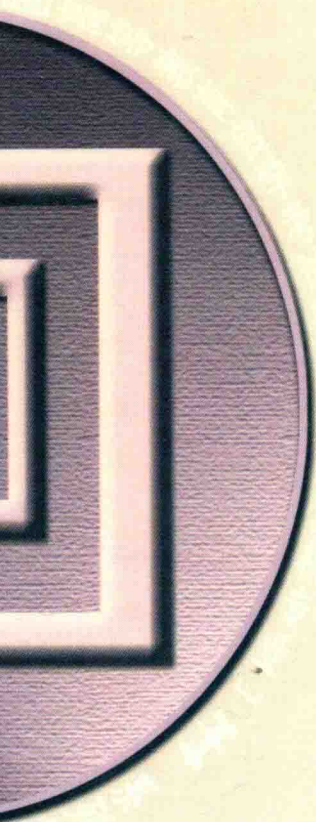




全国高等教育自学考试指定教材辅导用书



运筹学基础

考点精析 + 考点精练

本书主编：黄科 清华大学

- 同步辅导
- 标准预测试卷
- 难题、易错题

学苑出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书



考点精析 + 考点精练

运筹学基础

本书主编:清华大学 黄科
本书编者:北京理工大学 曹全新

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书 1+1: 计算机/教材编写组编. —北京: 学苑出版社, 2002.8

ISBN 7-5077-1995-2

I.全… II.教… III.计算机-高等教育-自学考试-学习参考资料 IV.TP3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048972 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号 100036

北京峥峥印刷厂印刷 新华书店经销

18 开本 75 印张 1000 千字

2002 年 8 月北京第 1 版 2002 年 8 月北京第 1 次印刷

全套定价 90.00 元(共 5 本, 单价: 18.00 元)

前 言

运筹学 (Operation Research, 简称 OR) 是一门广泛应用现有的科学技术知识和数学工具, 以定性和定量相结合的方法研究和解决管理、经济和工程技术中提出的实际问题, 为决策者选择最优决策提供定量依据的一门决策科学。

运筹学也是近五十年发展起来的一门新兴学科, 它最早的应用是在二战中的军事领域, 其后才转向民用。它的目的是为管理人员在做决策是提供科学的依据, 在生产管理、工程技术、军事作战、科学试验、财政经济以及社会科学中都得到了迅速的发展和极为广泛的应用。

本书是根据国家教委制订的运筹学自学考试 (本科段) 大纲编写的辅导用书。本辅导教材按自学考试指定教材《运筹学基础》的内容体系编写, 并作为其配套书籍。本书分两个部分: 第一部分是对自学考试考点进行概括、归纳, 并对重、难点进行不同程度的精析; 第二部分划分为三编。第一编是针对各章考点所编写的习题; 习题是消化领会教材的一个重要环节, 也是学习掌握运筹学理论和方法必不可少的手段。为方便读者自学, 书中仍对每道习题分别给出答案、证明或题解, 答案中习题的编号同前面各章习题对应。第二编是最近两年的考试真题, 帮助考生熟悉考题类型, 对考题的难易度有所了解。第三编是笔者根据对最近考题的深入了解, 精心设计的标准预测题, 考生借助此标准预测题检验自己, 看哪些知识点还未掌握, 及时查漏补缺, 并提高应试能力。

本书主要特点是: 一、以能力培养为主线, 始终贯彻提出问题, 分析问题和解决问题的宗旨。二、通过每章的重点、难点和公式概括在一起, 使学生们感觉到书越读越薄, 越读越精, 无疑将起到纲举目张的效果。三、内容丰富, 重点突出, 覆盖了运筹学基础自学考试的基本内容, 突出了管理中应用运筹学的各种模型及相应理论、解法。四、选题得当, 难易适中, 针对自学考试考生的实际情况提供合理的测试和要求。

运筹学作为一门分支众多、内容繁杂的一大学科, 常使学生产生畏难情绪。为了帮助自学运筹学的读者能更好地消化理解运筹学的基本理论、基本方法, 掌握好解题技巧, 获得更多的借鉴、学习和参考的机会, 本书在写作上注意深入浅出, 讲清基本概念, 力求详尽、新颖。在精选出相当数量的有启发性、代表性和针对性的习题和例题的基础上, 我们对其中的一大部分作了较详细的解答。通过这些分析, 我们希望能使学生们举一反三, 引导和促使学生建模、分析和解决实际问题的能力。在这里, 我需要强调的是本书是针对考试而编写的, 在考试结束后, 希望读者能根据自身的情况, 重新对本领域进行细致而深入的判读。

