



半导体激光器设计理论 II

# 半导体激光器 激光波导模式理论 (上册)

郭长志 编著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

半导体激光器设计理论 II

# 半导体激光器 激光波导模式理论

(上 册)

郭长志 编著



科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

模式理论是研究激光在波导光腔中的传播规律、各种波导结构中可能存在的各种光模类型和模式结构特点,揭示激光模式结构与波导结构的内在联系,从而发现控制波导结构和模式结构的途径。由于光在传播过程中主要突出其波动性,量子场论和经典场论基本上导出相同的结果,因此完全可以从麦克斯韦方程组出发进行分析。其任务是找出器件性能所需的最佳激光模式结构和设计出其合理的波导光腔结构方案。本书是在作者 1989 年 12 月出版的《半导体激光模式理论》的基础上,作了修订和大量补充完备,以反映作者及其团队几十年来取得的重要研究成果和该领域的最新进展。全书论述既重基础又涉及前沿,既重物理概念又重推导编程演算。

本书适合有关专业的大学高年级学生、研究生、研究人员和教师作为专业教材、参考书或自修提高的读物。

### 图书在版编目(CIP)数据

半导体激光器激光波导模式理论. 上册/郭长志编著. —北京:科学出版社, 2015.10

(半导体激光器设计理论)

ISBN 978-7-03-045717-2

I. ①半… II. ①郭… III. ①半导体激光器-激光-光波导-研究  
IV. ①TN248.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 222435 号

责任编辑:钱 俊/责任校对:钟 洋  
责任印制:徐晓晨/封面设计:耕者设计

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**北京京华虎彩印刷有限公司** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015 年 10 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 10 月第一次印刷 印张:31 3/4

字数:672 000

定价:178.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

人类接触到的热光(太阳光、燃烧光、热钨丝光等)、冷光(生物光、光荧光、放电荧光、电场发光、电流注入发光等)都是一种自发辐射(spontaneous radiation)。自发辐射的特点是:① 相干性较差,与宏观天线辐射的电磁波不同,这些由原子等微观系统,每次以辐射时间  $\tau_c$  辐射的电磁波是一个长度为  $l_c = \tau_c c_0$  的波列,  $\tau_c$  和  $l_c$  分别称为相干时间和相干长度,  $c_0$  是真空波速。各波列之间的振荡相位差(或其出现的相对时间)是随机的,如图 1 所示。② 单色性较差,其频谱和谱线都较宽。例如<sup>[1.1]</sup>,即使是单色性较好而曾被选为长度基准的氪原子( $\text{Kr}^{86}$ )放电灯在低温下发射  $6057 \text{ \AA}$  的光,其相干时间为  $\tau_c = 2.5 \times 10^{-9} \text{ s}$ ,相干长度为  $l_c = 76 \text{ cm}$ ,谱线宽度为  $5 \times 10^{-3} \text{ \AA}$ 。③ 每频率的平均光粒子数(光子简并度)较少,尤其是热辐射,例如,黑体的温度为  $50000 \text{ K}$  时,波长为  $1 \mu\text{m}$  的平均光子数只有 1 个。④ 发射方向几乎是全方位向外辐射出去的。

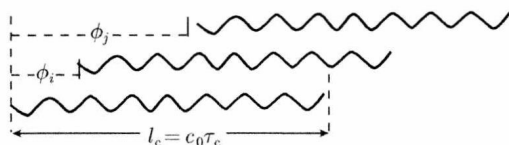


图 1 原子一次次随机自发发射的各个光波列

由爱因斯坦的辐射理论,在发生自发辐射的原子等微观系统中的同一能级差,处于上能级的激发状态粒子也有可能受到这能级差相应频率的光触发而发生受激辐射(stimulated radiation)。受激辐射虽然是激光所需的辐射跃迁,但这些基本上是有去无回的发射方式,每个能级差向下跃迁所产生的光即刻离开这个能级差而一去不复返,难以获得合适和足量的同能级差的光来触发受激辐射(图 2),因此是不可能产生激光的。激光的特点是:① 相位相干性很好,其相干时间和相干长度都很长;② 单色性很好,谱线很窄;③ 每频率的平均光粒子数即光子简并度很高;④ 发射光的方向性很好,即发射角  $\theta$  很小。例如<sup>[1.1]</sup>,一般稳频的氦氖激光器发射的  $6328 \text{ \AA}$  的相干时间为  $\tau_c = 1.3 \times 10^{-4} \text{ s}$ ,相干长度为  $l_c = 4 \times 10^6 \text{ cm} = 40 \text{ km}$ ,谱线宽度为  $6 \times 10^{-8} \text{ \AA}$  (目前选作长度基准的氦氖激光器发射  $3.39 \mu\text{m}$  的光,其线宽为  $3.39 \times 10^{-9} \text{ \AA}$ ),发射锥角为  $2\theta = 10^{-3} \times 180/\pi = 0.057^\circ$ 。

