李成章教练奥数笔记

第1卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第1卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第一卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿．书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法．

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读．

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记．第1卷/李成章著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5566-5

Ⅰ．①李…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①数学-竞赛题-题解　Ⅳ．①O1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第191113号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451—86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张17.25　字数191千字
版　　次　2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5566-5
定　　价　48.00元

◎ 目录

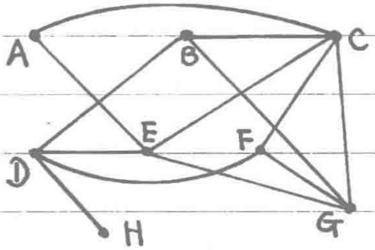
一 图论

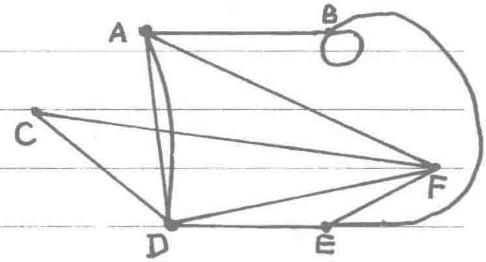
图　由某些点和它们之间的一些连线构成的图形称为图．图中的点称为顶点，连线称之为边．图中顶点代表某类研究对象而边表示研究对象之间的某种特定的联系．

子图　由图G中的一些顶点和边组成的图形称为图G的子图．

简单图　任何两点之间至多有1条边且不存在某点与自己有连线的图称为简单图．

完全图　每两点之间都恰有1条连线的简单图称为完全图．





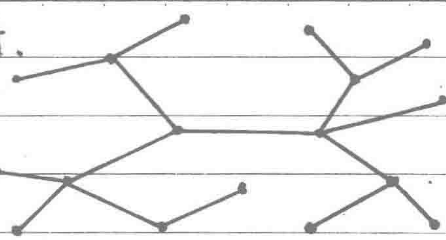
阶　图中顶点的个数称为图的阶．共有n个顶点的完全图称为n阶完全图，记为K_n．

度　图中顶点A引出的边的条数称为A的度，记为$d(A)$．度数为奇(偶)数的顶点称为奇(偶)顶点．所有顶点皆为偶顶点的图称为偶图．

链和圈　由图中某顶点出发，沿着一条边走到另一个顶点，再从第2个顶点出发沿着另一条边走到第3个顶点．这样走下去，一直走到某顶点为止．这样的顶点，边，顶点，边，…，顶点，边，顶点的一个序列称为一条链．如果始点与终点重合，则称为闭链．在数学奥林匹克中简称为圈．

连通图　任何两个顶点之间都有链相连的图称为连通图.

树　没有圈的连通图称为树.



有向图　每条边都标上一个箭头的图称为有向图.

染色图　每条边都涂有k种颜色之一的图称为k染色图.

定理1　设$n\geq3$. 若在n阶图中至少有n条边，则图中必有圈.

定理2　偶图G必可分解为若干个圈，使得每两个圈都没有公共边.

推论　每点度数皆为2的偶图必可分解为若干个圈，使得每两个圈都没有公共顶点.

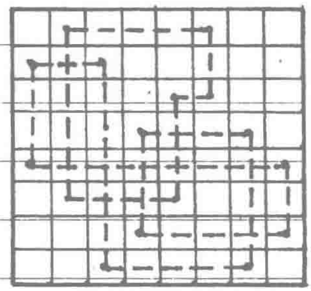
定理3　n阶树中恰有$n-1$条边.

证　由定理1知，n阶树的边数$\leq n-1$.

另一方面，2阶树恰有1条边. 设$n=k$时，k阶树恰有$k-1$条边. 于是当$n=k+1$时，$k+1$阶树中至少有k条边. 从而必有某顶点A是1度的. 去掉点A，图中只损失1条边且余下部分仍是树且阶数为k. 由归纳假设知这个k阶树边数为$k-1$. 所以原图中恰有k条边.

