OA \cdot OA'=k$$

从而

$$\frac{OP}{OA}=\frac{OA'}{OP'}$$

此式蕴涵$\triangle OPA \backsim \triangle OA'P'$(因为它共用一角，并且两个三角形对应边的比相等). 因此$\angle OA'P'=\angle OPA=90°$，即 A'在以线段 OP'为直径的圆 S 上.

B_3. 反演把通过反演中心 O 的圆 S 变为不通过 O 的直线 l.

令 P 是通过反演中心 O 的圆 S 的直径的第 2 个端点，令 P'是它在这一反演下的像. 令 A 是含像 A'的圆 S 上的点(图 1.10(b)). 同前，我们来证明$\triangle OP'A' \backsim \triangle OAP$(因为 $OP \cdot OP'=OA \cdot OA'=k$)，所以$\angle OP'A'=\angle OAP=90°$，即 A'在通过 P'垂直于 OP 的直线上.

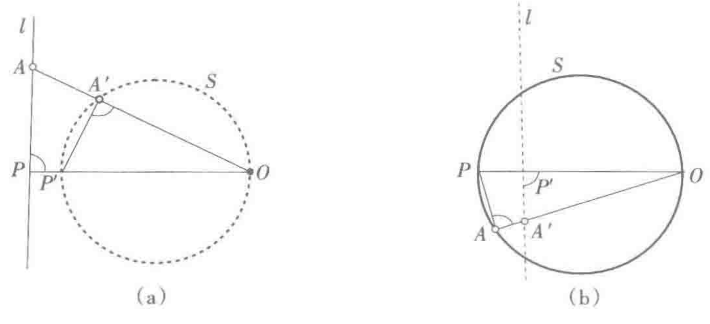


图 1.10

B_4. 反演把不通过反演中心 O 的圆 S 变为不通过 O 的圆 S'.

令 A 是在这一反演下含像 A'的圆 S 上一点，令 A_1 是直线 OA 与 S 的第 2 个交点(图 1.11(a)与 1.11(b)). 我们有

$$OA'=\frac{k}{OA}$$

其中 k 是反演幂. 另一方面,由众所周知的圆的性质

$$OA \cdot OA_1 = k_1, \quad OA = \frac{k_1}{OA_1}$$

其中 k_1 与 A 无关(如果 O 是 S 的外部,那么 k_1 是从 O 到 S 的切线长的平方). 最后两个公式蕴涵

$$OA' = \frac{k}{k_1} \cdot OA_1$$

即 A' 是在含中心 O 与相似比 k/k_1 的相似下,中心相似于 A_1,因此在圆 S 上,即在这个相似下中心相似于 S.[6] 这就证明了我们的论断.

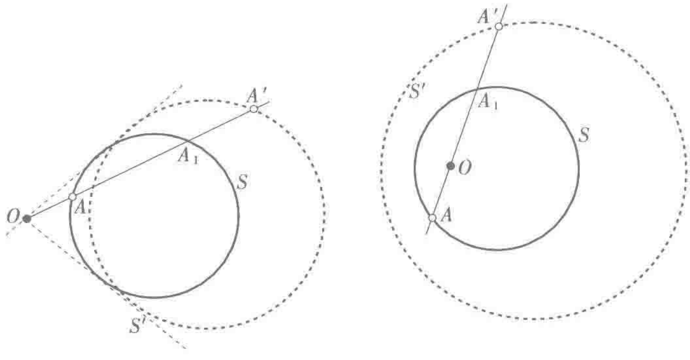


图 1.11

注意到我们的反演不能把圆 S 的圆心变换为圆 S' 的圆心.

我们给出反演性质 B_4 的另一个证明,它较接近于性质 B_2 与 B_3 的证明.