可见,要产生激光,首先必须保证受激辐射在辐射跃迁中占绝对主导地位。为此必须设法使每个原子等微观系统的能级差辐射的光能够回来触发这个能级差的

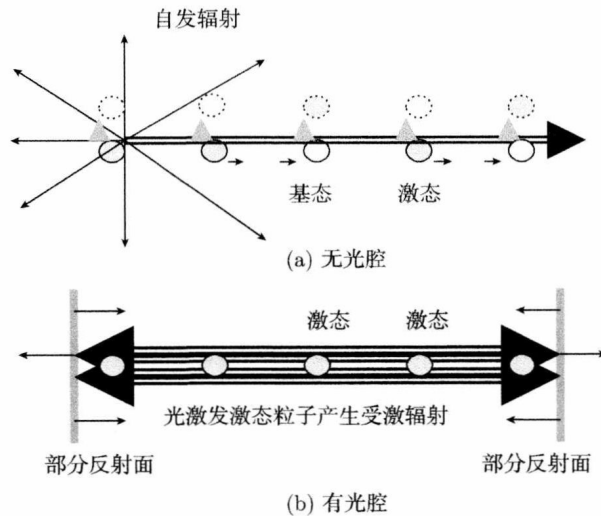


图 2 光腔的作用

向下辐射跃迁。显然将能级差系统的粒子集中起来，并将其所辐射的光反射回来触发受激发射，就可大为提高激发粒子使其处于同一激发态的效率，尤其更大提高了触发这同一激发态向下受激跃迁的效率，这一良性循环，将可随外来的激发或泵浦 (excitation or pumping) 强度的增加，很快在这个有集中的有源粒子和光反馈作用的有限空间中实现向下受激发射占绝对主导地位的要求 (开始有增益的粒子数反转条件)。如果其外来的泵浦强度达到或超过保证受激辐射强度足以抵消这有限空间的光损耗时，就可以产生激光 (laser=light amplification by stimulated emission of radiation)。

这个起集中有源粒子和光反馈作用的有限空间就是使自发辐射变成激光所必不可少的光波导腔 (optical waveguide cavity)。无论是气体激光器<sup>[1.1~1.3]</sup>、固体激光器<sup>[1.1~1.3]</sup>、染料激光器<sup>[1.1~1.3]</sup>、半导体激光器<sup>[1.1~1.10]</sup>、量子点激光器<sup>[1.11,1.23]</sup>还是纳米线激光器<sup>[1.16]</sup>等，都必须有其适当形式的光波导腔才能成为激光器产生激光。例如，由直接带隙半导体加 pn 结制成的发光二极管 (LED)，有电注入时即可发射自发辐射。历史上第一个半导体激光器就是发光二极管中无意和偶然形成有一定光反馈和导波作用的波导光腔时才能构成激光器，在注入非平衡载流子浓度达到阈值之后激射 (lasing) 而发射激光。

上述分析表明构成任何激光器的三个要素是：① 能提供有源粒子的激光有源材料；② 光波导腔；③ 激发有源粒子的泵浦机制。其中，必不可少的光波导腔的作用是：① 选择适当光频；② 集中有源粒子和光能并形成适当的腔内光强空间分布使其与有源粒子尽可能重合以增强其相互作用，降低阈值和使出射光束夹角尽

量小; ③ 提供适当的光反馈。

本书是关于用半导体和金属等材料实现上述光波导腔作用的设计理论。共分四章, 第 1 章表述所需的理论基础、所需半导体和金属材料的光学性质及其理论、所需光波导腔可能的一般结构方案。第 2、第 3 章分别系统讨论**集中反馈**方式的突变和缓变光波导结构与其光模式的空间和频谱分布的关系及其控制作用和设计。第 4 章讨论**分布反馈**方式的**水平腔**和**垂直腔**光波导结构与其光模式的空间和频谱分布的关系及其控制作用和设计。

郭长志

2015 年 8 月

# 目 录

## 前言

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 第 1 章 半导体波导及其传播模式                             | 1   |
| 概述                                            | 1   |
| 1.1 电磁过程的基本方程                                 | 2   |
| 1.1.1 麦克斯韦方程组                                 | 2   |
| 1.1.2 波动方程                                    | 3   |
| 1.2 光在波导结构中的传播                                | 7   |
| 1.2.1 波导方程                                    | 7   |
| 1.2.2 波导模式的正交关系                               | 12  |
| 1.3 介质的光学性质                                   | 17  |
| 1.3.1 介质的电极化及其克拉默斯-克勒尼希关系                     | 18  |
| 1.3.2 介质极化及其色散的电子论                            | 23  |
| 1.3.3 “自由”载流子的带内吸收和等离子振荡折射率                   | 29  |
| 1.3.4 半导体激光材料的光学性质                            | 39  |
| 1.3.5 金属材料的光学性质                               | 67  |
| 1.4 半导体激光器的波导结构                               | 79  |
| 1.4.1 波导结构的形成                                 | 79  |
| 1.4.2 半导体激光器波导的理论模型                           | 88  |
| 第 2 章 突变波导                                    | 94  |
| 2.1 三层平板波导                                    | 94  |
| 2.1.1 电磁模型及其解的性质                              | 94  |
| 2.1.2 馈入模式 —— 模式折射率大于折射率最高的芯层折射率              | 96  |
| 2.1.3 导波模式 —— 模式折射率小于折射率最高的芯层折射率而大于限制层<br>折射率 | 102 |
| 2.1.4 辐射模式                                    | 169 |
| 2.1.5 表面等离子体波导                                | 183 |
| 2.1.6 端面出射                                    | 212 |
| 2.1.7 端面反射                                    | 239 |
| 2.1.8 不平整(粗糙)界面的散射                            | 280 |
| 2.2 自发发射因子的经典模型                               | 290 |