例1 在8×8的国际象棋棋盘上指定16个方格，使得每行每列都恰有两个指定方格．求证总可以将黑白棋子各8枚分别放入16个指定方格中，使得每行每列都恰有黑白棋子各1枚．

证 取16个指定方格的中心点代表该方格．将同行或同列的两点之间都各连1条线，于是得到一个每点度数皆为2的16阶的偶图．由定理2的推论知，这个图必可分解为若干个互不相交的圈．



对于图中的每个圈，由于其上每个顶点所引出的两条边都是一横一竖，所以圈上的边必为横竖相间，从而边数为偶数．圈上的顶点数也为偶数．

只要对每个圈上的顶点都相间地放置黑子和白子，便可满足题中的要求．实际上，由于每行每列的两个顶点都是某圈上的相邻顶点，两点所放置的棋子当然是黑子与白子各1枚．

○2. 设$n\ge 3$. n名乒乓球选手单打比赛若干场之后，任何两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同. 求证总可以从中去掉一名选手，使在余下的选手中，任何两名选手已赛过的对手仍然都不完全相同. （1987年全国联赛二试3题）

证 用n个点$A_1, A_2, \cdots, A_n$来代表n名选手. 若结论不成立，则当去掉A_i（$1\le i\le n$）时，总有另两名选手已赛过的对手除A_i外完全相同. 这时，我们就在代表这两名选手的两点之间连一条线段. 当将$A_1, A_2, \cdots, A_n$依次处理之后，就得到一个有n条边的n阶图. 由定理1知图中必有圈，不妨设为 显然，这n条边是互不相同的. 反证法

$$A_{i_1} l_1 A_{i_2} l_2 \cdots A_{i_{m-1}} l_{m-1} A_{i_m} l_m A_{i_1}$$

或简单地记为 圈的存在定理

$$A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{m-1}} A_{i_m} A_{i_1}.$$

设A_{i_1}与A_{i_2}之间的连线是在去掉A_1时导致的. 由于去掉A_1前A_{i_1}与A_{i_2}已赛过的对手不完全相同而去掉A_1之后两人已赛过的对手完全相同，所以两人原来的不同只能是一人与A_1赛过而另一人未与A_1赛过. 不妨设A_{i_1}与A_1赛过而A_{i_2}未与A_1赛过.

因为画图过程是每去掉一点A_i时只连1条线，故可类似地导出A_{i_2}与A_2赛过而A_{i_3}未与A_2赛过，且除A_2之外，两人已赛过的对手完全相同. 这样一来，由于A_{i_2}未与A_1赛过，故知A_{i_3}也未与A_1赛过. 同理可依次导出，$A_{i_4}, A_{i_5}, \cdots, A_{i_m}$均未与$A_1$赛过，且最后导出，$A_{i_1}$未与$A_1$赛过，矛盾.

这就完成了反证的证明.

3. 在一个凸多边形中作出所有对角线，并将每条边和每条对角线都涂上k种颜色之一，使得不存在以多边形顶点为顶点的单色封闭折线. 求这样的多边形的边数的最大值.（1990年全苏）

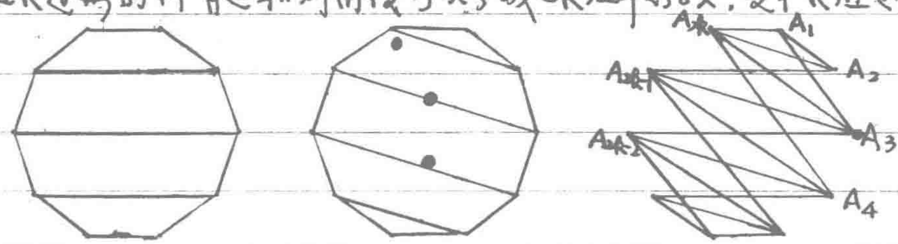
解 设凸多边形的边数为n. 于是边与对角线的总数为C_n^2. 若有某色线段的条数$\geq n$，则由定理1知这种颜色的线段必能构成一条单色封闭折线，此与题中要求矛盾. 故知每种颜色的线段条数都不超过$n-1$. 从而有

$\boxed{\text{图论的存在定理+换序求和}}$

$$\frac{1}{2}n(n-1)=C_n^2\leq k(n-1).$$

由此解得$n\leq 2k$，即满足要求的多边形至多有$2k$条边.