在编写本书的过程中，我们参阅了不少已有的书籍和论文，利用了不少本研究所过去对运筹学领域的书籍和论文。在此对北京理工大学交通研究所在运筹学研究和应用方面做出贡献的同仁表示感谢。书中错漏之处在所难免，望广大读者批评指正。

曹全新

2002年9月



全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

考

点

精

析

同步
辅导

标准
预测
试卷

难题、
易错题

学苑出版社

目 录

第一部分 考点精析

第一章 导论	(1)	考点精析	(23)
本章导读	(1)	第六章 运输问题	(29)
考点精析	(1)	本章导读	(29)
第二章 预测	(3)	知识结构	(29)
本章导读	(3)	考点精析	(29)
知识结构	(3)	第七章 网络计划技术	(35)
考点精析	(3)	本章导读	(35)
第三章 决策	(11)	知识结构	(35)
本章导读	(11)	考点精析	(36)
知识结构	(11)	第八章 图论方法	(43)
考点精析	(11)	本章导读	(43)
第四章 库存管理	(17)	知识结构	(43)
本章导读	(17)	考点精析	(43)
知识结构	(17)	第九章 马尔柯夫分析	(50)
考点精析	(17)	本章导读	(50)
第五章 线性规划	(23)	知识结构	(50)
本章导读	(23)	考点精析	(50)
知识结构	(23)		

第二部分 考点精练

易错题、难题	(56)	第九章 马尔柯夫分析	(82)
第一章 导论	(56)	历年考题	(83)
第二章 预测	(58)	2000年4月份全国高等教育自学考试	
第三章 决策	(61)	运筹学基础试卷	(83)
第四章 库存管理	(63)	2001年4月份全国高等教育自学考试	
第五章 线性规划	(65)	运筹学基础试卷	(89)
第六章 运输问题	(69)	运筹学基础标准预测试卷	(95)
第七章 网络计划技术	(74)	运筹学基础标准预测试卷(一)	(95)
第八章 图论方法	(78)	运筹学基础标准预测试卷(二)	(100)

运筹学习题参考答案	(105)	第五章 线性规划	(130)
第一章 导论	(105)	第六章 运输问题	(139)
第二章 预测	(106)	第七章 网络计划技术	(148)
第三章 决策	(107)	第八章 图论方法	(155)
第四章 库存管理	(109)	第九章 马尔柯夫分析	(165)
第五章 线性规划	(111)	历年考题参考答案	(167)
第六章 运输问题	(111)	2000年4月份全国高等教育自学考试	
第七章 网络计划技术	(112)	运筹学基础试卷	(167)
第八章 图论方法	(113)	2001年4月份全国高等教育自学考试	
第九章 马尔柯夫分析	(114)	运筹学基础试卷	(171)
易错题、难题参考答案	(117)	标准预测试卷参考答案	(176)
第一章 导论	(117)	运筹学基础标准预测试卷	
第二章 预测	(119)	参考答案(一)	(176)
第三章 决策	(122)	运筹学基础标准预测试卷	
第四章 库存管理	(126)	参考答案(二)	(180)

第一章 导 论

本章导读

通过本章的学习,要求了解运筹学的发展史,运筹学在企业中的应用及在不同领域中的应用,领会决策方法的分类,领会决策人员采用计量方法的几种情况,领会应用运筹学决策的六个步骤,对应用运筹学解决问题的优点与不足之处也要求深入领会。

考点精析

一、运筹学:对管理工作进行决策的计量方法(领会)

1. 决策方法的分类

定性分析:基本上根据决策人员的主观经验或感受到感觉或知识而制定的决策

定量分析:借助于某些正规的计量方法而作出的决策;

混合型决策:运用定性和定量两种方法制定的决策。

2. 决策人员采用计量方法的四种情况

① 要决策的问题是复杂的,并且具有许多变量;

② 说明能决策的问题的各种状况的数据是可以得到的;

③ 待决策问题的各项目标可以确定为各种数量关系;

④ 对应上述情况,有关的切实可行的模型是当前可以建立起来的。

二、运筹学进行决策过程的六个步骤(领会)

运筹学工作者,当被管理部门聘请,应接受管理部门的要求,去收集和阐明数据,建立和试验数学模型,预言未来作业,然后制定方案,并推荐给经理部门。运筹学工作者的活动可概括为下面的六个步骤:

1. 观察待解决问题所处的环境

2. 分析和定义待解决的问题

3. 拟定模型

4. 选择输入资料

5. 提出解,并验证它的合理性

6. 实施最优解

三、运筹学的发展（识记）

1. 从工业管理到运筹学的重点转移
2. 早期的运筹学
3. 当代的运筹学

四、运筹学的优点与不足之处（领会）

优点：1. 运筹学可以很快地显示出对有关问题寻求可行解时所需的数据方面的差距；
2. 运筹学允许我们考察某种情况，然后再评价由于结局变化所产生的效果，而我们这样做时，不会造成各种损失或过多的费用；

3. 假若必须考察决策变量所有可能的组合时，运筹学可以很快找出最优解；
4. 运筹学使我们可以对某种情况建立模型，并通过计算机求解；
5. 运筹学的运用可节省管理部门的大量时间去解决常常依赖足够经验才能解决的问题；
6. 某些复杂的运筹学问题，可以通过计算机予以解决。

缺点：1. 运筹学常常必须简化待解决的问题，如果不慎以致过分简化，常常会使所得出的解没有太大的价值；

2. 对一些必须一次性予以解决的问题，运筹学技术往往要比采用一些不太复杂的其他方法技术费时间；

3. 有些模型只是现实情况的近似而不能完全描述客观世界；

4. 有时候运筹学专业人员的不能使决策人员认识到：为了有效地解决有关问题，在有的情况下，计量方法和主观经验都是需要的；

5. 运筹学专业人员的有时很难向决策者解释清楚许多现实问题，必须用极其复杂的运筹学方法，以致要决策人员在作决策时接受这些解决方法就更困难。

五、运筹学的应用（了解）

1. 模型方面的应用。

例如：经济部门应用的需求曲线；企业的损益表；企业的预算表等。

2. 企业中的应用。

科克和卢赛尔对 240 家公司统计出使用计量方法的百分比如下：

线性规划 95%；

存货控制模型 90.75%；

网络计划技术 90.7%；

运输模型 75.35%；

马尔柯夫分析 43.15%；

3. 在不同领域中的应用。

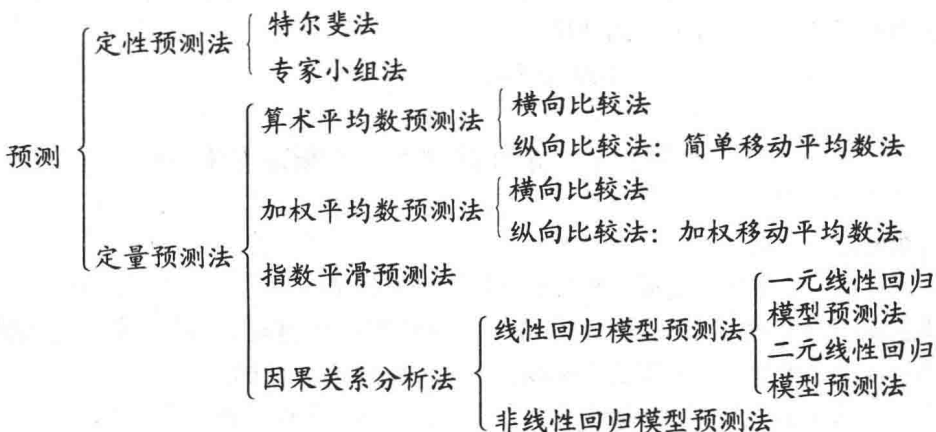
例如：会计和金融领域；市场分析领域；生产计划领域；组织上的开发与人力资源开发领域等。

第二章 预测

本章导读

本章预测的对象以企业价格为主，在学习中应理解企业价格预测的概念与目的；领会企业价格预测的程序；掌握特尔斐法和专家小组法在什么情况下使用，并会简单应用特尔斐法和专家小组法；对定量预测的各种方法要深入领会并能综合应用。