令 Q 是圆 S 的圆心,M 与 N 是圆 S 与直线 OQ 的交点(O 是反演中心),A 是圆 S 上任一点,M',N',A' 是 M,N,A 在反演下的像(图 1.12). 正如证明性质 B_2 与 B_3 一样,我们来证明 $\angle OAM = \angle OM'A'$ 与 $\angle OAN = \angle ON'A'$. 显然,$\angle MAN = \angle OAN - \angle OAM$ 与 $\angle M'A'N' = \angle ON'A' - \angle OM'A'$. 因此

$$\angle M'A'N' = \angle MAN = 90^\circ$$

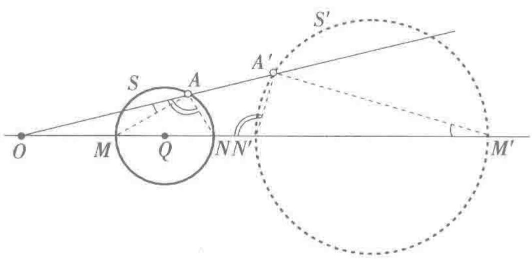


图 1.12

这表示 A'在直径为 $M'N'$的圆 S'上.

以下命题把反演性质 B_1 与 B_4 合并起来.

B. 反演把圆或直线变为圆或直线.

我们提出性质 B_3 的以下推论:已知一圆,常有一个反演把它变为一条直线. 事实上,我们需要选取它的任一点作为反演中心.

容易看出,常有一个反演把两个圆之一变为另一圆. 如果已知圆不全等,那么有两种方法取这些圆内、外相似中心作为各自的反演中心(见性质 B_4 的证明). 如果两圆全等,那么只有一个反演把其中一个圆变为另一个圆(两全等圆只有一个相似中心;见《几何变换Ⅱ》一书第 5 页). 但是在那种情况下,两圆可以用在它们对称轴上的反射来互相变换,这种反射可以看作反演的极限情形.

类似地,有两种反演把不相切的圆与直线互相变换. 两种反演的中心是垂直于此直线的圆直径的两端点(见性质 B_2 与 B_3 的证明). 如果一圆与一直线彼此相切,那么只有一种反演把两者互相变换.

两直线不能用反演互相变换,但能用在直线上的反射互相交换. 如果两直线不平行,那么有两种这样的反射(它们的轴是两直线夹角的两条垂直平分线),如果两直线平行,那么它们只有一种这样的反射.

C. 反演保持两圆之间的角(或圆与直线之间的角,或两直线间的角).

假设两圆形之一在通过反演中心的一直线上. 如果第 2 个图形也是一直线,那么为了证明,研究图 1.13(a),其中 Q 是圆 S 的圆心,S 是第 2 条直线 l 的像,$A'T$ 是圆 S 在 A'上的切线. 显然

$$\angle TA'O=90^\circ-\angle OA'Q=90^\circ-\angle A'OQ=\angle PAO$$

(见反演性质 B_2 与 B_3 的证明). 如果第 2 个图形是一圆,那么为了证明,研究图 1.13(b),其中 Q 与 Q'分别是圆 S 与圆 S'的圆心,AT 是圆 S 在 A 上的切线,$A'T'$是圆 S'在 A'上的切线. 显然

$$\angle Q'A'O=\angle QA_1O=\angle QAA_1$$

$$\angle TAA_1=90^\circ-\angle QAA_1=90^\circ-\angle QA_1A=90^\circ-\angle Q'A'O=\angle T'A'O$$

(见反演性质 B_4 的证明).

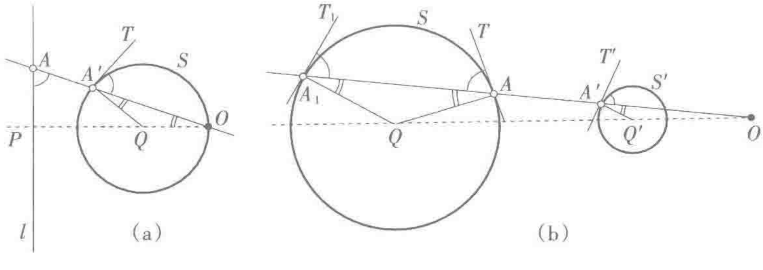


图 1.13

现在研究两个相交于点 A 的圆 S_1 与圆 S_2 的情形. 令它们在反演下的像是相交于点 A'的圆 S_1'与圆 S_2'. 令 AT_1 与 AT_2 是 S_1 与 S_2 在 A 上的切线,令 $A'T_1'$与$A'T_2'$是 S_1'与 S_2'在 A'上的切线(图 1.14). 由此容易推出

$$\angle T_1'A'O=\angle T_1AO \text{ 与 } \angle T_2'A'O=\angle T_2AO$$

但是

$$\angle T_1'A'T_2'=\angle T_1AT_2$$

这就是所要证明的.

