

Gaodeng Shuxue Shiyan

Dierban

Xueruanjian Zuoshuxue

高等数学实验

(第2版)

——学软件 做数学

汪晓虹 周含策 编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

高等数学实验(第2版)

——学软件 做数学

汪晓虹 周含策 编



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

围绕高等数学的概念和计算,本书系统地介绍了 Mathematica 数学软件的相应内容,在微积分实验、数值计算实验及综合实验中,选了不少容易上手的计算和应用问题,来帮助读者学习用软件和学习用数学,如:微积分、函数的极值、数列与级数、微分方程的求解、方程求根、数据曲线拟合与插值、数值微分与积分、线性与非线性规划等;及梯子长度、人口预报、通信卫星俯视地球的面积问题、寻找最速降线问题、红绿灯设置、湖水污染问题、聘用员工的人数问题、信用卡最低还款额等多个典型应用问题。供读者学习建立数学模型,及设计算法和上机实现计算。逐步巩固数学基础、加强逻辑推理和应用数学的能力。

本教材可用作高等院校本科生的数学实验课程教材和参考书,也适合于具有高等数学基础的其他读者。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学实验:学软件 做数学/汪晓虹,周含策编.

—2版. —北京:国防工业出版社,2016.2

ISBN 978-7-118-10626-8

I. ①高... II. ①汪... ②周... III. ①高等数学—应用软件—高等学校—教材 IV. ①0245

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 024209 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 15½ 字数 280 千字

2016 年 2 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 38.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

第2版前言

大学的目标和使命,是培养符合社会需要的人才,促进社会发展和国家进步。目前,数学的应用已经渗透到社会发展的各个领域,尤其在关系到国计民生的科学和工程技术领域中,数学因其对前沿问题的重要支撑作用而备受瞩目,各个行业对专业人才的数学素养要求因而也越来越高。理工科大学生应该具备良好的数学理论基础和应用能力,已经成为大家的共识。

因此,在高等数学的教学过程中,我们会向学生介绍数学的发展史。例如:17世纪数学发展的趋势,开始了科学数学化的过程。最早出现的是力学的数学化,它以1687年牛顿所著的《自然哲学的数学原理》为代表,从三大定律出发,用数学的逻辑推理将力学定律逐个地、必然地引申出来。18世纪的数学表现以微积分为基础,发展出宽广的数学领域,数学发展的动力除了来自物质生产之外,还来自物理学,明确地把数学分为纯粹数学和应用数学等。我们强调学习微积分的重要性。例如:微积分具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力,迄今已获得相当大的成功。它几乎解决了一切几何测量和物理计算问题,也是经济问题研究的重要基础。学习微积分要注重其数学思想本身,要避免在学习过程中可能把它们仅看成一些规则和步骤等。其根本目的在于帮助学生为进入科学和工程研究领域作准备,为学生奠定数学理论基础、训练思维方法、培养思考能力、习惯起到重要的作用。

开设了高等数学实验课程,我们感到可以更好地达到高等数学的教学目标,使学生更进一步了解微积分在应用领域的作用,提高了学生用数学的意识及解决应用问题的能力。同学们通过“学数学到用数学”,有了自己去体验、去探索的机会和空间,也有了学习、研究数学的动力。起到了用数学思想和方法结合计算机技术加强数学的应用与实践,提高数学素养及探索、创新精神的积极作用。通过这些年的教学实践,我们实实在在地体会到:作为侧重实践性的课程,高等数学实验是对高等数学课程的一个重要补充和延伸。这门课程介于传统数学课程和数学建模之间,可以称为这两者之间过渡的桥梁。侧重于从学数学向用数学方面探索,尽量多地接触实际问题。通过由实际问题得到的启发,及在计算工

具的帮助下,更深入地理解数学。课程应该起到开阔学生视野的作用,让他们换一个观点看待似乎已经老生常谈的传统数学课程,也换一个观点看待那些原本似乎与数学关系不大的实际问题。让学生学会多角度、多层次地观察问题,学会从琐碎的现实问题中抽象出问题的实质和关键,学会用数学的方法和理论尝试去分析、去解决问题。学会应用强大便利的现代计算工具,在计算中学习计算,体会到隐藏于纷繁细微之中的数学之美。

