國家科學叢書

高等工程數學

（第四版・下冊）

Erwin Kreyszig 著　　丁錫鏞 校閱

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

(Fourth Edition)

高等工程數學

（下冊）

原著者：Erwin Kreyszig
譯　者：黃新鈺・郭志鳴・張介
校閱者：丁錫鏞　博士

國家書店有限公司印行

高等工程數學(下册)

定價：新台幣壹佰叁拾元整

原著者：Erwin Kreyszig
譯　者：黃新鈺・郭志鳴・張介
校閱者：丁錫鏞
總策劃：林洋慈
發行者：國家出版社
總經銷：國家書店有限公司
郵　撥：一〇四八〇一帳戶
公　司：台北市新生南路一段126之8號三樓
電　話：3912425・3914261・3942824
3926748・3917918・3926749
印刷所：建昇印刷廠

中華民國七十一年六月初版
行政院新聞局局版台業字第零陸叁貳號

高等工程數學（下册）

目　　錄

11

偏微分方程式

【*Partial Differential Equation*】

偏微分方程式之發生與各種物理及幾何問題有關，當這些問題所涉及之函數係基於兩個或更多之自變數時，即產生偏微分方程式。這些自變數或許爲時間，以及一種或多種之空間座標。本章將致力於探討一些發生在工程應用上之最重要偏微分方程式。我們將從各種物理原理導出這些方程式，並考慮解答初值與邊界值（Boundary value）問題之方法，亦即求解那些相對應於已知物理情況之各方程式的方法。

在 11-1 節裡我們將定義一偏微分方程式解答之概念。11-2 至 11-4 節專研究有關繩索振動之一維波動方程式（One-dimensional wave equation）。熱傳方程式（Heat equation）於 11-5 及 11-6 節中加以考慮，二維波動方程式（Two-dimensional wave equation）包含在 11-7 至 11-10 節中，而拉普拉斯方程式（Laplace's equation）則留至 11-11 及 11-12 兩節中。

在 11-13節裡，我們將見到偏微分方程式也能利用第五章所介紹的拉普拉斯變換（Laplace transformation）以求解。

研讀本章前之必修課題：線性常微分方程式（第二章）及符立爾級數（第十章）

短期課程可予省略之節數：11-6，11-9 及 11-10 各節。

參考資料：附錄 1 的 E 部份。

習題答案：附錄 2。

11-1 基本觀念（*Basic Concepts*）

一方程式包含某（未知）兩個或更多個獨立變數函數之一個或是更多的偏導數時，謂之**偏微分方程式**。這個方程式內所包含偏導數的最高階數，即爲偏微分方程式的**階數**。

正如前面所討論的常微分方程式的情形，如果偏微分方程式內的應變數（即函數）與其所有各種偏導數，都是一次方時，那麼該方程式稱之爲**線性**。如果偏微分方程式內各項均含有應變數或是其偏導數時，那麼這個方程式稱爲**齊性**，否則就稱爲**非齊性**。

例題 1　重要之二階線件偏微分方程式（*Important linear partial equations of the second order*）

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 一維波動方程式

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 一維熱傳方程式

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 二維拉普拉斯方程式

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ 二維波義生方程式

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ 三維拉普拉斯方程式

上式中 c 爲常數，t 爲時間，x，y，z 爲笛卡兒直角空間坐標，(4) 式爲非齊性（$f \neq 0$），其餘均爲齊性。

一偏微分方程式在其各自變數空間的區域 R 以內的解答，係一函數，其在包含 R 的某領域內具有各偏導數，且在 R 內任何處的值，經代入後，都能滿足原偏微分方程式的關係。（通常僅需要求在 R 的邊界上，該函數具有連續性，並在 R 內含有各導數，且滿足原方程式。）