---

|       |                                  |     |
|-------|----------------------------------|-----|
| 2.2.1 | 电磁辐射的经典理论                        | 291 |
| 2.2.2 | 半导体波导内一个电子-空穴对作为一个电偶极子的自发辐射功率和效率 | 295 |
| 2.2.3 | 半导体波导中的自发发射因子                    | 299 |
| 2.2.4 | 半导体波导结构对侧向模式像散因子的影响              | 303 |
| 2.2.5 | 半导体激光器自发发射因子的测量                  | 305 |
| 2.3   | 圆柱形波导                            | 320 |
| 2.3.1 | 圆柱波导及其导波模式                       | 321 |
| 2.3.2 | 圆柱折射率突变波导的导波模式                   | 326 |
| 2.3.3 | 各种偏振的导波模式                        | 331 |
| 2.3.4 | 导波模式的截止行为                        | 337 |
| 2.3.5 | 弱波导                              | 342 |
| 2.3.6 | 数值结果                             | 347 |
| 2.3.7 | 微盘波导的自发发射因子                      | 358 |
| 2.4   | 矩形波导                             | 369 |
| 2.4.1 | 圆谐分析                             | 371 |
| 2.4.2 | 远离截止近似                           | 389 |
| 2.4.3 | 等效折射率近似                          | 397 |
| 2.5   | 多层平板波导                           | 411 |
| 2.5.1 | 四层平板波导                           | 412 |
| 2.5.2 | 条形弱自建波导                          | 443 |
| 2.5.3 | 质量迁移隐埋异质结构中的五层平板波导               | 463 |
| 2.6   | 突变波导模式的频谱结构                      | 492 |
| 2.6.1 | 连续谱                              | 492 |
| 2.6.2 | 分立谱                              | 494 |

# 第 1 章 半导体波导及其传播模式

## 概 述

半导体激光器中,为了实现激射(振荡),必须利用波导腔中的谐振现象;而为了降低阈值,实现室温连续激射,则必须使注入非平衡载流子和所生的光场集中在波导腔的有源区内;为了使辐射出去的光场能量集中和稳定,还必须使整个波导腔的结构能够保证稳定的单基横模甚至单纵模激射或单频激射。半导体激光器(图 1.0-1)从同质结构到异质结构,从低温脉冲激射到室温连续激射,激射波长从 $0.9\mu\text{m}$ 左右的近红外到可见光和远红外光的发展,一方面是依靠新材料和新工艺的探索,另一方面是依靠对激射过程,包括对波导结构及其传播模式的研究才取得的<sup>[1.10]</sup>。

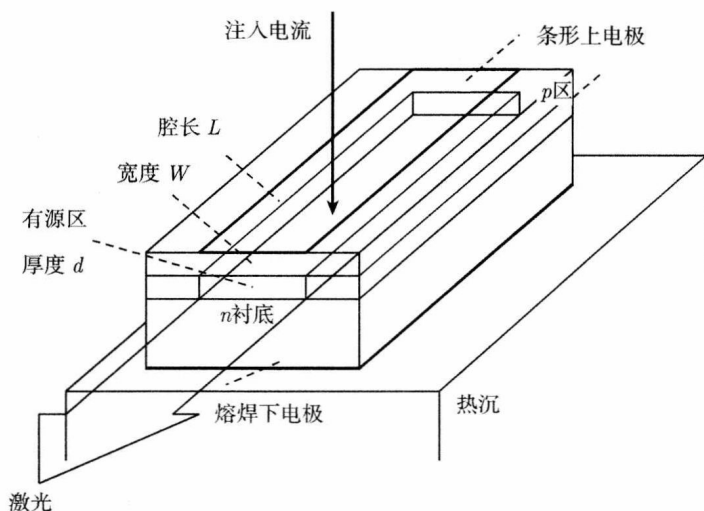


图 1.0-1 半导体激光器的基本结构要素

半导体波导一般是利用以半导体材料为主的不同材料和注入非平衡载流子等的光学性质,按一定的几何分布组成的有利于光场集中并定向传播的结构。定向传播的波导轴线,可以是笔直的,也可以是弯曲的。在一定的波导结构中,只允许一定的偏振性、一定的场强空间分布、一定几何形状的波阵面(等相面)、一定频谱的电磁波在其中传播,因而辐射出去的光场也具有一定的光束结构和频谱结构。也就是说,一定的波导结构确定一定的内外传播模式。从光在传播过程中所应遵从的

