多目标优化理论与连续化方法

贺 莉 刘庆怀 著

科 学 出 版 社

多目标优化理论与连续化方法

贺 莉 刘庆怀 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者多年从事多目标优化问题研究与教学的经验总结. 全书共分5章.第1章从各种实际问题中提炼出多目标优化模型，简要介绍了多目标优化理论与求解方法的研究进展；第2章为多目标优化的基本理论，包括向量集的极值、Pareto解集、凸集及凸函数、广义凸函数；第3章介绍了光滑与非光滑多目标优化的最优性条件；第4章主要介绍了多目标优化的五种经典方法；第5章阐述了连续化方法及其边界条件，以及用连续化方法在求解光滑与非光滑多目标优化问题上的应用.

本书可作为应用数学、运筹学与控制论、经济管理等有关专业高年级本科生或研究生的教材，也可供广大工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

多目标优化理论与连续化方法/贺莉, 刘庆怀著. —北京：科学出版社, 2015.6
ISBN 978-7-03-044801-9

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①贺… ②刘… Ⅲ. ①最优化算法 Ⅳ. ①O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 124401 号

责任编辑：张中兴／责任校对：邹慧卿
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年6月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015年6月第一次印刷 印张：13 1/4
字数：267 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　多目标优化引例

所谓优化问题一般是指通过一定的优化算法获得目标函数的最优解. 当优化的目标函数为一个时称之为**单目标优化问题**(Single-objective Optimization Problem, SOP), 亦称为**单目标优化**. 当优化的目标函数有两个或两个以上时称为**多目标优化问题** (Multi-objective Optimization Problem, MOP), 亦称为**多目标优化**. 实际上, 许多实际问题的优化牵涉的目标往往不止一个, 需要同时考虑多个目标在某种意义下的最优问题, 下面我们粗略地介绍几个简单的例子.

引例 1　投资决策问题

某投资开发公司拥有总资金 A 万元, 现在有 $n(n \geqslant 2)$ 个项目可供选择. 设投资第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个项目要用资金 a_i 万元, 预计可得到收益 b_i 万元. 问应如何使用总资金 A 万元, 才能得到最佳的经济效益. 所谓 "最佳的经济效益", 如果理解为 "少花钱多办事", 则变为两个目标的最优化问题, 即投资最少, 收益最大.

引例 2　工程设计问题

把横截面为圆形的树木加工成矩形横截面的木梁. 为使木梁满足一定的规格和应力及强度条件, 要求木梁的高度不超过 H, 横截面的惯性矩不少于给定值 W, 且横截面的高度要介于其宽度和 4 倍宽度之间. 那么如何确定木梁的尺寸, 可使木梁的重量最轻, 并且成本最低. 这是一个两个目标的最优化问题.

引例 3　物资调运问题

某物资部门, 准备将 m 个仓库里的物质调拨到另外 n 个销售点去. 在制定调拨计划时, 一般要考虑这样两个目标, 即在运输过程中要总的公里数最少, 同时又要总的运输费用最低, 这是一个含有两个目标的最优化问题.

引例 4　生产管理问题

工厂在生产某种新产品过程时, 既要实现短的生产周期, 又要低成本、高的设备利用率, 同时质量还要达标, 还希望减少对环境的污染, 这是一个含有 5 个目标的最优化问题.

引例 5 国防技术问题

又比如国防部门设计某种导弹时, 一般都要考虑如下几个目标: 导弹的射程要最远, 精度要最高, 重量要最轻, 消耗燃料要最省等. 这是一个四个目标的最优化问题.

引例 6 生活消费问题

比如买车, 我们时常考虑车子的价格要低, 又要省油, 速度还要快. 这是含有三个目标的最优化问题.

由于多目标优化问题涉及多个指标的优化, 而且这些指标并不是独立的, 它们往往是通过决策变量耦合在一起且处于相互竞争, 相互冲突的状态, 这种竞争和由此带来的复杂性使得对多目标问题进行优化变得十分困难.

1.2 多目标优化模型

用数学方法解决实际问题时, 首先要进行的工作就是建立数学模型, 然后才能在此模型的基础上对实际问题进行求解、分析和研究. 需要指出的是, 虽然数学在解决实际问题时会起到关键的作用, 但数学模型的建立却要符合实际的情况. 从理论上讲, 因素和指标考虑的越全面越好, 但这样会使问题变得过于复杂和庞大, 给问题的最终解决带来技术上的困难. 因此, 如何抓住主要矛盾, 舍弃次要因素, 使问题尽可能地简化就显得十分重要.