一般來說，一偏微分方程式之全部解答，爲數可能很多。例如下列函數：

(6) $$u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln(x^2 + y^2),$$

彼此雖全不相同，但不難校驗出都是上列偏微分方程式(3)的解答。稍後當可看出，某一已知物理問題的偏微分方程式，其唯一解答（Unique solution）可由該問題所附加的物理情況求出。例如，某些問題中，所求解答函數在其邊界上的值，皆屬已知，（此即所謂**邊界條件**）；又如在以時間 t 爲自變數的另一類問題中，其解答在 $t = 0$ 時的值，常早已設定（此即所謂**初始條件**）。

須知如果一常微分方程式爲線性及齊性，那麼從已知的解答可以由疊加而取得其他解答。就齊性線性偏微分方程式而言，其情況極爲相同。實際上下述的定理更可成立。

基本定理 1　（**線性齊性偏微分方程式**）（*Linear homogeneous partial differential equations*）

如果 u_1 與 u_2 為線性齊性偏微分方程式在某一區域內的任何二個解答，則：

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

（c_1 與 c_2 為任意常數）亦必成為該方程式在同一區域內的解答。

這個重要定理的證明手續，完全和 2-1節內定理 1 相同，留給讀者自行證明。

第 11-1 節　習題

試證下列各函數爲波形方程式(1)的解答，其中對(1)內的常數 c 選取適當的值。並繪出此函數於空間中之曲面圖形。

1. $u = x^2 + t^2$
2. $u = x^2 + 9t^2$
3. $u = \cos t \sin x$
4. $u = \sin t \sin x$
5. $u = \cos ct \sin x$
6. $u = \sin \omega ct \sin \omega x$

試證下列各函數（其中 v 與 w 爲任意二次微分的函數）爲(1)的解答，但在習題 7 中 $c = 1$。

7. $u(x, t) = v(x + t) + w(x - t)$
8. $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$

試證下列各函數爲熱傳方程式(2)的解答。

9. $u = e^{-t} \cos x$

10. $u = e^{-t} \sin x$

11. $u = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x$

試證下列各函數是拉普拉斯方程式(3)的解答。並繪出此函數在空間中曲面的圖形。

12. $u = x^2 - y^2$

13. $u = x^3 - 3xy^2$

14. $u = 3x^2 y - y^3$

15. $u = e^x \cos y$

16. $u = e^x \sin y$

17. $u = \ln(x^2 + y^2)$

18. $u = \arctan(y/x)$

19. $u = \sin x \sinh y$

20. $u = \sin x \cosh y$

21. 試證 $u(x, y) = a \ln(x^2+y^2) + b$ 滿足拉普拉斯方程式(3)，並決定 a 與 b 令 u 滿足於圓周 $x^2+y^2=1$ 上 $u=0$，和在圓周 $x^2+y^2=4$ 上 $u=3$ 的邊界條件。繪出此函數所表示之一種曲面的圖形。

22. 試證 $u = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 為(5)的一個解答。

和常微分方程式的關係

如果一偏微分方程式只含有對其中某一自變數的導數，則可當做同一常微分方程式來求解，而將另外的自變數當作參數看待。試解下列各方程式，其中 $u = u(x, y)$。

23. $u_x = 0$

24. $u_y = 0$

25. $u_{xx} = 0$

26. $u_{xx} + u = 0$

試解下列各偏微分方程式系統。

27. (a) $u_{xx} = 0$, (b) $u_{yy} = 0$

28. $u_x = 0$, $u_y = 0$

29. $u_{xx} = 0$, $u_{xy} = 0$, $u_{yy} = 0$

30. $u_{xx} = 0$, $u_{xy} = 0$

令 $u_x = p$ 以求解

31. $u_{xy} = u_x$

32. $u_{xy} + u_x = 0$

33. $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

34. 試證如果一曲面 $z = z(x, y)$ 的等值曲線 z = 常數是平行於 x-軸的直線，則 z 為微分方程式 $z_x = 0$ 的解答。試舉其例。

35. 試證方程式 $yz_x - xz_y = 0$ 的解答 $z = z(x, y)$ 來表示迴轉的曲面（Surface of revolution）。試舉其例。提示：令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，並證明方程式變成 $Z_\theta = 0$。