麦克斯韦方程组及由其导出的波动方程和波导方程, 结合实际的材料, 无论是介电(绝缘体)、半导体或金属的光学或电磁性质分布和边界条件, 可以从理论上定量地推知波导结构及其传播模式之间的内在联系<sup>[1.1~1.16]</sup>。这方面的分析工作是理论认识和工程设计的重要依据。

半导体激光器的波导模式理论, 在很大程度上继承了微波理论的成果, 同时也赋予了新的光学处理<sup>[1.17~1.22]</sup>。因此, 在讨论半导体激光器的波导模式问题时, 既可以从求解一定介质分布和边界条件的波导方程入手, 也可以从分析波导腔内光的反射、折射、干涉和衍射现象入手。因为这两者, 波动光学和光线光学, 在实质上是等价的, 所以应该得出完全相同的结果。前者方法系统, 后者较为直观。下面将以电磁波理论为主, 导出主要结果, 而以唯象光学作为补充, 讨论结果的物理(光学)含义。

半导体激光器的波导模式理论与集成光学理论<sup>[1.9, 1.10, 1.23~1.27]</sup>有若干共同的内容。前者主要讨论有源介质波导模式的空间结构和频谱结构、模式竞争和选模机制、模式稳定性等问题, 其光源多在波导腔内; 后者着重讨论无源介质波导模式的馈入、馈出、耦合、分离、组合、转换、调变等问题, 其光源一般在波导腔之外。

半导体激光器的波导模式理论的早期研究主要是结合如何在半导体中实现激射、降低阈值和延长工作寿命的问题, 近年来结合各种波导光腔结构改善稳态和瞬态的模式行为及其工作稳定性、提高调制速率、实现动态单模(单频)、光电器件集成、微型化的研究, 其成果不但推动了基本半导体激光器技术的发展, 而且带动和促进了新材料、新结构、新波导机制和新理论, 例如, 微腔和光子的量子尺寸效应<sup>[1.10, 1.13]</sup>、光子晶体激光器<sup>[1.10, 1.14]</sup>、表面等离子体波导<sup>[1.10, 1.15]</sup>、量子点激光器<sup>[1.10, 1.11]</sup>和纳米线激光器<sup>[1.16]</sup>、单光子和光集束化的波导等问题的研究<sup>[1.12]</sup>。

## 1.1 电磁过程的基本方程<sup>[1.7]</sup>

### 1.1.1 麦克斯韦方程组

光在产生和吸收过程中虽然更多表现其电磁粒子性, 但在传播过程中, 却充分表现其电磁波的本质。电磁波是某种电磁场分布的传播。电磁场可以用电场强度矢量  $E$  [ $V \cdot cm^{-1}$ ], 电位移矢量  $D$  [ $As \cdot cm^{-2}$ ], 磁场强度矢量  $H$  [ $A \cdot cm^{-1}$ ], 磁感应强度  $B$  [ $Vs \cdot cm^{-2}$ ] 这四个与空间  $(x, y, z)$  和时间  $(t)$  有关的基本物理量来描述。影响电磁场分布和传播过程的, 一方面是所在介质的电容率  $\epsilon$  [ $A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot cm^{-1}$ ]、磁导率  $\mu$  [ $V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot cm^{-1}$ ]、电导率  $\sigma$  [ $A \cdot V^{-1} \cdot cm^{-1}$ ] 等电磁性质, 另一方面是所在介质中的电荷密度  $\rho$  [ $A \cdot s \cdot cm^{-3}$ ] 和电流密度矢量  $j$  [ $Acm^{-2}$ ] 的分布。它们之间的关系为

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.1-1a, b, c, d)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1-1e, f, g)$$

从实验出发的观点看, 式 (1.1-1a) 是静电库仑定律的概括和推广, 即认为库仑定律在动电情况下仍然成立; 式 (1.1-1b) 是静磁库仑定律和不存在独立磁荷这一事实的概括和向动磁情况的推广; 式 (1.1-1c) 是法拉第电磁感应定律和楞次定律的概括; 式 (1.1-1d) 是电流产生磁场这一事实的概括和向位移电流情况的推广, 即认为位移电流密度  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  也和传导电流密度  $\mathbf{j}$  一样产生磁场。式 (1.1-1a~d) 构成麦克斯韦方程组, 它是一切电磁场变化必须遵从的规律。式 (1.1-1e) 描述介质的电极化性质; 式 (1.1-1f) 描述介质的磁化性质; 式 (1.1-1g) 描述介质的导电性质 (如果  $\sigma$  与场强无关, 则为欧姆定律), 在光频电磁过程中, 电导率  $\sigma$  在低频时主要反映电导过程中载流子在介质中的碰撞损耗, 在光频中还将包含载流子电动过程中的辐射等损耗性质。式 (1.1-1e, j, g) 是三个描述介质性质的物性 (本构 (constitutive)) 方程。如果  $\varepsilon$ 、 $\mu$  和  $\sigma$  是与场强无关的标量, 则只能描述各向同性和线性近似成立的介质。在介质出现突变的界面上, 式 (1.1-1a~d) 相应地化为