知识结构



考点精析

第一节 企业价格预测的概念与程序

一、企业价格预测的概念与程序（识记）

1. 预测的定义：预测就是对未来的不确定的事件进行估计或判断。本章讲的预测是指具有一定因果关系或具有一定的历史发展趋势特征的事件，预测的对象以企业价格为主。

2. 企业价格预测的概念：企业对其生产经营的产品或劳务进行价格预测要在调查研究

的基础上,掌握各种可靠的信息,采用科学的预测方法,对未来一定时期内企业生产、经验的商品或劳务的价格作出估计或判断。

3. 预测的目的:预测是企业价格决策的基础,他为价格提供适当的数据或资料。

4. 正确对待预测的精度:由于社会活动的复杂性,至今还没有一种预测方法能使管理人员获得满意的预测精度。所以当今预测中的现实问题,不是勉强地要求预测的精度如何高,而是要求如何不断的研究和使用那些还存在不够精确的现有的预测方法。

二、企业价格预测的程序(识记)

无论哪一种预测方法,预测的程序大致如下:

1. 确定预测的对象或目标。据价格预测而言,是属于宏观范畴的价格预测,还是微观范畴的价格预测。

2. 选择预测周期。就价格预测来说,预测周期分为长期的、中期的和短期的。要根据不同的情况选择合理的预测周期。

3. 选择预测方法。预测方法第二节、第三节将进行详述。

4. 收集有关资料。收集预测中所需的数据和资料,判断他们的准确程度,并确定那些数据和资料可能产生最好的预测结果。

5. 进行预测。包括定性预测或定量预测。

第二节 定性预测法:判断预测法

一、特尔斐法(理解)

管理者进行决策时,需要掌握社会环境和经济环境各方面的变化和预测资料;而专家们或熟悉情况者对未来某个领域内可能发生各种情况的预测意见,会更加广泛地被决策人采纳。特尔斐法是希望在“专家群”中取得比较一致的意见的方法。

特尔斐法的实施程序:1.确定课题。2.选择专家。3.设计咨询表。4.逐轮咨询和信息反馈。调研人员将咨询表搜集起来,经过整理、归纳,再将较有条理的各种意见匿名反馈给专家,再次征求意见;这样反馈几次,就能得出比较集中和一致的意见。5.采用统计分析方法,对预测结果进行定量评价和描述。

特尔斐法因为要经过几轮信息反馈,进行预测的时间势必比较长,因此它适用于长期或中期预测。

二、专家小组法(理解)

1. 专家小组法是在接受咨询的专家之间组成一个小组,面对面地进行讨论与磋商,最后对需要预测的课题得出比较一致的意见。

2. 专家小组法的特点

专家小组法的预测过程比较紧凑,适用于短期预测。

3. 专家小组法的优、缺点

专家小组法的优点是可以做到相互协商、相互补充；但当小组会议组织得不好时，也可能使权威人士左右会场或多数人的意见湮没了少数人的创新意见。

第三节 定量预测法

一、算术平均数预测法（领会）

利用算术平均数进行预测的公式为：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ 或 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

式中： \bar{x} 为算术平均数； $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为 n 个已知的实际数据； n 表示采用的实际数据的个数。

对于 i 的不同含义，可分为：

1. 横向比较法：此时 x_i 是同期同类产品第 i 个厂家的价格。
2. 纵向比较法：简单移动平均数法

$$\bar{x}_{t+1} = \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \cdots + x_{t-(n-1)}}{n} \text{ 或 } \bar{x}_{t+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{t-i}$$

式中： \bar{x}_{t+1} 是第 $t+1$ 期的预测值； x_{t-i} 是该产品在 $t-i$ 期的实际价格。

所谓的时间序列就是把过去的历史数据，按时间顺序排列起来所组成的一个数字序列。

◆ 注：① 算术平均数预测法一般适用于数据变化比较平稳的情况，而对有明显有增长或下降趋势、有起伏较大周期性或非周期性变化的数据，这种方法精度很差。在数据平稳的趋势下，“平均”的作用在于消除随机因素的影响。② 由预测公式构成明显看出，这种预测仅适用于短期预测。

二、加权平均数预测法（领会）

1. 横向比较法：

采用加权平均数进行预测的公式为：

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

式中： \bar{x}_w 为加权平均数； x_1, x_2, \cdots, x_n 为 n 个已知的实际数据；

w_1, w_2, \cdots, w_n 对应于实际数据所取得的权数； n 表示采用的实际数据的个数。

2. 纵向比较法：

采用加权移动平均数法计算预测值的公式为：

$$F_{t+1} = \frac{x_t W_t + x_{t-1} W_{t-1} + \dots + x_{t-(n-1)} W_{t-(n-1)}}{W_t + W_{t-1} + \dots + W_{t-(n-1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_{t-i} W_{t-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} W_{t-i}}$$