2010年版的教材《高等数学实验——学软件做数学》,已使用了几年,教学实践表明,其内容适合于理工科大学低年级学生。这次修编主要修改了第1章和第2、3章中的部分计算程序。书中给出的计算过程都可以在 Mathematica 8.0 及更高版本 Mathematica 9 或 10 中运行,读者可以了解 Mathematica 高级版本的一些相应变化。数学实验课程需要实验的工具,主要是计算机的软件,综合考虑计算功能、图形功能、库函数覆盖程度、接口丰富性、运算性能、易用性、代码抽象程度等方面的因素,我们还是选择 Mathematica 8.0 ~ 10 作为实验的首选平台,但是并不排斥读者使用其他软件平台。在例题和实验项目选择方面,只做了少量的增减,增加了部分实验参考。依然是注重并不复杂的、比较贴近生活的、与微积分有较多联系的问题。这样的问题容易上手,容易让学生体会到传统数学课程中的理论在指导实践中的重要性,及导出求解实际问题的正确方法,有利于从大学低年级开始培养学生的探索能力。同时,也考虑了选课学生的年级、专业分布和学习进度等,例题和实验项目有不同难度和类型供读者选择,以便达到更好的教学效果。由本课程的特点决定,选用的例题和实验项目更注重兴趣性,而不太追求系统性和完整性。书的最后选录了几位同学的综合实验报告。通过报告可以看到:学生能自己查阅资料,自己设计实验方案,注重实验的过程,提高了分析问题解决问题能力。同时也培养了他们严谨的科学态度,细心、踏实的工作作风。在综合实验中,不少同学针对自己感兴趣的问题,认认真真地去学习、专研解决问题的方法,通过这样的一个更深入学习思考的过程,也为他们进入高年级学习打下了良好的基础。

感谢袁稚炜、邓僖同学对书稿做的校对工作。

本教材主要包括四个部分的实验内容。

第一部分为微积分相关内容,主要有作函数的平面图形和立体图形,微积分计算,微分方程的解及梯度场;结合图形计算函数极限,计算函数的最大和最小值;计算广义积分与无穷级数等。

第二部分为数值实验,主要有计算函数值;方程求根的迭代法,迭代的蛛网

图;数据曲线的拟合与插值;数值微分与积分;怎样计算 π (数值积分法、泰勒级数法、蒙特卡罗法等)。

第三部分为基础性的应用问题,有梯子长度问题(优化问题);人口预报问题(曲线拟合);通信卫星俯视地球的面积问题(二重积分);寻找最速降线问题(积分和最值);导弹跟踪问题;红绿灯设置问题、湖水污染问题(微分方程);聘用员工的人数问题、选课问题(整数规划);信用卡最低还款额问题(差分方程问题);等等。这些例子考虑了低年级学生的数学和物理知识储备,读者不用担心需要太多的背景知识。

第四部分为综合性的应用。包括人口预报的模型及其应用;疾病传播问题;个人住房贷款、养老保险;投篮角度问题;行星的轨道和位置;等等。在解决问题的过程中,读者会经历分析问题,建立和调整数学模型,利用合理假设简化模型,设计算法和上机计算等诸多过程,这些过程非常有助于巩固数学基础,加强推理和计算研究能力。

编者

2015年2月

前 言

学习高等数学的根本目的在于帮助学生为进入科学研究和工程计算的领域作准备,是人才培养的重要的、必须掌握的一门基础课。高等数学的微积分方法展现了将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力,微积分思想应用获得相当的成功,它几乎解决了一切几何测量和物理计算问题,也是经济问题研究的重要基础。

在高等数学学习告一段落时,针对多数学生不能十分理解学习高等数学的目的,虽然能解高等数学的习题,但不会运用数学思想解决简单的应用问题,不了解如何把数学观点、数学思想方法用于实际应用。高等数学实验课程从“用数学”的角度来进一步学习和复习高等数学中的概念和方法,以计算机和数学软件为手段进行高等数学实验,进一步领会和掌握高等数学的思想和方法,学习和实践前人所做的科学发现和发明的过程。高等数学实验课定位在“用数学”上,让学生用计算机做数学,在实验过程中,将同学们引入科学实验和科学计算的领域,向他们展示数学软件的计算能力。以解决问题为线索去进行探索、发现,学习用数学方法解决要计算的问题,让同学们体会数学的概念和方法如何用于实际问题中,并会用 Mathematica 来实现。通过用计算机做数学的过程提高计算问题和解决问题的能力,从而更加深入地理解和掌握数学的概念与方法。