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s, \quad B_{n1} - B_{n2} = 0, \quad E_{t1} - E_{t2} = 0, \quad H_{t1} - H_{t2} = j_s \quad (1.1-1h, i, j, k)$$

这是在突变界面上的麦克斯韦方程组。式 (1.1-1h) 表示在突变界面上 1、2 两侧介质中的电位移矢量不相等, 其差等于界面上的表面电荷密度  $\rho_s$ ; 式 (1.1-1i) 表示在突变界面上两侧介质中的磁感应矢量的法向分量总是相等的; 式 (1.1-1j) 表示在突变界面上两侧介质中的电场强度矢量的切向分量总是相等的; 式 (1.1-1k) 表示在突变界面上两侧介质中的磁场强度矢量的切向分量不相等, 其差等于界面上的表面电流密度  $j_s$ 。如果在界面上无面电荷和面电流分布, 则式 (1.1-1h~k) 的右边皆为零, 有关的四个分量在界面上皆连续。这时由于在光频情况下, 介质的磁导率通常与真空磁导率几乎没有差别, 即  $\mu \approx \mu_0$ , 虽然由电场强度矢量构成的电力线通过界面时总有所偏折, 但是由磁场强度矢量构成的磁力线通过界面时则不偏折, 即磁场强度矢量本身在突变界面上总是连续的 ( $H_1 = H_2$ )。

### 1.1.2 波动方程

对于各向同性和线性近似成立的介质, 麦克斯韦方程组式 (1.1-1a~d) 和物性方程式 (1.1-1e~g) 是线性的, 可以将电磁波分解为单色波的叠加, 故可先集中讨论一个“单色 (单频)”波的行为。即可设整个电磁场共同随时间作简谐变化, 其圆频率为  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  为频率, 则各电磁场皆包含一个共同的与时间  $t$  有关的因子  $e^{i\omega t}$ ,  $i \equiv \sqrt{-1}$ , 这时式 (1.1-1d) 化为

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon) \mathbf{E} \equiv i\omega\tilde{\varepsilon} \mathbf{E} = \tilde{\varepsilon} \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (1.1-1l)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_r + i\varepsilon_i \equiv \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}, \quad \tilde{n}^2 \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \varepsilon_{R,r} + i\varepsilon_{R,i} \equiv \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

$$\tilde{k}^2 \equiv \omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon} = k_0^2 \tilde{n}^2 \equiv \tilde{\beta}^2 \quad (1.1-1m, n, o)$$

$$k_0 \equiv \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \lambda_0 \nu$$

$$\varepsilon_{R,r} = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_{R,i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} = -\varepsilon_2 \equiv \frac{-\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \quad (1.1-1s, t, u)$$

电导率  $\sigma$  的存在反映介质是有损耗的。设

$$\tilde{n} = \bar{n}_r + i\bar{n}_i \equiv \bar{n} - i\bar{k}, \quad \tilde{\beta} \equiv \beta_r + i\beta_i \quad (1.1-1v)$$

由式 (1.1-1n) 和式 (1.1-1v) 得

$$\tilde{n}^2 = \bar{n}^2 - \bar{k}^2 - i2\bar{n}\bar{k} \equiv \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1 \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \bar{n}^2 - \bar{k}^2 = \varepsilon_{R,r}$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = 2\bar{n}\bar{k} = -\varepsilon_{R,i} \quad (1.1-1w)$$

$$\bar{k} = \frac{\varepsilon_2}{2\bar{n}} \rightarrow \varepsilon_1 = \bar{n}^2 - \left(\frac{\varepsilon_2}{2\bar{n}}\right)^2 \rightarrow \bar{n}^4 - \varepsilon_1 \bar{n}^2 - \frac{\varepsilon_2^2}{4} = 0 \rightarrow \bar{n}^2 = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} > 0$$

$$\varepsilon_1 = 0 \rightarrow \bar{n}^2 = \frac{\varepsilon_2}{2} \rightarrow \bar{n} = \frac{\varepsilon_2}{2\bar{n}} = \bar{k}$$

则

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, \quad \bar{k} = \frac{\varepsilon_2}{2\bar{n}}$$

$$\bar{k}^2 \ll \bar{n}^2 \rightarrow \bar{n} \approx \sqrt{\varepsilon_1}, \quad \bar{k}^2 > \bar{n}^2 \rightarrow \varepsilon_1 < 0 \quad (1.1-1x)$$

$$\beta_r = k_0 \bar{n} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \beta_i = -k_0 \bar{k}, \quad \lambda \equiv \frac{\lambda_0}{\bar{n}} \quad (1.1-1y)$$