此时，n 是“移动”时的“段长”。数据 x_{t-i} 的权数是 w_{n-i} 。

◆ 注：① 算术平均预测法是加权平均数预测法的特殊情况，即加权平均数预测法中 $w_i=1$ 时恰好是算术平均数预测式。② 按数据的重要性赋予不同的权数，重要的数据相应的权数大，比算术平均数较科学。③ 权数 w_i 的决定具有定性成分。④ 加权平均数由预测公式的构成明显看出，它仅限于短期预测。

三、指数平滑预测法（简单应用）

指数平滑预测法的公式如下：

$$F_{t+1} = F_t + \alpha (x_t - F_t) = F_t + \alpha e_t$$

式中： F_{t+1}, F_t 是 $t+1$ 期、 t 期的预测值； x_t 是 t 期的实际值； α 是平滑系数； e_t 是 t 期的实际值与预测值之间的误差。

从公式中可以看出指数平滑预测法实际上是定量方法与定性方法相结合的一种预测方法。当 t 期的预测值 F_t 与 t 期的实际值 x_t 之间出现较大的正或负误差 e_t 时，我们可以根据当地的实际情况，加大平滑系数 α 的值，使 $t+1$ 期的预测值比较接近于 t 期的实际值；如果误差 e_t 的值不大，这说明 t 期的预测值与实际值比较接近，而当时当地的情况又不会有太大的变化时，则 α 的值可取小一些。

α 的一般取值范围是： $0 \leq \alpha \leq 1$ 。当 α 取零时，则表明不考虑 t 期的误差， $F_{t+1}=F_t$ ；当 α 取 1 时，则表明将误差全部考虑进去，则 $F_t=x_t$ 。一般来说， α 的值总是取 0 与 1 之间的一个数值。

我们将上式变换一下形式，可得：

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= F_t + \alpha x_t - \alpha F_t = \alpha x_t + (1-\alpha) F_t \\ &= \alpha x_t + (1-\alpha) [\alpha x_{t-1} + (1-\alpha) F_{t-1}] \\ &\dots\dots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^i x_{t-i} + (1-\alpha)^n F_t \end{aligned}$$

第 $t+1$ 期预测值加前期误差的 α 倍，一般按此作 F_{t+1} 的递推预测。此时 F_t 不能有指数平滑公式给出，用 X_t 或前若干项的平均值 $F_t = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i X_j$ 代替，这要视具体情况而定。

四、因果关系预测法：线性回归模型预测法（简单应用）

1. 一元线性回归模型预测法

一般公式如下： $y=a+bx$

式中： y 是因变量； x 是自变量； a, b 为回归模型的参数。

(1) a, b 的求法

$y = a + \beta x + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0, \delta^2)$, 对一组数据 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 。

$y_i = a + \beta x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim N(0, \delta^2)$, 现要找出 a, b 的值, 使得

$\hat{y}_i = a + bx_i$ 时偏差平方和最小, 即: $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$ 最小。

此时, 称直线方程 $y=a+bx$ 与实际情况拟合得最好, 即 y 的第 i 个实际值 y_i 与 $\hat{y}_i = a + bx_i$

得到 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$ 最小。

为了易于记忆, 记:

$$L_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

$$L_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2, L_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$Q = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

用最小二乘法求 a, b , 即求 $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ 解出 a, b 的估计值。

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, b = \frac{L_{xy}}{L_{xx}}$$

此时, 经 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 中, x_i, y_i 无论是否有关系, 是否为线性关系, 总能有最小二乘法求出 a, b 。

(2) $y=a+bx$ 回归方程式的几个特征

① 点 (\bar{x}, \bar{y}) 在直线 $y=a+bx$ 上

$\because y = (\bar{y} - bx)$, $\therefore y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 显然 (\bar{x}, \bar{y}) 满足方程。

② 因变量的各个实际值 y_i , 各个实际值的平均数 \bar{y} , 各个预测值 \hat{y}_i 之间的关系

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

式中: $(y_i - \bar{y})$ 叫总偏差, 它是因变量的实际值 y_i 与因变量的一组实际值的平均数 \bar{y} 之间的偏差。

$(\hat{y}_i - \bar{y})$ 叫回归偏差, 它是因变量的预测值 \hat{y}_i 与 \bar{y} 之间的偏差。

$(y_i - \hat{y}_i)$ 叫剩余偏差，他是总偏差减去回归偏差之后剩下来的偏差

如果我们把分析空间扩展到样本组中全部的 y_i 值，则必须对上式进行两边平方，然后再求和，以避免正负偏差之间相互抵消，从而我们有：

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum [(\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)]^2 \text{ 我们可以证明 } \sum (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) = 0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} \sum (y_i - \bar{y})^2 &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \\ &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum 2(\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) \end{aligned}$$