本教材是为本科低年级的学生设置 32 学时的数学实验选修课而编写的。编写教材的指导思想是:培养学生会用数学知识,借助计算机,提高分析和计算应用问题的能力,为学生从“学数学”到“用数学”搭建起一座桥梁。让学生对功能强大的数学软件 Mathematica 有一个初步的了解,除了学会用软件解决高等数学课程教学中涉及到的所有计算问题,也为将来学习其他的科学计算和应用软件打下基础。尽量多地编写容易上手的练习,帮助学生掌握概念和学习计算。尤其是通过计算来学习计算,培养计算经验。通过对实际应用问题的研究,让学生进一步认识到微积分的广泛应用背景,学习计算应用问题的科学方法、步骤。教材的编写特点是:针对在高等数学学习告一段落,大一下学期或大二上学期的

学生基础课和专业基础课的学习任务较重,故将复习概念和学习计算的过程尽量设计的直观和轻松一点。本着用较小的篇幅让学生掌握较多的内容,因此从软件的操作学习、概念的复习到计算方法的学习,基本上都是通过例题的方式给出的,将 Mathematica 的教学内容融入到了学习求解数学及其应用问题的计算程序设计中。在应用问题的选择上,尽量贴近生活,重点强调“用数学”,每一章的实验内容都设计了有针对性的应用实例。应用实例的选取原则是贴近生活,概念浅显,陈述过程不复杂,又能让学生体会到数学知识是非常有用的。在每章后面给出了一些容易上手的实验练习,供初学者检验对学习内容的掌握程度。

本教材可供大学低年级理工科专业的选修课程使用,也适合于有一些计算经验的理工专业的学生使用。

在 1999 年和 2000 年的暑期,作者参加了由教育部委托清华大学举办的“数学实验”课程研讨班及江苏省高校“数学实验”课程研讨班,学习了清华、北大、中科大、北师大、上海交大等学校的“数学实验”课程教学中不少好的具体做法和经验。在此基础上,本教材是在多年的教学实践中对使用的讲义进行不断补充、修改和完善而形成的。书中的一些例题是取自清华、北大、中科大、北师大、上海交大等学校的教材,从开始尝试开设数学实验课程一直延用至今。讲授这些例题取得了很好的教学效果,也使学生们深刻感到数学实验课程十分有用,应该给更多的同学开设数学实验课的理由之一。在此,感谢萧树铁老师、李尚志老师、姜启源老师、乐经良老师、谢云荪老师,是他们使得我有条件来编写一本适合于理工科学生选修课的教材,让学生在短时间内可以基本学会使用本数学软件,去实践用数学方法解决较多的应用问题。在本教材的编写过程中还得到了刘峰老师、周含策老师的热情帮助和指导,桂冰教授对本书的初稿进行了仔细的审阅,并提出了许多宝贵的建议。在此,对他们致以衷心的感谢。

作者

2009 年 12 月

目 录

第 1 章 Mathematica 简介	1
1.1 界面和基本操作	1
1.2 Mathematica 中的基本量及运算	7
1.2.1 数的表示	7
1.2.2 算术运算	8
1.2.3 变量	9
1.2.4 列表(List)	10
1.2.5 函数	15
1.3 在 Mathematica 中作图	19
1.3.1 二维函数作图	19
1.3.2 三维函数作图	24
1.3.3 数据绘图	28
1.3.4 用图形元素作图	29
1.4 代数运算和方程求根	30
1.4.1 多项式运算	30
1.4.2 方程求根	32
1.5 微积分运算	34
1.5.1 求极限	34
1.5.2 导数与微分	35
1.5.3 积分	35
1.5.4 幂级数	37
1.5.5 常微分方程	38
1.6 矩阵与方程组计算	39
1.6.1 矩阵的计算	39
1.6.2 线性方程组求解	40
1.7 数值计算方法	41