$\tilde{\varepsilon}, \tilde{n}$  分别是介质的复电容率和复折射率;  $\tilde{k}, \tilde{\beta}$  分别是电磁波在介质中的复波数和复传播常数, 在均匀的无限介质中二者是相等的;  $\bar{n}, \bar{k}$  分别是介质的折射率和消光系数;  $k_0, \lambda_0$  分别是电磁波在真空中的波数和波长;  $\lambda$  是电磁波在折射率为  $\bar{n}$  的介质中的波长。  $\varepsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-14} \text{F} \cdot \text{cm}^{-1} [\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}]$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-9} \text{H} \cdot \text{cm}^{-1} [\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}]$ ,  $c_0 = 2.9979 \times 10^{10} \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , 分别是真空中的电容率、磁导率和光速。

在  $\rho = 0$  的介质中, 由式 (1.1-1a) 得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\tilde{\varepsilon} \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \left( \frac{\nabla \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} \right) \quad (1.1-2a)$$

取式 (1.1-1c) 的旋度, 则由式 (1.1-1l), 特别是由位移电流假设, 得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.1-2b)$$

将式 (1.1-2a) 代入即得矢量波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left[ \mathbf{E} \cdot \left( \frac{\nabla \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} \right) \right] - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1-2c)$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \frac{E_x}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_x}{\partial x} + \frac{E_y}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_y}{\partial y} + \frac{E_z}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_z}{\partial z} \right) - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1-2d)$$

其分量方程分别为

$$\nabla^2 E_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E_x}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_x}{\partial x} + \frac{E_y}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_y}{\partial y} + \frac{E_z}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_z}{\partial z} \right) - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1-2e)$$

$$\nabla^2 E_y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E_x}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_x}{\partial x} + \frac{E_y}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_y}{\partial y} + \frac{E_z}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_z}{\partial z} \right) - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1-2e')$$

$$\nabla^2 E_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E_x}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_x}{\partial x} + \frac{E_y}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_y}{\partial y} + \frac{E_z}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_z}{\partial z} \right) - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1-2e'')$$

如果在一定区域内  $\tilde{\varepsilon}$  随空间变化比较缓慢, 则

$$\left( \frac{\nabla \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} \right) \approx 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0 \quad (1.1-2f)$$

代入式 (1.1-2c), 则近似为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left( \frac{\tilde{n}}{c_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \equiv \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.1-2g)$$

其分量方程分别为

$$\nabla^2 E_x = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 E_y = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 E_z = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (1.1-2h)$$

皆可写成标量方程的形式

$$\nabla^2 \psi = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.1-2i)$$

故可称为标量波动方程。对磁场也可得出类似的标量波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \left( \frac{\tilde{n}}{c_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \equiv \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.1-2j)$$

其中,  $\tilde{v}$  是其复传播速度

$$\tilde{v} \equiv \frac{c_0}{\tilde{n}} = \frac{\omega}{\tilde{\beta}} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (1.1-2k)$$

式 (1.1-2g) 和式 (1.1-2j) 就是电磁波在均匀或缓变复电容率介质中所应满足的标量波动方程。

假设整个电磁场共同随时间作简谐变化, 实即假设电磁场量的时间变量  $t$  可与空间变量  $(x, y, z)$  分离, 即电磁场量可看成只含空间变量的函数和只含时间变量的公因子  $T(t)$  的乘积:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{E}(x, y, z) T(t), \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{H}(x, y, z) T(t) \quad (1.1-2l)$$

时间公因子可取为

$$T(t) = e^{i\omega t} \text{ 或 } e^{-i\omega t} \quad (1.1-2m)$$

而不失普遍性 [见式 (1.2-1e)], 空间因子则满足亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) + k_0^2 \tilde{n}^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H}(x, y, z) + k_0^2 \tilde{n}^2 \mathbf{H}(x, y, z) = 0 \quad (1.1-2n)$$

电磁波传播的功率流密度由坡印亭 (Poynting) 矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{A} \cdot \text{V} \cdot \text{cm}^{-2}] \quad (1.1-2o)$$

如果  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  皆用复数表示 (仅其实部有物理意义), 则电磁波对时间平均的功率流密度可表为

$$\mathbf{P} \equiv \bar{\mathbf{S}} = \text{Re} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \quad [\text{A} \cdot \text{V} \cdot \text{cm}^{-2}] \quad (1.1-2p)$$

式中,  $*$  表示复共轭 (complex conjugate) 量。

在无限大的均匀介质中, 电磁场有一种最简单的传播方式, 它是麦克斯韦方程组的平面波解。所谓平面波是指在垂直于传播方向的平面上一切电磁场分量皆不随空间变化, 如取  $z$  轴与传播方向重合,  $\tilde{\beta} \cdot \mathbf{r} = \tilde{\beta}_x 0 + \tilde{\beta}_y 0 + \tilde{\beta}_z \hat{z} = \tilde{\beta}_z \hat{z}$ , 则平面波解的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (1.1-2q)$$