我们以 1.1 节引例 3 为例, 建立它们的数学模型. 为此, 首先需要确定出问题中所涉及的已知量, 并设出未知量, 也叫**决策变量**, 简称**变量**; 然后按要求寻找所要求的目标函数及各量之间所满足的限制条件, 即**约束条件**.

问题 1

设决策变量为

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{决定投资第}i\text{个项目}, \\ 0, & \text{决定不投资第}i\text{个项目}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

问题的约束条件为

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant A, \\ x_i(x_i - 1) = 0, i = 1, 2, \cdots, n.\text{即 } x_i = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases}$$

所谓“最佳的经济效益”, 即投资最少, 收益最大:

$$\max f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \max \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$
$$\min f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

投资问题可用下式来描述:

$$\min \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant A, \\ x_i(x_i - 1) = 0, i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

问题 2

设所设计的木梁横截面的高为 x_1, 宽为 x_2. 为使具有一定长度的木梁重量最轻, 应要求其横截面面积 $x_1 x_2$ 为最小, 即要求

$$\min f_1(x_1, x_2) = \min x_1 x_2.$$

由于矩形横截面的木梁是由横截面为圆形的树木加工而成的, 故其成本与树木横截面面积 $\pi r^2 = \pi \left[\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2\right]$ 成正比. 由此, 为使木梁的成本最低还应要求 $\frac{\pi(x_1^2 + x_2^2)}{4}$ 尽可能的小, 或即 $\min f_2(x_1, x_2) = \min(x_1^2 + x_2^2)$.

根据问题的要求, 应满足下述约束条件:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant H, \\ x_1 x_2 \geqslant W, \\ x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 4x_2 - x_1 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

工程设计问题可用下式描述为:

$$\min \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \leqslant H, \\ -x_1x_2 \leqslant -W, \\ x_2 - x_1 \leqslant 0, \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 0, \\ -x_1 \leqslant 0, -x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

问题 3

设某种物资分别存放在 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$ 个仓库里，各仓库的存量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$(吨)；并假设有 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_n$ 个销售点，各销售点的需要量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$(吨)；而由 $\mathrm{A}_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 到 $\mathrm{B}_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的路程和单位运费分别为 d_{ij}(公里) 和 c_{ij}(元). 设从 $\mathrm{A}_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 调给 $\mathrm{B}_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的物资量为 x_{ij}(吨).

有了上述各量以后，显然总的吨公里数和总的运费分别为

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

这就是所要求的目标函数.

为了寻求各变量之间所应满足的限制条件，还要注意产销是否平衡. 这里设产销平衡，即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，显然有 $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i(i = 1, 2, \cdots, m)$(即对每个 A_i 来说，运到各个销售点的物资总和应刚好等于 A_i 的库存量 a_i). $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j(j = 1, 2, \cdots, n)$(即对每个 B_j 来说，从各个仓库运到 B_j 的物资总和应刚好等于 B_j 的需要量 b_j). 此外，由于运量不能为负，故还有 $x_{ij} \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$($x_{ij} > 0$ 表示有运量, $x_{ij} = 0$ 表示没有运量).

由此可知，上述物资调运问题可用下式描述为：

$$\min \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n; \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

在这些目标中, 有的是追求最大化, 有的是追求最小化, 而最大化与最小化是可以相互转化的 (如问题 1). 约束条件中, 有的只含有不等式约束; 有的既含有不等式约束又含有等式约束; 不等式约束中的大于等于零和小于等于零之间可以相互转化 (如问题 2). 因此我们不难将多目标最优化模型统一成一般的形式 (标准形式):

$$\min(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x))^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s.t}\begin{cases} g_i(x) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,m; \\ h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,l. \end{cases}$$

其中, 决策变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点.$(f_1(x), f_2(x),\cdots,f_p(x))^{\mathrm{T}}$ 表示有 p 个目标且都是决策变量的函数, 称为目标函数, T 表示转置. 约束条件都是由决策变量构成的函数, $g_i(x) \leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 表示有 m 个不等式约束, $h_j(x)=0(j=1,2,\cdots,l)$ 表示有 l 个等式约束. 二者统称约束函数. s.t. 是英文 subject to(满足于) 的缩写. 集合 $X=\{x\in\mathbf{R}^n\,|g(x)\leqq 0, h(x)=0\}$ 称为**可行域**(**可行集**, **约束集**), 其元素称为**可行点**. 集合 $I(x)=\{i\in(1,2,\cdots,m)\,|g_i(x)=0\}$ 是在 x 点的积极指标集.