下面用$\boxed{\text{构造法}}$证明，当$n=2k$时，满足要求的染色法存在. 注意正$2k$边形的所有边和对角线可以分成$2k$组平行线，其中k组如左图



所示，另k组如中图所示. 将上面左中两图所示的两组线段染上同一种颜色，便得到一条不封闭的单色折线$A_1A_{2k}A_2A_{2k-1}A_3\cdots A_kA_{k+1}$. 轮换$k$次即得$k$条互不同色的单色折线，其中当然没有单色封闭折线.

综上可知，所求的多边形的边数的最大值为$2k$.

°4. $n(\geq 6)$个人参加一次聚会，已知

(i) 每个人至少同其中$\left[\frac{n}{2}\right]$个人互相认识；

(ii) 对于其中任何$\left[\frac{n}{2}\right]$个人，或者其中有2人互相认识，或者在余下的人中有2人互相认识.

求证这n个人中必有3人互相都认识. (1996年全国联赛二试4题)

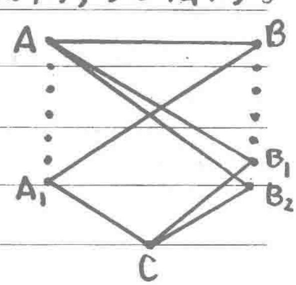
证 用n个点代表n个人并在每相互认识的两人所对应的两点之间连一条线段，于是得到一个n阶图. 问题化为证明图中必有三角形.

若不然，则图中没有三角形. 任取图中一条边AB. 于是顶点A和B的度数都不小于$\left[\frac{n}{2}\right]$且其余任何一点都不能同时有边与A、B相连.

(1) 设n为偶数. 于是n个人恰好均分成两组. 一组中的点都与A有边相连而除B之外与B无边相连，另一组中的点都与B有边相连而除A之外与A无边相连. 从而每组内的任何两点间都不能有边相连，此与已知条件(ii)矛盾.

$\boxed{\text{图论模型}}$

(2) 设n为奇数，于是$n=2\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 若$n$个人中的每个人都与$A$、$B$之一相识，则象(1)一样地可导出矛盾. 故可假设$n$个人中恰有$\left[\frac{n}{2}\right]$个人与$A$相识，也恰有$\left[\frac{n}{2}\right]$个人与$B$相识，且存在点$C$所对应的人与$A$、$B$均不相识. 由反证假设知，与$A$相识的人互不相识，与$B$相识的人也都互不相识.



按已知条件(i)，至少有$\left[\frac{n}{2}\right]\geq 3$个人与$C$相识. 设其中有$k_1$个人与$A$、$C$相识，有$k_2$个人与$B$、$C$相识，$k_1\geq 1$，$k_2\geq 1$，$k_1+k_2\geq 3$. 不妨设$k_2\geq k_1$，于是$k_2\geq 2$. 设$B_1$，$B_2$与$A$，$C$相

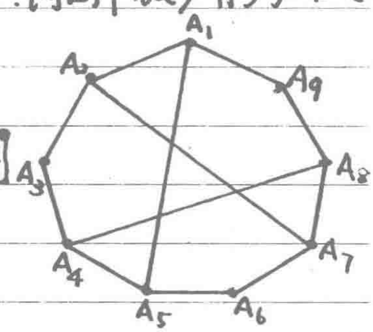
识，A_1与B，C相识．由反证假设知A_1与B_1，B_2都不能相识．又因A组各点间均无连线，故与A_1相识的人至多有$[\frac{n}{2}]-1$人，此与已知条件(i)矛盾．