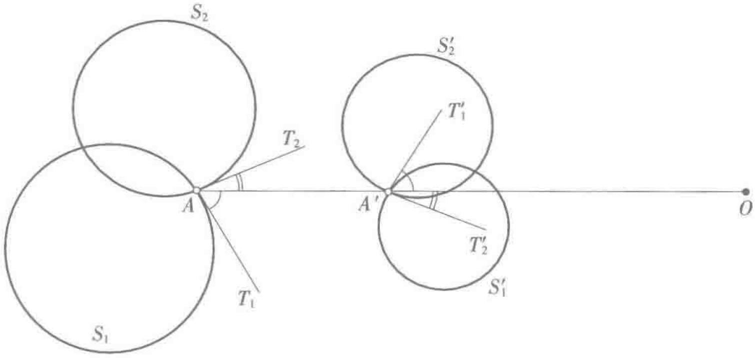


图 1.14

两相切圆(或一直线与一圆)之间的角等于零. 如果切点不是反演中心,那么性质 C 蕴涵两相切圆与一直线切一个圆在反演下的像分别是两相切圆与一直线切一个圆. 如果切点是反演中心,那么所讨论的每个像是一对平行线(图 1.15).

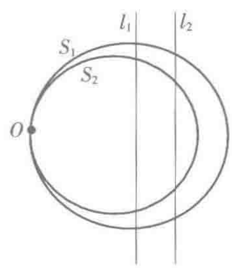


图 1.15

反演使两圆间(或两直线间或直线与圆间)的角的方向相反(在这一点上它类似于在直线上的反射). 特别地,令 S_1 与 S_2 是相交于点 A 的两圆. 令这两圆在 A 上相应的切线是AT_1 与 AT_2,令 AT_1 在绕 A 逆时针方向旋转α 角后变为 AT_2,则这个图形在反演下的像是由相交于点 A'的圆 S_1'与圆 S_2'组成,圆 S_1'在 A'上的切线 $A'T_1'$在绕 A'顺时针方向旋转α 角后变为圆 S_2'在 A'上的切线

$A'T_2'$(图 1.16(a)与 1.16(b)).

所谓曲线 γ 在点 M 上的切线指的是割线 MM_1 在 M_1 趋向 M 时的极限位置(图 1.17(a)).所谓相交于某一点的两曲线间的角指的是它们在这一点上两切线间的角(图 1.17(b)).容易证明,反演使两相交曲线变成新的两相交曲线,使新的两相交曲线间的角和原来两相交曲线间的角相同(换言之,反演保持两曲线间的角).[7]