若记

$$\begin{aligned} f(x)&=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))^{\mathrm{T}}, \\ g(x)&=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))^{\mathrm{T}}, \\ h(x)&=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_l(x))^{\mathrm{T}}, \\ X&=\{x\in\mathbf{R}^n\,|g(x)\leqq 0, h(x)=0\}. \end{aligned}$$

则上述模型可简记为

$$\text{(MOP)} \qquad \min_{x\in X} f(x).$$

此外还要注意, 由于 $h(x)=0$, 总可以写成 $h(x)\leqq 0$ 和 $-h(x)\leqq 0$, 因此为简单起见, 有时也将 (MOP) 写成 $\min\limits_{x\in X} f(x)$, 其中 $X=\{x\in\mathbf{R}^n\,|g(x)\leqq 0\}$.

除特殊声明外, 本书总是从标准形式的 (MOP) 出发来讨论问题的.

当 $X=\mathbf{R}^n$ 时, (MOP) 称为无约束多目标优化问题. 当 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 均为线性函数时, (MOP) 称为多目标线性优化问题; 当 $f(x)$, $g(x)$ 均为凸函数, $h(x)$ 是线性函数时, (MOP) 称为凸多目标优化问题, 否则称为非凸多目标优化问题; 当 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 中至少有一个分量函数为不可微函数 (或非光滑函数), 则 (MOP) 称为不可微多目标优化问题 (或非光滑多目标优化问题), 否则就称为光滑多目标优化问题.

1.3 多目标优化进展

多目标优化的思想可追溯到经济学中 A. Smith(1776 年) 关于经济平衡和

F.Y.Edgeworth(1874 年) 对均衡竞争的研究. 特别是, 著名经济学家 V.Pareto(1906 年)[1] 在经济福利理论研究中, 提出了多目标优化问题, 并引进了 Pareto 最优的概念, 此后, E.Borel 和 J.Von Neumann[2] 关于对策论、G.Contor(1895 年) 关于有序集、F.Housdorf 关于序空间理论的研究成果都为多目标优化的形成和发展提供了基本的理论工具和必要条件. 1951 年, T.C.Koopmans[3] 从数量经济角度对多目标优化所作的基本工作, H.W.Kuhn 和 A.W.Tucker[4] 关于向量极值的研究, 以及 L.Hurwicz(1958 年) 在一般的拓扑向量空间对多目标优化问题的研究为这一学科的建立奠定了重要的基础. 从此, 不少著名数学家先后转入这一领域的研究 [5−7]. 这期间 Charnes, Karlin, Klinger, Polak, Keeney, Geoffrion 等人先后都作了较有影响的工作. 1968 年, Z.Johnsen 系统地提出了关于多目标决策模型的研究报告, 这是多目标优化这门学科开始大发展的一个转折点.

在我国, 多目标优化的研究开始于 20 世纪 70 年代后期, 随着研究人员越来越多, 我国在多目标优化学科的理论领域已取得卓有成效的工作 [8,9], 应用研究也愈加扩展和富有实际效果. 在多目标优化方面的研究正在向世界先进水平发展. 但是, 不论在国内或者国外, 虽然关于多目标最优化的研究成绩卓著, 同时也出版过若干专著和文集, 但是较为系统的, 适合初学者的书籍还较少, 基于此作者结合多年的科研与教学编写了本书. 多目标优化内容丰富, 本书主要从多目标优化的解, 函数的凸性, 解存在的最优性条件和求解多目标优化的经典方法和连续化方法基本方面进行了介绍.