11-2 模型化：繩索之振動一維波動方程式(*Modeling : Vibrating String. One-Dimensional Wave Equation*)

在本節內，將導出有關在一平面內作小型橫向運動的彈性繩索所構成之第一個重要偏微分方程式。這繩索預先拉長至 l 再固定其兩端點。$t=0$ 時，使此繩索沿橫向加以變位，再予以釋放，則該繩索必將來回振動。這個問題即在求出該繩索上各點今後的運動情形，亦即求得以自變數 x（沿兩端點的軸向）及時間 $t>0$ 的偏移函數 $u(x, t)$，如圖 230 所示。

當推導對應於某一已知物理問題的微分方程式時，往往必須假設一些簡化的理想情況，令最後所得的方程式，不致過於複雜。在討論常微分方程式時，已知這個重要的事實，就偏微分方程式而言，其情形亦復相似。

處理目前的問題所需之假設如下所述：

1. 該繩索每單位長度的質量是一常數（均勻繩索）。並且有充分的彈性，而無任何抗拒彎曲的能力。
2. 繩內拉緊時所受的張力極大，令重力對其運動的影響可以加以忽略。
3. 繩上各點始終均在一垂直平面內作小規模的橫向運動，其偏移或振幅的值遠較兩端點的距離為小，如此則繩上任意一處的偏角與斜率的絕對值很小。

根據以上對各種情況之假設，可望導出一微分方程式，其解答 $u(x, t)$ 將能準確的敘述一條承受有大張力之小質量均勻"實際"繩索的小型振動。

欲求獲得此一微分方程式，可先假想切一小段繩索，而考慮其受各種力量作用的情形（圖 230）。因已假設這繩索無抵抗彎曲力矩的能力，所以各處的張力必沿其切線方向。假定 T_1 與 T_2 爲此一小段繩索兩端 P 與 Q 的張力。因假設此繩索沒有水平方向的運動，所以各處張力的水平分力，必恒相等而爲常數。由圖 230，可得

(1) $$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = const.$$

我們可知在垂直方向有T_1與T_2的兩垂直分力$-T_1 \sin\alpha$及$T_2 \sin\beta$，其中$T_1 \sin\alpha$前面的負號，表示此項分力在P的方向朝下。根據牛頓第二定律，此兩分力的合力，必等於該段繩索的質量$\rho\Delta x$乘以加速度$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，而在$x$及$x+\Delta x$間的某些點求值；在此$\rho$爲未彎曲繩索每單位長度的質量，$\Delta x$則爲$PQ$的投影直線長度（亦即無偏移時的原長）。所以

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho\, \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

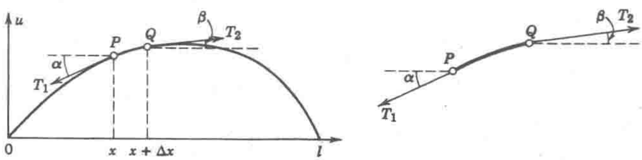

圖 230 振動的繩索

利用(1)式的關係可得：

(2) $$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho\, \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

式中$\tan\alpha$與$\tan\beta$即爲繩索偏移曲線在x與$x+\Delta x$兩點的斜率，亦即

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \qquad 與 \qquad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

上式中的斜率，因u同時和x與t兩自變數有關，所以須以偏導數表示。將(2)式通除以Δx，即得

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\right]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

如果假設 Δx 趨近於零，即可取得下列的齊性線性偏微分方程式：

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2=\frac{T}{\rho}.$$

此即所謂**一維波動方程式**，可用以敍述本節中彈性繩索的運動問題。其中物理常數 $\frac{T}{\rho}$ 之所以用 c^2(而不是 c) 來表示，係因常數純是正值的緣故，且 c 更有波動傳播速度的物理意義。

這個方程式的解答，將於下節中得出。

11-3　分離變數法 (乘積法) (*Separation of Variables Product Method*)