1.7.1	插值多项式	41
1.7.2	曲线拟合	42
1.7.3	数值积分	43
1.7.4	函数的极小值	44
1.7.5	离散傅里叶(Fourier)变换和逆变换	45
1.7.6	常微分方程数值解	46
1.7.7	线性规划与非线性规划	46
1.8	循环语句与编程	47
1.8.1	关系表达式与逻辑表达式	48
1.8.2	条件语句	48
1.8.3	循环控制	50
1.8.4	全局变量、局部变量	52
1.8.5	输入和输出	53
第2章	微积分实验	55
2.1	函数与极限	55
2.1.1	函数作图	55
2.1.2	函数运算	58
2.1.3	极限计算	59
2.1.4	实验内容与要求	62
2.2	导数与导数的应用	71
2.2.1	动画演示	71
2.2.2	导数计算	71
2.2.3	导数的应用	73
2.2.4	实验内容与要求	78
2.3	积分与积分的应用	86
2.3.1	动画演示	86
2.3.2	积分计算	88
2.3.3	积分应用	89
2.3.4	实验内容与要求	91
2.4	数列与级数	100
2.4.1	级数求和	100
2.4.2	幂级数展开	101

2.4.3	傅里叶级数展开	104
2.4.4	实验内容与要求	107
2.5	微分方程与应用	113
2.5.1	微分方程求解	113
2.5.2	微分方程的应用	117
2.5.3	实验内容与要求	121
第3章	数值分析实验	126
3.1	方程求根	126
3.1.1	方程求根的迭代法	126
3.1.2	迭代的“蛛网图”	131
3.1.3	二次函数迭代	132
3.1.4	实验内容与要求	134
3.2	数据曲线拟合与插值	139
3.2.1	最小二乘拟合	140
3.2.2	拉格朗日插值	141
3.2.3	拟合与插值举例	141
3.2.4	实验内容与要求	145
3.3	数值微分和数值积分	149
3.3.1	数值微分	149
3.3.2	数值积分	154
3.3.3	实验内容与要求	158
3.4	线性规划与非线性规划	164
3.4.1	线性规划	164
3.4.2	非线性规划	166
3.4.3	应用问题举例	167
3.4.4	实验内容与要求	171
第4章	综合实验	175
实验1	金融问题	175
实验2	投篮角度问题	181
实验3	曲柄滑块机构的运动规律	187
实验4	行星的轨道和位置	194

附录.....	202
数学实验报告选	202
参考文献.....	235

第1章 Mathematica 简介

工欲善其事,必先利其器。Mathematica 软件就是本课程的利器之一。曾经使用 C/ C++ 这样的高级程序语言编程来解决数学问题的读者,了解 Mathematica 之后,一定会惊叹于它的易用、强大、高效和直观。Mathematica 的应用远远超出数学和物理这样的研究领域,在社交网络分析、医疗图像分析、金融工程、计算生物学等诸多领域都起到重要的作用。英国物理学家和数学家 Stephen Wolfram 和他的团队在 1986 年开始开发 Mathematica,1988 年发行第一个版本,目前的版本为 2014 年 7 月发布的 Mathematica 10。

本教材使用这个版本作为实验平台。读者的计算机上也许安装的是其他版本,对此不必过于担心。Mathematica 10 是一个很庞大复杂的系统,完全彻底地掌握既不现实也无必要。这里就是利用它来完成数学实验,只要掌握一些基本功能已经足够。而这些基本功能被各个版本非常稳定地支持,本教材的代码,运行在版本 8、版本 9、版本 10 之上,都会得到相同的结果,但是读者会对界面的差异感觉比较明显。例如,从版本 9 开始,绘图结果下方会出现一行按钮和菜单,方便用户修改绘制的风格和各种选项。考虑到通用性,本教材对此并没有深入介绍,读者直接尝试即可。

Mathematica 提供了一个交互式的集成环境。这个环境可以作为高级计算器使用,在其中输入运算表达式或者命令,就可以完成符号计算、数值计算和图形处理等各种任务,并立即得到结果。同时也提供了一套程序设计语言,有自己完善的语法、变换规则、异常丰富的函数库,以及与操作系统和其他编程语言交互的接口。