我们知道, 对于单目标规划来说, 对任意的 $x^1, x^2 \in X$, 总可以比较 $f(x^1)$ 与 $f(x^2)$ 的大小, 但对多目标问题来说, 就不那么简单了. 因为这时 $f(x^1) = (f_1(x^1), f_2(x^1), \cdots, f_p(x^1))^{\mathrm{T}}$ 与 $f(x^2) = (f_1(x^2), f_2(x^2), \cdots, f_p(x^2))^{\mathrm{T}}$ 实际上都是 P 维向量, 或者说都是 P 维空间的点, 而如何比较它们的大小, 如何衡量目标函数的好坏, 这是一个新的问题. 我们在第 2 章首先引入相应偏爱序, 在这种偏爱关系的基础上介绍向量集的极值. 因而界定多目标最优化问题解的概念成为可能. 人们曾引进各种意义下的解. 最早研究的是有效解和弱有效解. 由于这种解的范围通常较大, 因此在应用上尚须提供进一步的信息才能得出最后的决策. 正因为这样, 人们希望把解的范围缩小, 于是引进各种所谓真有效解. 1951 年, H.W.Kuhn 和 A.W.Tucker[4] 首先引进一种特殊的有效解, 我们把它称为 KT-真有效解. 1968 年, A.G.Geoffrion[7] 对有效解进一步加以限制, 界定一种新的解, 我们把它叫做 G-真有效解. 1977 年, J.Borwein[10] 借助于切锥概念引进一种真有效解, 可称为 B-真有效解. 1979 年, H.P. Benson[11] 借助投影锥引进一种真有效解, 称为 P-真有效解. 1982 年, M.T.Henig[12] 利用闭凸锥又引进一种真有效解, 称为 H-真有效解. 此外, 1981 年, 冯英俊 [13] 给出多目标最优化问题的 Fuzzy 解概念, 1982 年, 梅家骝、辜介田 [14] 引进一种强有效解; 1985 年, 董加礼 [15] 将弱有效解分层, 给出一种 k 级弱有

效解概念, 1984 年, 胡毓达 [16] 提出一种较多有效解概念; 2007 年周轩伟 [17] 利用 n 维 Euclid 空间中较多锥的闭包, 定义了多目标优化强较多有效解; 2013 年, 本书作者 [18] 给出了群体多目标优化问题的 α 度联合有效解. 20 世纪末才有人对随机多目标优化的有效解问题进行较为深入的研究, Caballero.R 和 Abdelaziz.F 是其代表. 2000 年 Caballero.R[19] 讨论了期望值有效解、最小方差有效解; 2001 年 Caballero.R 和 Stancu-Minasian[20] 研究了期望值–标准差有效解和 β 有效解; 2004 年, 卢志义 [21] 定义了 α 期望值标准差有效解, 2015 年本书作者 [22] 定义了置信 α 有效解和联合置信 α 有效解.

对于每一种解自然都要讨论它的一些性质, 诸如存在性, 最优性条件, 连通性, 稳定性以及解与解之间的关系等. 此外, 为了得到更为具体的结果, 常常要对目标函数和约束函数加以限制, 例如线性函数, 线性分式函数, 伪线性函数以及各种广义凸函数等. 目前对于凸情形下的优化问题研究相对比较成熟, 但现实生活中, 大量的最优化问题往往不能满足凸性的要求. 为了减弱凸函数的条件, 专家学者从不同角度提出了各种各样广义凸函数的概念. 1987 年, Hanson 和 Mond[23] 从目标函数和约束条件函数出发, 将凸函数推广为 I 型和 II 型不变凸函数. 之后, Rueda 和 Hanson[24] 介绍了伪 I 型和拟 I 型不变凸函数, 进一步推广了广义凸函数. 1991 年, Bector 和 Singh[25] 给出 B-凸函数的概念, 并研究了 B-凸函数在可微和不可微情形下的一些性质. 1993 年, Bector 和 Suneja[26] 又推广得到 B-不变凸函数, B-伪不变凸函数和 B-拟不变凸函数, 获得了一类非线性规划问题的最优性充分条件和对偶结果. 1982 年, Hanson 和 Mond[27] 首次讨论了次线性函数 F 凸函数和它的推广形式 F 广义凸函数. 1992 年, Preda[28] 结合 ρ-凸性 [29] 提出了 $F-\rho$ 广义凸性, 得到了在可微情形下, 包含 $F-\rho$ 广义凸性规划问题的最优性充分条件和对偶结果. 2001 年, Aghezzf 和 Hachimi[30] 在 Preda 的工作之上, 进而给出了 $F-\rho$ 拟广义凸, $F-\rho$ 伪广义凸, 强 $F-\rho$ 伪凸函数, 严格 $F-\rho$ 伪凸函数的定义, 并用数值例子揭示了它们之间的关系. 同年, Liang, Huang, Pardalos[31] 提出了 (F,α,ρ,d) 广义凸的概念, 并指出了 (F,α,ρ,d) 广义凸包含了 $F-\rho$ 凸, $F-$ 凸, $\rho-$ 凸, 更大程度上拓广了凸函数的定义. 2006 年, T.R. 和 D.Agarwal[32] 提出 $(F,\alpha,\rho,d)-\mathrm{I}$ 型函数的定义, 并给出伪拟、强伪拟、弱严格伪、弱严格伪拟 $(F,\alpha,\rho,d)-\mathrm{I}$ 型函数的定义, 就目标函数为局部 Lipschitz 连续向量函数的非光滑多目标优化问题进行研究, 得到相关的最优性条件和对偶结果. 同年, D.H.Yuan[33] 等人在凸泛函的基础上引入了 (C,α,ρ,d) 凸函数, Dehui[34] 等人提出 $(C,\alpha,\rho,d)-\mathrm{I}$ 型函数的定义, 借助此类广义凸函数, 获得了一类多目标优化问题的最优性充分条件和对偶结果. 2011 年, Zhang[35] 等人受 (C,α,ρ,d) 凸函数定义的启发, 给出广义一致 (C,α,ρ,d) 凸函数. 本书作者[36] 给出 $B-(c,\alpha)-\mathrm{I}$ 型广义凸函数及伪拟, 强伪拟、弱严格伪、弱严格伪拟 $B-(c,\alpha)-\mathrm{I}$ 型广义凸函数定义, 并研究了多目标的最优性条件和 Mond-Weir