如果再取  $x$  轴与电场强度分量  $E_x$  重合, 则由式 (1.1-2g)、式 (1.1-2j) 和式 (1.1-2p), 并取式 (1.1-2m) 的前者, 得

$$E_x(z, t) = A e^{i(\omega t - \tilde{\beta}_z z)} = A e^{\beta_i z} e^{i(\omega t - \beta_r z)}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0 \quad [\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}] \quad (1.1-2r)$$

$$\begin{aligned} H_x = 0, \quad H_y &= \frac{\tilde{\beta}}{\mu_0 \omega} A e^{i(\omega t - \tilde{\beta}_z z)} \left( = \frac{\tilde{\beta}}{\mu_0 \omega} E_x \right) \\ &= \frac{A \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}}{\mu_0 \omega} e^{i \tan^{-1}(\beta_i / \beta_r)} e^{\beta_i z} e^{i(\omega t - \beta_r z)}, \quad H_z = 0 \quad [\text{A} \cdot \text{cm}^{-1}] \end{aligned} \quad (1.1-2s)$$

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = \frac{A^2 \beta_r}{2 \mu_0 \omega} e^{2 \beta_i z} \equiv P_0 e^{-\alpha z} \quad [\text{A} \cdot \text{V} \cdot \text{cm}^{-2}] \quad (1.1-2t)$$

其中,  $\alpha$  是介质的吸收系数

$$\alpha \equiv \frac{-dP_z/P_z}{dz} = -\frac{1}{P_z} \frac{dP_z}{dz} = -2\beta_i \frac{\text{式 (1.1-1y)}}{2k_0\bar{k}} = \frac{2\omega\bar{k}}{c_0} = \frac{4\pi\bar{k}}{\lambda_0} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (1.1-2u)$$

因而

$$\beta_i = -k_0\bar{k} = -\frac{\alpha}{2}, \quad \beta_r = k_0\bar{n} = \frac{2\pi}{\lambda} > 0 \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (1.1-2v)$$

若取式 (1.1-2r) 和式 (1.1-2s) 的实部, 则正向平面波场解的实数表达式为

$$E_x(z, t) = Ae^{\beta_i z} \cos(\omega t - \beta_r z) = Ae^{-\frac{\alpha}{2}z} \cos(\omega t - \beta_r z), \quad E_y = 0, \quad E_z = 0 \quad (1.1-2w)$$

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{A}{\mu_0\omega} \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} e^{\beta_i z} \cos \phi, \quad H_z = 0, \quad \phi \equiv \omega t - \beta_r z + \arctan \frac{\beta_i}{\beta_r} \quad (1.1-2x)$$

其等相面方程为

$$\phi = \omega t - \beta_r z + \arctan \frac{\beta_i}{\beta_r} = \text{常数} \rightarrow z = \frac{\omega}{\beta_r} t - \frac{1}{\beta_r} \left( \phi - \arctan \frac{\beta_i}{\beta_r} \right) \quad (1.1-2y)$$

是垂直于传播方向的平面。这等相面的传播速度 (相速) 为

$$v \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta_r} = \frac{c_0}{\bar{n}} \quad (1.1-2z)$$

可见, 如果不考虑介质的色散, 则平面波具有一系列的特点: ① 它能以任何频率传播; ② 它是横波; ③ 它是线偏振的; ④ 其电磁场在垂直于传播方向的平面上是均匀的; ⑤ 其波阵面或等相面垂直于传播方向的平面; ⑥ 如果  $\alpha = -2\beta_i = 0$ , 则电场和磁场同相变化, 否则在电场和磁场的变化之间有一定相位差; ⑦ 当  $\alpha = -2\beta_i > 0$  或  $= 0$  或  $< 0$  时, 电磁波的振幅将随着传播距离分别按指数规律减小、不变或增大, 只有在无损耗和增益的介质中, 其电磁场的分布才具有严格的周期性, 即波长, 这时才是严格意义下的平面波; ⑧ 其能流方向不受限制, 而且总与传播方向一致。当然, 无限波阵面的平面波是不可能存在的, 因为其传播能量将为无限大。但是, 在比波长大得多的一定空间范围内是可能具有平面波的上述特点的。在有限空间内传播的电磁波, 不可能单纯是上述平面波, 但有时可以看成是许多平面波的某种叠加。

## 1.2 光在波导结构中的传播<sup>[1.7]</sup>

### 1.2.1 波导方程

#### 1. 波导解式

直腔光波导的一般形式, 是嵌在不同介质中的直柱状介质, 其横截面的几何形状和  $\varepsilon$  在横截面的分布是任意的, 而沿着轴线方向则相同 (图 1.2-1A)。由于介质

的电磁性质不均匀和界面的影响,电磁波在其中的传播方式不可能是任意的。令轴线方向为  $z$ , 则描述其传播方式的波导解式应该具有可以分别分离出  $z$  和  $t$  变量的性质, 而且皆含有共同的  $z$  函数  $Z(z)$  和  $t$  函数  $T(t)$  两个因子:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{E}(x, y)Z(z)T(t) \quad (1.2-1a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{H}(x, y)Z(z)T(t) \quad (1.2-1b)$$

这时标量波动方程 (1.1-2g) 化为

$$\left[ \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial y^2} \right] Z(z)T(t) + \mathbf{E}(x, y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} T(t) = \mu_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}(x, y) Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