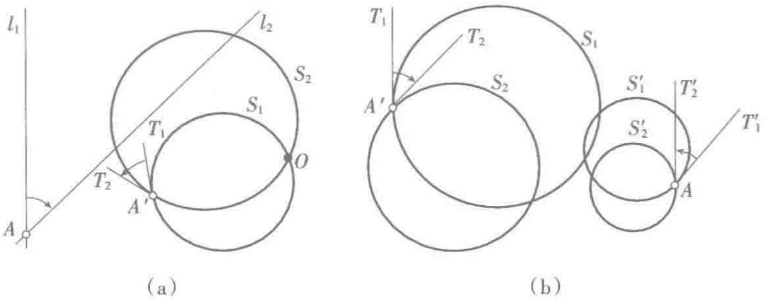


图 1.16

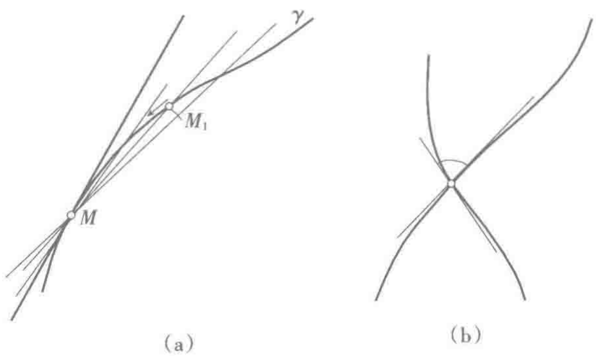


图 1.17

事实上,令 γ 是一条曲线,γ'是它在中心 O 与幂 k 的反演下的像.令 M 与 M_1 是 γ 上靠近的两点,在 γ'上分别有像 M'与 M_1'(图 1.18(a)).因为 $OM_1'/OM'=OM/OM_1$(这个等式由 $OM\cdot OM'=OM_1\cdot OM_1'=k$ 推出),所以$\triangle OMM_1\backsim\triangle OM_1'M'$.因此$\angle M_1MO=\angle M'M_1'O$.如果 M_1 趋向于 M,那么$\angle OMM_1$ 趋向由 γ 在 M 上的切线 MT 与直线 OM 所成的$\angle OMT$,$\angle OM_1'M'$趋向于由 γ'在 M'上的切线 $M'T'$与直线 OM'所成的$\angle OM'T'$.正如我们在证明性质 C 所做的讨论,从切线 MT 与 $M'T'$ 所成的角等于 γ 与 γ' 和直线 OMM' 所成的角(图 1.18(a))推出,反演保持两曲线间的角(图 1.18(b)).

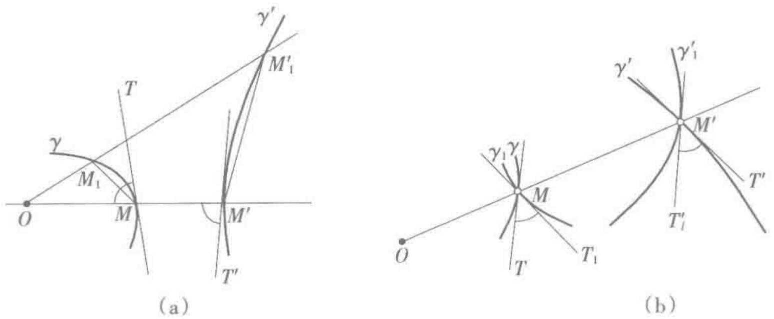


图 1.18

我们指出，反演（在圆上的反射）的性质 B 与 C 对在直线上的反射成立. 在圆上反射的性质 A 类似于以下在直线上的反射性质：在直线上的反射保持 l 固定并交换平面被 l 分成的两半平面.

以下问题的解答依据反演性质 A，B 与 C. 关于对特殊问题所需要的改进见第 23 页.

习　题

1. 令 S 是一个和两圆 S_1 和 S_2 相切的圆. 证明：联结切点的直线通过两圆的相似中心.

这个问题也出现在其他书中，如《几何变换Ⅱ》中的问题 21.

2. 令 A 与 B 是圆 S 上两已知点. 研究分别和 S 相切于 A 与 B 的所有各对圆 S_1 与 S_2，并且：

(a)彼此相切；(b)互相垂直.

在(a)中求切点的轨迹，在(b)中求 S_1 与 S_2 交点的轨迹.

3. 令 A,B,C,D 是既不共线又不共圆的 4 点. 证明：$\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的外接圆间的角等于 $\triangle CDA$ 与 $\triangle CDB$ 的外接圆间的角.

4. 令 S_1,S_2 与 S 是含共线直径 AM,MB 与 AB 的半圆（图 1.19）. 在 M 上作直线 AB 的垂线 MD，并在曲线$\triangle ADM$ 与$\triangle BDM$ 内作内切圆 Σ_1 与 Σ_2. 证明：

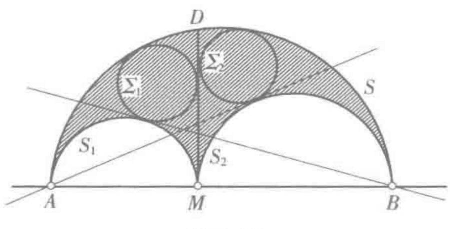


图 1.19

(a)Σ_1 与 Σ_2 全等；