对偶性.

多目标优化的最优性条件是在某种含义下, 最优解 (如有效解和弱有效解等) 存在的必要条件和充分条件. 关于最优性条件的研究是一个极为重要的方面, 不仅可以用它来判断一个可行解是否为最优解, 还可以通过它来建立对偶理论、稳定性理论和有效算法等. 1976 年, J.G. Lin[37] 在某些约束规格下, 对一般的多目标规划给出了 K-T 必要条件; 从 1982 年开始, 林锉云对 K-T 条件的充分性进行了一系列研究 [38−40]; 1977 年, J.Borwein[10] 利用切锥给出一些最优性条件; 1979 年, 应玫茜 [41] 对伪凸多目标规划的有效解和弱有效解抛开约束规格, 建立了若干类型问题的充要条件和判别准则; 1982 年, C. Maliwent 在 Frechet 可微意义下研究最优性条件; 1984 年, 胡毓达, 在一般空间中讨论了 K-K-T 条件. 近年来本书作者对非光滑多目标优化问题的最优性条件进行了研究, 得到一般非光滑多目标优化的 K-K-T 必要条件和充分条件 [42,43]; 一个不含有距离函数的多目标优化问题局部弱有效解的最优性必要条件 [44]; Γ- 次微分意义下的多目标规划充要条件 [45]; 非光滑多目标广义本性凸规划的最优性条件 [46] 和 $B-(C,\alpha)-\mathrm{I}$ 型广义凸多目标优化的充分条件 [36].

多目标优化算法是目前国内外研究的热点. 最早使用的经典 (常规) 方法, 分为直接算法和间接算法两种 [9]. 所谓直接算法是指: 像单目标优化那样, 针对优化问题本身直接去求解. 到目前为止, 直接算法研究还比较少, 或者说只研究了几种特殊的算法, 例如: 单变量多目标规划算法、线性多目标规划算法以及可行集有限时的优序法等. 而间接算法则指: 根据问题的实际背景和具体的容许性, 在各种意义下将多目标问题转化成单目标问题. 这方面的成果相对的多一些, 如果细分还可分成: 转化成一个单目标问题的算法, 转化成多个单目标问题的算法以及非统一模型的算法等. 间接算法有一个很大的缺点, 那就是在转化过程中, 往往顾此失彼, 必须付出一定的 “损失”, 因此在应用时常常还需给决策者提供一些新的信息才能做出最后的决策. 针对上述问题, 目前众多学者开始研究一些新型的算法求解多目标优化问题, 包括使用神经网络算法、遗传算法、粒子群算法、模糊算法 [47,48] 等, 统称为仿生算法. 仿生算法在一定程度上弥补了间接算法的不足, 其中出现最多的就是多目标遗传算法及其改进算法 [49,50]. 但是多目标遗传算法的性能评价必须建立在测试函数的基础上, 并采用统一的度量标准进行定量比较, 严密的性能分析还有待研究.