给读者的阅读建议是,打开计算机,边阅读,边尝试,这样可以很快熟悉软件的使用,方便后面的实验。如果看书和操作分离,效果会差很多。

1.1 界面和基本操作

掌握 Windows 基本操作的读者完成 Mathematica 的安装和启动不会遇到任何困难。初次启动以后,读者会看到如图 1-1 所示的窗口。

这是一个欢迎窗口,“New Document”按钮用于创建一个新的笔记本文档。

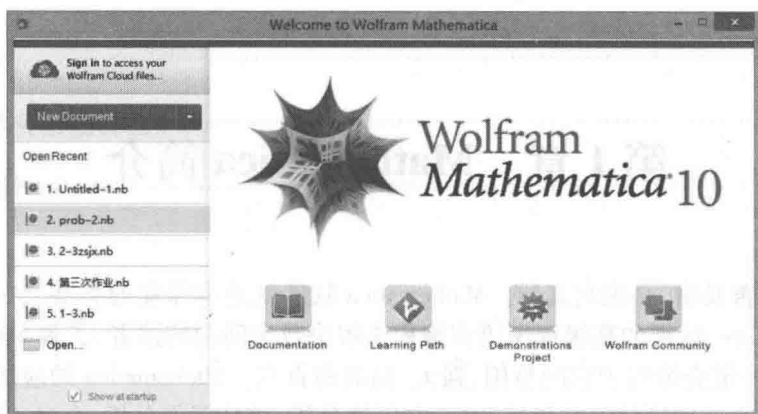


图 1-1 启动时显示的欢迎窗口

而“Open Recent”之下列举了最近使用过的文档,点击可以直接打开。因为使用情况不同,这里列举的条目也不同。欢迎窗口的右下方提供了文档、教程、演示项目和 Wolfram 社区的入口。

我们点击“New Document”之后看到如图 1-2 所示的工作窗口。

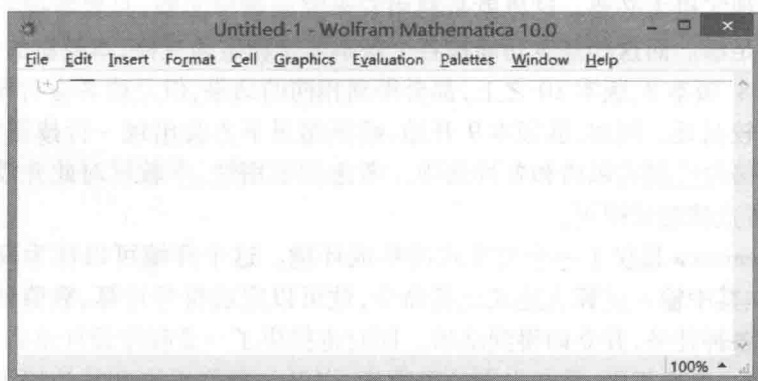


图 1-2 工作窗口

工作窗口类似于一般的应用程序,由标题栏、菜单栏、状态栏、工作区等部分组成。从“File”可以新建、打开、保存、关闭一个文件。Mathematica 可以处理几种文件格式,最常用的是笔记本文件,用来保存用户输入的命令和计算的结果,扩展名为.nb。可以通过交换笔记本文件来和他人共享代码与计算结果。每一个被打开或者新建的笔记本文件都在一个工作窗口中被显示和编辑。工作窗口的标题就是文件名,如果还没有指定,往往显示为“Untitled-1”。我们在工作窗口中可以输入命令、显示各种计算和绘图结果,甚至播放声音。工作窗口的右下

角有百分比的显示,通过点击数字旁边的黑色三角符号可以改变显示比例。

各种菜单功能中,值得在此首先提到的是“Palettes”下的几个 Assistant。例如“Basic Math Assistant”,打开之后出现一个助手窗口,如图 1-3 所示。读者可以通过点击,在工作窗口中输入分式、根式、积分符号和希腊字母等各种数学符号。