在上節內已看出彈性繩索的振動，可由一度波動方程式來敍述之：

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $u(x, t)$ 為繩索的偏移函數。假定繩長是 l，則因假設其兩端 $x=0$ 與 $x=l$ 固定，所以有兩個**邊界條件**：

(2) $$u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0 \qquad (\text{對所有的 } t \text{ 而言})$$

這一繩索的實際運動情形，將和初時偏移 (在 $t=0$ 時的偏移) 以及初速度 (在 $t=0$ 時的速度) 有關。如以 $f(x)$ 及 $g(x)$，分別代表初時偏移和速度函數，即可得到兩個初始條件：

(3) $$u(x,0)=f(x)$$

與

(4) $$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x).$$

此問題即在尋求(1)式的一個解答，令其能同時滿足(2)至(4)各條件。玆逐步進行如下：

第一步　利用所謂**乘積法**，或是**分離變數法**，可得出二常微分方程式。

第二步　求出滿足各邊界條件(2)的該等常微分方程式的解答。

第三步　組合上面偏微分方程式的解答，令其結果能成爲波動方程式(1)的解答，同時也能滿足已知初始條件(3)與(4)。

詳細情況如下所述：

第一步　乘積法係先假設偏微分方程式的解答爲下列形式：

$$u(x, t) = F(x)G(t) \tag{5}$$

即分別以 x 和 t 爲自變數的兩函數 $F(x)$ 與 $G(t)$ 的乘積。稍後將可看出此方法，在工程數學上有各種重要之用途，連續微分(5)式可得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{與} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G,$$

其中，上加之點號表示該函數對於 t 的微分導數，撇號則表示對於 x 的導數，其數目則都表示階數，將其代入(1)式可得：

$$F\ddot{G} = c^2F''G.$$

除以 c^2FG 後上式即可分離爲：

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}.$$

上面等式的左方，包含僅隨自變數 t 而變化的函數，而右方則僅與自變數 x 有關，這種相等關係唯一可能存在之情況，係雙方必須等於一個常數設爲 k。則因 t 變化時至多僅能影響左方；x 變化時，至多僅能影響右方的值，而雙方同時等於一常數的理論，則可作下面之說明：

當 t 變化時 $\ddot{G}$ 與 G 雖同時在變，但其比值 $\ddot{G}/c^2G$ 仍可維持定值不變，同理當 x 變化時，F''/F 的比值也可使其維持不變，所以可寫成下列關係：

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k.$$

由此立即可得兩個常微分線性方程式：

(6) $$F''-kF=0$$

與

(7) $$\ddot{G}-c^2kG=0.$$

其中 k 仍為任意的常數。

第二步　其次吾人即可由(6)與(7)二方程式，以求出 F 與 G 二函數的解答，假設 $u=FG$ 滿足條件(2)，亦即就所有 t 而言有：

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0,\qquad u(l,t)=F(l)G(t)=0$$

顯然，如果 $G(t)\equiv0$，那麼 $u(x,t)\equiv0$，此乃微解並沒有實際的用途，應予以忽略不計。所以必須 $G(t)\neq0$ 而得出：

(8) $$\text{(a)}\ F(0)=0\qquad\text{(b)}\ F(l)=0.$$

假定 $k=0$，則(6)式的通解必為 $F(x)=ax+b$ 再代以(8)的兩條件：

$F(0)=a(0)+b=b=0$，$F(l)=a(l)=0\quad\therefore a=b=0$

由於 a，b 都是零，所以 $F\equiv0$，$u\equiv0$，又是一個微解仍須予以忽略不計。

假定 $k=\mu^2$ 是一正值，則(6)式的通解為：

$$F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x},$$

再以(8)式二條件代入上式仍得出 $A=0$，$B=0$，所以 $F\equiv0$。故僅剩下常數 k 等於負值的唯一可能性。

假定 $k=-p^2$ 是負值常數，(6)式即成為

$$F''+p^2F=0,$$

且通解為

$$F(x)=A\cos px+B\sin px.$$