近年来连续化方法求解多目标优化问题越来越受到关注. 连续化方法又称同伦方法或路径跟踪算法, 其做为一个数学工具已存在了近一个世纪. 经典的连续化方法是非线性分析中论证解的存在性的有效方法, 它不是一种算法. 1953 年 Davidenko[51] 给出了所谓“参数微分法”(Parametic diffe-rientiation method), 使连续化方法有了算法的功能. 之后, Gavurin、Lemke & Howson、Scavf、Eaves[52,53]

等人又分别推广和发展了这种思想, 取得了一系列研究结果. 这些结果都只考虑了局部收敛问题.

1974 年, Kellogg, Li & Yorke[54] 利用微分拓扑工具, 成功地用连续化方法给出了 Brouwer 不动点定理的构造性证明, 并且阐明了连续路径的存在性和光滑性是平凡的; 同时解决了连续化方法的整体收敛性. 其后 Smale[55], Chow, Mallet-Paret & Yorke[56] 推广和发展了连续化方法, 提出了可行的整体牛顿法和 Chow-Yorke 算法. 同时还利用它们给出了一系列重要定理的构造性证明. 从此, 连续化方法的研究迅速发展起来. 至今仍在研究其在各个领域中的应用 (见 Allgower & Georg[57]).

尽管极值性质不具有同伦不变性, 但是借助 Lagrange 乘子, 可以将一般规划问题化成相应的 K-K-T(Karush-Kuhn-Tucker) 解问题. 这样一来, 将同伦方法应用于 K-K-T 方程, 即得到了相应规划问题的解.

用同伦方法的思想来求解数学规划问题. 最早见于 1979 年 Garcia 和 Zangwill[58] 的工作, 他们对凸规划构造了一种同伦方法. 证明了在一定条件下该方法是整体收敛的. 这一工作在最初并没有得到很好的反响, 也没有更进一步的研究成果. 自人们发现 Karmarkar 算法本质上是一种内点法, 一种路径跟踪算法 (同伦算法) 之后, 用同伦方法的思想求解非线性规划问题才真正的活跃起来.

80 年代, Monterio & Adler, Kojima, Mizuno & Yos-hise 等人 [59−61,62] 分别将线性规划的中心跟踪原 - 对偶内点算法 (Primal-dual path-following method) 推广到二次规划和一类特殊的凸规划问题. 随后, Kortanek、Potra & Ye,Zhu, 王宇等人 [63−65] 又各自独立地推广到一般的凸规划问题. Sonnevend & Stoer, Jarre, Mehrotra & Sun, Nesterov & Ne-mirovsky 等人 [66−68] 将线性规划的中心方法推广到凸规划问题, 提出了 "解析中心方法"(the method of analytic centers). Mc Cormic, Fiacco & Mc Cormick, Den Hertog et al. 等人 [69−73] 对凸规划问题借鉴线性规划问题的 Karmarkar 算法也建立了相应的路径跟踪算法. 上述的路径跟踪方法在证明收敛性时, 均要求所建立的对数障碍函数是严格凸而且凸规划的解集有界. 王宇等人 [64] 还对一些凸规划问题证明了同伦内点法的整体收敛性, 并给出了区域复杂度的估计.

为了研究非凸优化的整体求解问题, 1993 年冯果忱, 于波和林正华 [74,75] 提出了利用牛顿同伦与不动点同伦的组合同伦内点法 (Combined Homotopy Interior Point Method, 简称 CHIP 方法) 求解非凸优化问题, 并且在可行域满足 "外法锥条件" 下, 即当可行域的法锥不包含可行域的内点时, 证明了该算法收敛于非凸优化问题的 K-K-T 点, 并且对于可行域边界 "不光滑" 情形, 利用凝聚函数技巧同样证明了上述方法的整体收敛性 [76,77]. 在文献 [78] 中还给出了计算非凸区域上不动点的 CHIP 方法, 证明了当区域满足 "外法锥条件" 时, CHIP 算法的整体收敛性.

"外法锥条件" 是对区域非凸性的一种限制, 减弱这种条件将会扩大同伦算法

的应用范围. 首先, 于波等人 [79] 证明了, 如果在可行域中存在子集, 使得可行域的外法锥不包含此子集时 (称为弱法锥条件), 则当初始值选在子集中, CHIP 算法也是收敛的. 其次, 于波、林正华和冯果忱在研究计算非凸区域上不动点的 CHIP 算法时, 发现外法锥条件可减弱为所谓拟法锥条件, 甚至伪锥条件. 但这种方法不能直接用之研究非线性规划问题.