作为第一个例子,请读者在工作窗口中输入 $N[\text{Pi}, 100]$,然后按下组合键 Shift + Enter,也就是先按下 Shift,不要放开,再按下 Enter,然后放开两个按键。用这种方式是告诉 Mathematica,我的输入完成了,请你开始计算。瞬间我们就得到了计算的结果。如果读者使用的键盘上有数字小键盘,也可以按下小键盘上的 Enter,而不需要按 Shift,就完成了同样的功能。这个操作也可以使用菜单栏上“Evaluation”中的“Evaluate Cells”来完成。如果按下的是主键盘区域的 Enter,输入光标将会换到下一行,并不会执行计算。输入表达式之后,总是用组合键 Shift + Enter 或者小键盘上的 Enter 告诉 Mathematica 进行计算。之后的结果如图 1-4 所示。

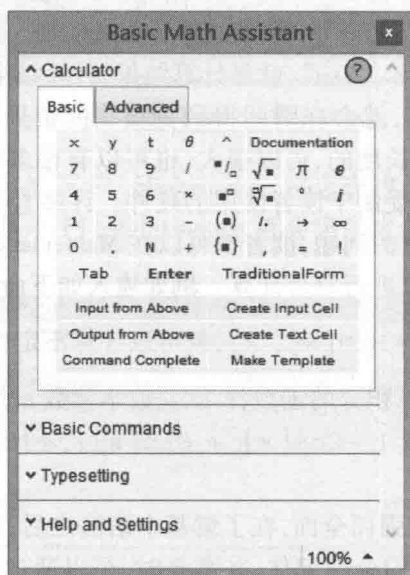


图 1-3 基本数学符号输入助手窗口

工作窗口的标题是“Untitled - 1”,这是因为我们还没有保存文件,因而没有命名。旁边的星号表示,文件被更改过了。每次打开一个新的文件,或者保存过文件以后,工作窗口标题栏不会显示星号,等我们输入或者改动了文件的内容,就会显示星号,提醒用户工作窗口的内容尚未保存。

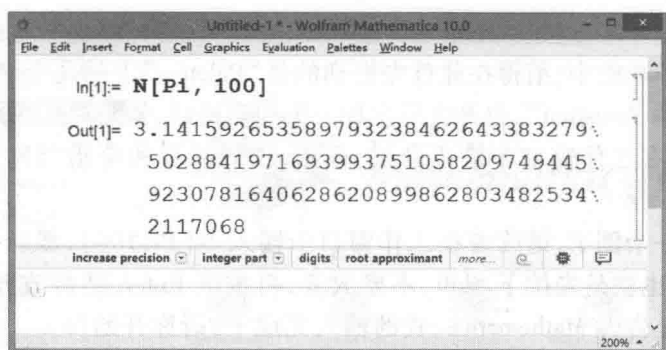


图 1-4 首次计算的结果

工作窗口内容第一行最左边的“ $\text{In}[1] :=$ ”这几个字符并不是我们输入的,而是输入以后 Mathematica 自动添加的,表示这一行是用户输入的,方括号内的数字 1 是对输入进行编号,下一次输入就会是“ $\text{In}[2] :=$ ”,等等。之后的“ $\text{N}[\text{Pi}, 100]$ ”才是我们输入的命令。 N 表示计算近似值, Pi 就是圆周率,最后的 100 告诉 Mathematica 我们希望计算结果有 100 位有效数字。

下面的“ $\text{Out}[1] = 3.14\dots$ ”,就是计算结果,计算结果也有编号。读者可以重新输入 $\text{N}[\text{Pi}, 9999]$,就会在瞬间得到更精确的结果。理论上,Mathematica 能处理的数据是不限制长度的,可以很大,也可以有很多位有效数字,能处理的数据的大小基本上仅仅受制于读者使用的硬件。许多直接使用编程语言(例如 C++) 解决起来比较困难的问题,读者都可以在 Mathematica 中大胆尝试。

用 Mathematica 可以进行符号计算。例如输入如下命令:

$\text{Integrate}[\text{E}^x * \text{Sin}[x], x]$, 就可以计算不定积分 $\int e^x \sin x dx$ 。