综上可知，图中必有三角形．

小·文·8．设9阶图中既无三角形又无四边形的圈．问图中最多有多少条边？

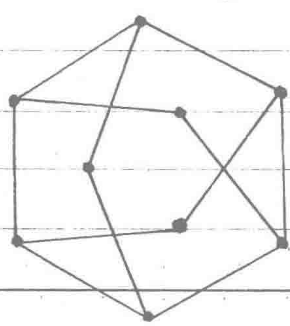
101

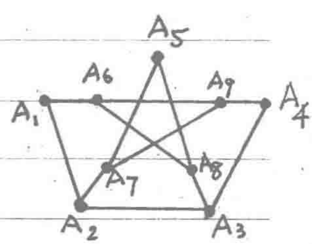
解 右图所示为一个9阶图，其中共有12条边，但图中既无三角形又无四边形，所以题中所要求的最多边数不小于12．从举例入手



另一方面，设有一个9阶图中有13条边，于是9个顶点的度数之和为26度，所以这13条边在图中至少产生25个夹角，再加上13条边共38个元素，每个元素都分布在一个顶点对之间．但9个顶点共可组成$C_9^2=36$个不同的顶点对．由抽屉原理知必有两个元素分布在同一个顶点对间．若是一个夹角和一条边，则组成一个三角形；若为两个夹角，则组成一个四边形． 边+角的抽屉原理

综上可知，图中最多有12条边． (2006.3.7)

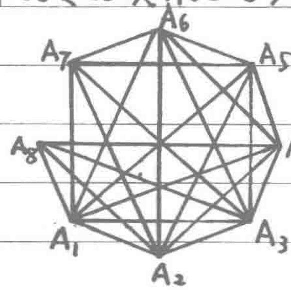




°5. 某图中共有 n 个顶点，$n\geq 8$，问这 n 个顶点的度数能否分别为 $4,5,\cdots,n-4,n-3,n-2,n-2,n-2,n-1,n-1,n-1$？

（1985年奥—波联合数学奥林匹克）

解 先看 $n=8$ 的情形. 在右图中，A_1、A_2 和 A_3 均为 7 度，A_4,A_5,A_6 均为 6 度. $d(A_7)=5$，$d(A_8)=4$，满足题中要求.



在右图中添加一点 A_9，将 A_9 与 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 各连一条边，于是 $d(A_9)=6$，$d(A_8)=4$，$d(A_7)=5$，而 $d(A_1)=d(A_2)=d(A_3)=8$；$d(A_4)=d(A_5)=d(A_6)=7$，恰好满足题中要求. 可见，当 $n=8,9$ 时，存在满足要求的图.

$\boxed{构造法}$

不难看出，上述由 8 点过渡到 9 点的过程，由 9 点到 10 点时是无法实现的. 实际上，若有 10 阶图满足题中要求，则其中连线条数为

$$\frac{1}{2}(d(A_1)+d(A_2)+\cdots+d(A_{10}))$$
$$=\frac{1}{2}(9+9+9+8+8+8+7+6+5+4)=36\frac{1}{2},$$

矛盾. 这表明满足要求的 10 阶图不存在. 同理可证满足要求的 11 阶图也不存在. 但这一方法于 $n=12$ 时不再适用. 因而我们另寻求一个统一的反证法.

设 $n\geq 10$. 将 n 个点分成 3 个互不相交的集合：

$M_1=\{A_1,A_2,A_3\}$，$M_2=\{A_4,A_5,A_6\}$，$M_3=\{A_7,A_8,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n\}$.

其中 M_1 中 3 点均为 $n-1$ 度，M_2 中 3 点均为 $n-2$ 度，M_3 中的顶点依次为 $n-3,n-4,\cdots,5,4$ 度. 显然，M_1 中每点都与所有其余的

点间有边相连．M_2中每点都至少与M_3中的$n-7$个顶点间有边相连，即M_2中每点至多与M_3中1点不相邻．注意$d(A_n)=4$，$d(A_{n-1})=5$．所以A_n至少与M_2中的两点不相邻，A_{n-1}至少与M_2中的一点不相邻．可见，M_2中3点与M_3中除A_n，A_{n-1}之外的其余各点间都有边相连．然而，$d(A_7)=n-3$，它至少要与A_n，A_{n-1}，A_{n-2}之一有边相连．但无论与3个顶点中的哪一个相连，都导致矛盾．这就证明了当$n\geq10$时，满足题中要求的n阶图是不能存在的． $\boxed{\text{动态分析法}}$