本书作者、于波、冯果忱在文献 [80,81] 中, 定义了 "正独立映射", 发现了比法锥条件更弱的 "拟法锥条件", 并给出了修正的组合同伦方程. 本书作者与于波, 冯果忱在文献 [82,83] 中进一步减弱约束条件, 发现了 "毛发映射" 及 "伪锥条件", 同样给出了相应的修正组合同伦方程, 并在 "伪锥条件" 条件下, 证明了同伦路径的存在性和大范围收敛性.

"弱法锥条件"、"拟法锥条件" 以及 "伪锥条件" 的给出扩大了 CHIP 方法解非凸规划问题的范围. 2000 年, 本书作者把组合同伦方法推广到多目标优化情形, 求解了凸多目标优化的最小弱有效解 [84].2008 年, 宋文等利用同伦方法求解法锥条件下的一般多目标优化问题 [85]. 2010 年, 本书作者研究了拟法锥, 修正拟法锥, 伪锥条件下求解混合多目标优化问题的 K-K-T 点, 并证明了整体收敛性 [86−89]. 近年来, 本书作者对同伦方法求解非光滑多目标优化问题也进行了探索.2011 年, 商玉凤、于波提出利用动约束组合同伦方法求解 [90] 凸多目标规划问题, 初始点的选取不必是内点或可行点, 从而更方便使用. 组合同伦方法不但在多目标优化问题上得到了一系列结果, 而且在解互补问题 [91]、Max-Min 问题 [92,93]、双层规划 [94]、变分不等式问题 [95−97] 上也得到了应用. 在文献 [95] 中, 林正华、李勇给出了解有界集上有限维变分不等式问题的 CHIP 方法, 与已有同伦方法相比, 在不需要映射的单调性 (或其弱形式) 假设, 证明了同伦路径的存在性和大范围收敛性. 其后, 徐庆、于波、冯果忱 [97] 给出了无界集合上变分不等式问题的同伦算法, 在已有的大多数解存在性条件下证明了同伦路径的收敛性.

第 2 章　多目标优化的基本理论

2.1　向量集的极值

为了界定多目标规划的解, 需要研究向量集的极值. 本节将介绍向量集极值的概念及几种判定准则.

2.1.1　最小向量及弱最小向量概念

我们首先引进几个向量不等式记号: 设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量空间, 也即 n 维实欧氏空间, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}, z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, 并规定

$$
\begin{aligned}
&y=z\Leftrightarrow y_i=z_i, i=1,2,\cdots,n;\\
&y<z\Leftrightarrow y_i<z_i, i=1,2,\cdots,n;\\
&y\leqq z\Leftrightarrow y_i\leqslant z_i, i=1,2,\cdots,n;\\
&y\leqslant z\Leftrightarrow y_i\leqslant z_i, i=1,2,\cdots,n,\ \text{且}\ y\neq z.
\end{aligned}
$$

其中 $y\leqslant z$ 中的分量至少存在一个 $1\leqslant j_0\leqslant n$ 使 $y_{j_0}<z_{j_0}$. 完全类似的可以定义 $y>z, y\geqq z$ 和 $y\geqslant z$.

显然记号“$=$”、“$<$”、“$\leqq$”就是向量分析中常用的符号, 而记号“$\leqslant$”则是多目标规划常用的特有符号, 注意“$\leqslant$”与“$\leqq$”的区别.

定义 2.1.1　设 $X\subset\mathbf{R}^n, x^0\in X$, 如果对一切 $x\in X$, 有 $x^0\leqq x$, 则说 x^0 是 X 的**绝对最小向量**, 其几何意义如图 2.1.1.

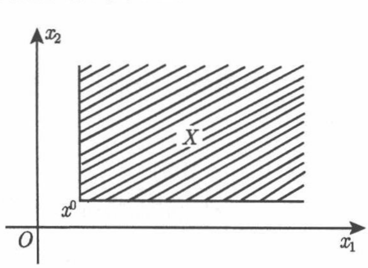

图 2.1.1

绝对最小向量是按每个分量都小而界定的, 显然这种最小向量是很理想的, 一般很难存在. 例如, 图 2.1.2 所示的简单集合就不存在绝对最小向量. 尽管如此, 直观上我们有理由对折线 ABC 上的点 (即向量) 感兴趣.