两边除以  $\mu_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}(x, y) Z(z) T(t)$ :

$$\frac{1}{\mu_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}(x, y)} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{\mu_0 \tilde{\epsilon} Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -a^2 \quad (1.2-1c)$$

$$\frac{1}{\mathbf{E}(x, y)} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial y^2} \right] + a^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = b^2 \quad (1.2-1d)$$

式中,  $a$  和  $b$  是两个分离常数。

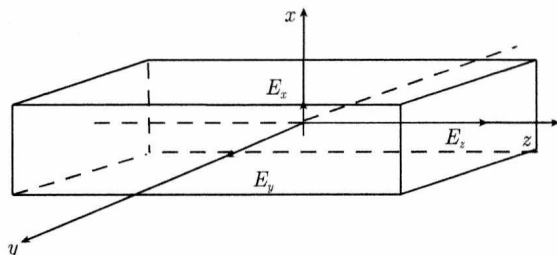


图 1.2-1A 直腔柱状介质波导

由式 (1.2-1c) 和式 (1.2-1d) 分别求出

$$T(t) = Ae^{iat} + Be^{-iat}, \quad Z(z) = Ce^{ibz} + De^{-ibz} \quad (1.2-1e, f)$$

其中,  $A, B, C, D$  均为常数。只取含有  $e^{iat}$  和  $e^{-ibz}$  的项, 并将常数归并到  $\mathbf{E}(x, y)$  中去, 则波导解式可写成

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(at-bz)} \equiv \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - \tilde{\beta}_z z)} \quad (1.2-1g)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{i(at-bz)} \equiv \mathbf{H}(x, y)e^{i(\omega t - \tilde{\beta}_z z)} \quad (1.2-1h)$$

可见, 例如对比平面波情况式 (1.1-2r) 和式 (1.1-2s), 分离常数  $a \equiv \omega$  和  $b \equiv \tilde{\beta}_z$  分别具有电磁波的圆频率和复传播常数的含义, 表示整个电磁场一起随着时间作

简谐变化, 并一起沿  $z$  轴传播。这样的波导解式 (1.2-1g) 和式 (1.2-1h) 必将满足麦克斯韦方程组。例如, 将其代入标量波动方程式 (1.1-2g) 和式 (1.1-2j), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y)}{\partial y^2} + (\tilde{k}^2 - \tilde{\beta}_z^2) \mathbf{E}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(x, y)}{\partial y^2} + (\tilde{k}^2 - \tilde{\beta}_z^2) \mathbf{H}(x, y) &= 0, \quad \tilde{k}^2 \equiv \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} \end{aligned} \quad (1.2-1i)$$

表明电磁波的电磁场三个分量都满足同样的直腔波导方程, 但下述分析将表明电磁场的横向分量还将满足另一组方程。

## 2. 电磁场横向分量方程

将式 (1.2-1g) 和式 (1.2-1h) 代入麦克斯韦方程组, 则式 (1.1-1c) 和式 (1.2-1d) 分别化为

$$-i\tilde{\beta}_z E_x(x, y) - \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} = -i\mu_0 \omega H_y(x, y), \quad \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} = -i\mu_0 \omega H_z(x, y) \quad (1.2-1j, k)$$

$$\frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + i\tilde{\beta}_z H_y(x, y) = i\omega \tilde{\epsilon} E_x(x, y), \quad -i\tilde{\beta}_z H_x(x, y) - \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} = i\omega \tilde{\epsilon} E_y(x, y) \quad (1.2-1l, m)$$

$$\frac{\partial H_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x, y)}{\partial y} = i\omega \tilde{\epsilon} E_z(x, y) \quad (1.2-1n)$$

将式 (1.2-1j) 乘以  $\tilde{\beta}_z$ :

$$-i\tilde{\beta}_z^2 E_x(x, y) = \tilde{\beta}_z \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} - i\mu_0 \omega \tilde{\beta}_z H_y(x, y)$$

将式 (1.2-1j) 乘以  $\mu_0 \omega$ :

$$i\mu_0 \omega^2 \tilde{\epsilon} E_x(x, y) = \mu_0 \omega \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + i\mu_0 \omega \tilde{\beta}_z H_y(x, y)$$

再将上述两式相加:

$$i\left(\omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} - \tilde{\beta}_z^2\right) E_x(x, y) = \tilde{\beta}_z \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} + \mu_0 \omega \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y}, \quad \tilde{k}^2 \equiv \frac{\omega^2}{c_0^2} \tilde{\epsilon} = k_0^2 \tilde{n}^2$$

注意到波导中电磁波的波数  $\tilde{k}$  和传播常数  $\tilde{\beta}_z$  的区别, 类此, 由式 (1.2-1i)~ 式 (1.2-1m) 可求出

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{-i}{\tilde{k}^2 - \tilde{\beta}_z^2} \left[ \tilde{\beta}_z \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \right], \\ E_y(x, y) &= \frac{i}{\tilde{k}^2 - \tilde{\beta}_z^2} \left[ -\tilde{\beta}_z \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (1.2-1o, p)$$