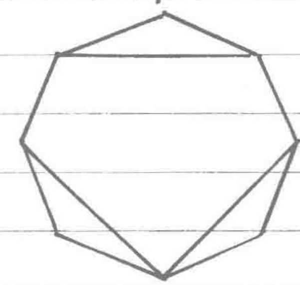
综上可知，当且仅当$n=8,9$时，满足题中要求的n阶图存在．

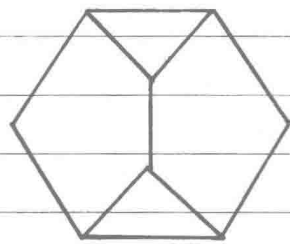
9．空间中给定$2n$个点，其中任何4点都不共面．在这些点间连有n^2+1条不同线段，求证这些线段中必有3条是一个三角形的3条边．并问当只有n^2条线段时，同样的结论是否仍然成立？

6. 在有8个顶点的简单图中没有四边形，求图中边数的最大可能值。

（1992年中国数学奥林匹克）

解　下列两个8阶图中都有11条边且没有四边形：





$\boxed{\text{从举例入手}}$

故知所求边数的最大值≥ 11.

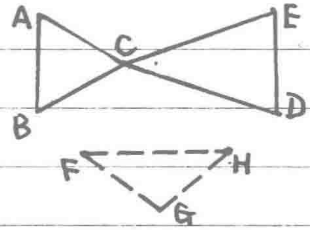
下面证明若8阶图中有12条边，则图中必有四边形.

若不然，则图中没有四边形. 12条边共有24个端点，即图中8个顶点度数之和为24. 所以，或者8个顶点都是3度或者有1个顶点度数至多为2. $\boxed{\text{子图法}}$

若为前者，则可导致6个顶点间有7条边，这又可导致5个顶点间有5条边. 由定理1知其中必有圈. 由于没有四边形，故图中有五边形或三角形. 若有五边形的圈，则因每点都是3度，故圈上的5个顶点中，每点都要向另3个顶点之一引出一条线. 由抽屉原理知有圈上两个顶点与圈外1点同时有边相连. 由于没有四边形，故必有三角形. 所以这时总有三角形. 从图中将这个三角形的3个顶点去掉，则余下的5点之间还有6条边. $\boxed{\text{圈的存在定理}}$

若为后者，即8个顶点中存在一点A，使得$d(A)\leq 2$. 于是去掉点A之后的7点间至少有10条边. 从而又可导致5个顶点间有6条边.

5个顶点之间有6条边，其中必有圈．若有5边的圈，则圈中还有1条对角线，从而导致四边形，矛盾．若有三角形而没有四边形和五边形，则只能是有1个公共顶点的两个三角形．



设另外3点是F、G和H．由于图中除了△ABC和△CDE外还有6条边，于是或者存在△FGH或者前5点与后3点之间至少有4条连线或者前5点之间还有第7条边．若为后者，则导致图中有四边形，矛盾；若为前者，则后3点与前5点之间还有3条边．由抽屉原理知必有两条边连向前两个三角形中的同一个，从而又导致四边形，矛盾；若前5点与后3点之间至少有4条连线，由抽屉原理知F、G、H中有一点向前5点引出两条边，这又导致四边形，矛盾． $\boxed{\text{边的位置分析法}}$

综上可知，8阶图中边数的最大可能值为11．

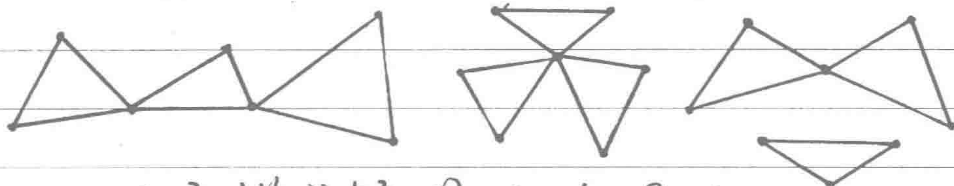
解2　只证有12条边的8阶图中必有四边形．

若不然，则图中没有四边形．这时8个顶点的度数之和为24．记 $d(A_i)=m_i$，$i=1,2,\cdots,8$．于是 $m_1+m_2+\cdots+m_8=24$．由一个顶点引出的两条边构成一个夹角，于是图中夹角总数