Integrate 是计算积分的函数, E 就是数学常数 e , $^$ 表示幂。Mathematica 给出的答案是 $1/2 \text{E}^x (-\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x])$,不同的是,这里没有给出积分常数。

Mathematica 的功能强而全面,在了解基本语法之后,还需要了解很多函数。不过我们没有必要把它们全部记住,在需要时,可以通过 Mathematica 自带的帮助系统,或者网站来查询。例如,读者可以点击“Help”菜单下的“Wolfram Documentation”,就会看到如图 1-5 所示的参考文档窗口。

这里给出了“核心语言”“数据操作和分析”“可视化与图形”等多个专题栏目,提供了全面的帮助信息。建议读者花一些时间浏览。

如果我们已经知道某个函数的名字,但是不知道该如何使用,需要详细资料,可以在笔记本窗口输入函数名字,确保输入光标(不是鼠标光标)没有离开

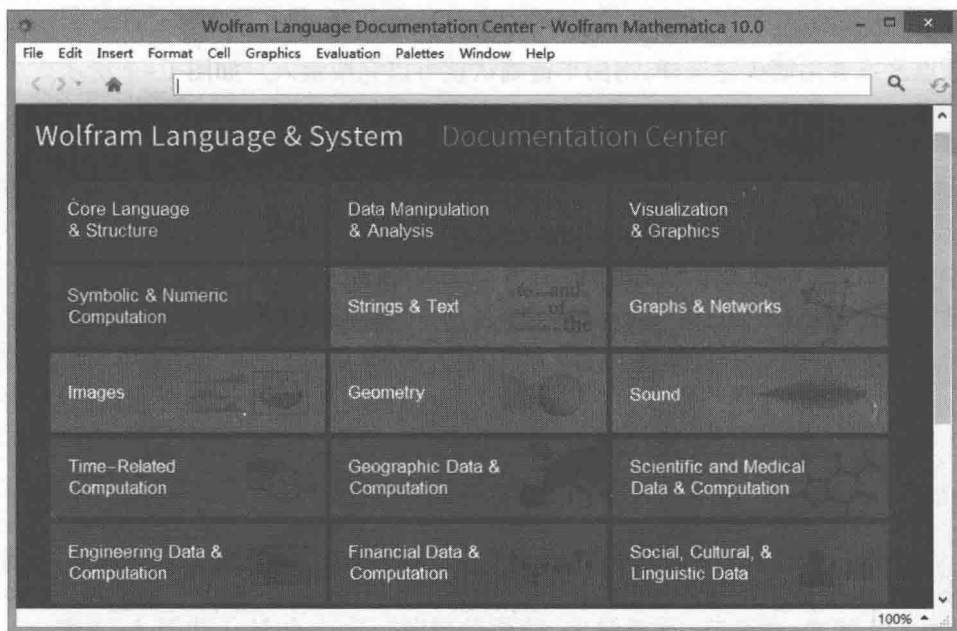


图 1-5 帮助信息和参考文档窗口

函数名字,然后在键盘上按下 F1, Mathematica 将会查找该函数的帮助信息。例如,我们输入 Plot,然后按下 F1, Mathematica 就会显示这个函数的用法,如图 1-6 所示。

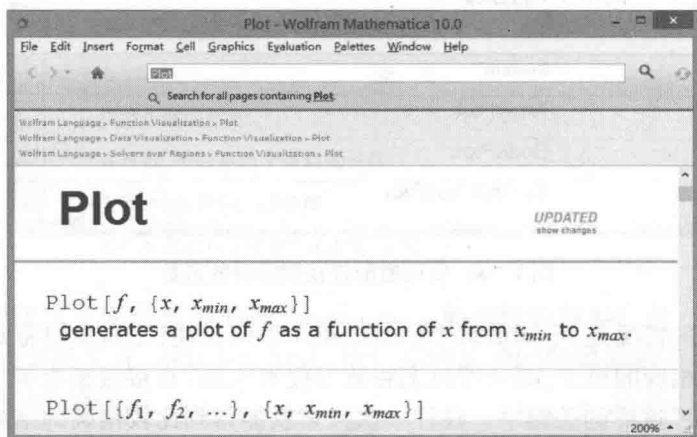


图 1-6 按 F1 之后看到的帮助信息