$$C_{m_1}^2+C_{m_2}^2+\cdots+C_{m_8}^2\geq 24.$$

每个夹角的两条边的另两个端点为图中一个顶点对，我们说此夹角张在这个顶点对上．由于没有四边形，所以图中这些夹角都张在互不相同的顶点对上．当然，每条边也可以认为张在一个顶点对上．因为

8阶图中共有$C_8^2=28$个不同的顶点对，而$12+24-28=8$，故图中至少有8个夹角与边分别在同一个点对上。换句话说，图中至少有8个三角形。在这个计数过程中，每个三角形至多被计数3次，从而图中至少有3个不同的三角形。由于图中没有四边形，所以任何两个三角形都没有公共边。于是3个三角形的状态只有下列3种情形：



(1) 3个三角形构成连通子图，如上左两图所示。这时，7点间的任何两点间都不能再有连线，否则必导致四边形。从而另3条线均从第8点引出，但无论引向哪3点，都必然导致四边形。

(2) 上面右图中3个三角形处在两个连通分支中，已经用全了8个顶点。另3条线只能在两分支之间连结，但无论怎样连线，都必然导致四边形。

解3 只证有12条边的8阶图中必有四边形。

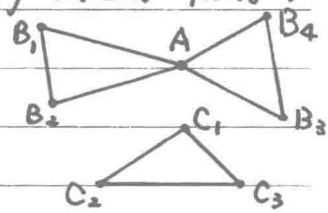
若不然，设图中顶点A引出的边数最多，共引出k条。

(1) $k\geq5$。AB_i，$i=1,2,\cdots,k$，$k\leq7$。与点A不相邻的顶点记为$C_1,\cdots,C_h$，于是$k+h=7$。由于图中没有四边形，故$B_1,B_2,\cdots,B_k$之间不能有两条边有公共端点，所以至多有$\left[\frac{k}{2}\right]$条边。顶点C_i与B组点之间至多各1条连线，至多共有$h=7-k$条。C组点之间至多有C_h^2条边。这时，图中边的总数为

$$k+\left[\frac{k}{2}\right]+(7-k)+C_h^2=S.$$

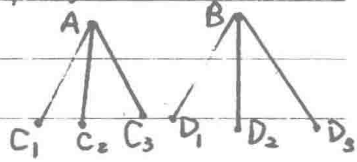
易见，当$k=5,6,7$时，$S=10$，矛盾.

(2) $k=4$. AB_i，$i=1,2,3,4$. C_1,C_2,C_3与顶点A不相邻. B组4点之间至多两条边. C组点与B组点之间至多3条边，C组点间至多3条边. 因图中共有12条边，故上述3个"至多"均应为"恰好".

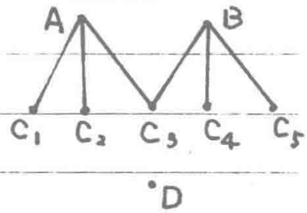


由对称性知，不妨设B组两条边为B_1B_2和B_3B_4. 于是C组3顶点向B组各引1条边共3条边中必有两条的B组端点同为前两点或同为后两点，导致四边形，矛盾.

(3) $k=3$. 取无边相连的两点A和B，二者各引出3条边. 由于图中没有四边形，故A的3个邻点与B的3个邻点中至多1个公共点.



(a) 两个3点组无公共点. C组之间与D组点之间都至多1条线，两组之间至多3条边. 至多共11条边. 矛盾.



(b) 两个三点组有1个公共点C_3. 这时第8顶点D向C_1,C_2,C_3,C_4,C_5引出3条边，其中必有两条的C组端点同在C组前3点或后3点，当然构成四边形，矛盾.

综上可知，图中至多有11条边.

注　若将8点改为9点，结果又如何？利用本题结果，可以证明答案为13.