式中： $\sum (y_i - \bar{y})^2$ 称为总偏差平方和；

$\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 称为回归偏差平方和；

$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ 称为剩余偏差平方和。

(3) 与回归方程 $y = a + bx$ 有关的相关系数与置信区间

① 相关系数 R

$$R = \sqrt{\frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

R 说明了通过回归方程 $y = a + bx$ 而联系起来的因变量 y 与自变量 x 之间的相关关系或相关程度。当直线方程式 $y = a + bx$ 的斜率是正值时，R 取正值，表明 y 与 x 是正相关，即当 x 的值增大时， y 的值也随之增大。R 取负值，表明 y 与 x 是负相关，即当 x 的值增大时， y 的值反而减小。预测未来的因变量 y 的实际值可能落入的置信区间。

1) 点预测。

假设下一期的自变量 x 的估计值为 x_{t+1} ，根据所建立的直线方程式，因变量 y_{t+1} 的预测值为：

$$\hat{y}_{t+1} = a + bx_{t+1}$$

由于 \hat{y}_{t+1} 表示的是对应于 x_{t+1} 的一个坐标点的纵标值，所以，我们把这一预测结果称为点预测。实际上未来 $t+1$ 期的实际值 y_{t+1} 不可能正好等于 \hat{y}_{t+1} ，而是会落在 \hat{y}_{t+1} 上下的区间中。

2) 置信区间的预测。

对因变量的实际值 y_{t+1} 可能落入预测值 \hat{y}_{t+1} 的置信区间的计算是：先求出因变量的点预测值 \hat{y}_{t+1} ，然后确定置信区间的大小。按照一般的要求，实际值 y_{t+1} 落入预测值 \hat{y}_{t+1} 上下区间内的概率应达到 95%，根据这个概率要求，当我们据以计算回归方程式 $y=a+bx$ 的一组实际数据点大致在回归直线上下接近于正态分布时，这个在 \hat{y}_{t+1} 上下的置信区间应是： $\hat{y}_{t+1} \pm 2s$ 其中 s

称为标准差。求 s 的公式是：
$$s = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

式中： n 是所取实际数据点的个数； i 是指回归方程式中所有参数的个数。

2. 二元线性回归模型预测法

二元线性回归模型的一般公式如下：

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2$$

式中： y 是因变量； x_1, x_2 是两个自变量； a, b_1, b_2 是回归模型的参数。

通过运用最小二乘法，可求得求解回归参数 a, b_1, b_2 的公式：

$$\begin{cases} \sum y_i = na + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i}y_i = a \sum x_{1i} + b_1 \sum x_{1i}^2 + b_2 \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}y_i = a \sum x_{2i} + b_1 \sum x_{1i}x_{2i} + b_2 \sum x_{2i}^2 \end{cases}$$

多元线性回归模型预测法在公式的建立与推导方面基本上与一元线性回归模型相同。

五、因果关系分析法：非线性回归模型预测法（领会）

非线性回归模型分为两大类：拟线性回归模型与标准非线性回归模型。

如 $y = \frac{ax_1^{b_1}x_2^{b_2}}{x_3^{b_3}} \cdot e^\varepsilon$ ，两边取对数

$L_n y = L_n a + b_1 L_n x_1 + b_2 L_n x_2 - b_3 L_n x_3 + \varepsilon$ 呈对数形式的三元线性回归模型。

令 $z = L_n y, A = L_n a, t_1 = L_n x_1, t_2 = L_n x_2, t_3 = L_n x_3$ ，则其回归模型为：

$$Z = A + b_1 t_1 + b_2 t_2 - b_3 t_3$$

即将回归函数 $\frac{ax_1^{b_1}x_2^{b_2}}{x_3^{b_3}}$ 线性化了。

$y = \frac{ax_1^{b_1}x_2^{b_2}}{x_3^{b_3}}$ 为拟线性回归函数。 $y = \frac{ax_1^{b_1}x_2^{b_2}}{x_3^{b_3}} + \varepsilon$ ，则不能线性化，成为本质上的非线性回

归。为讨论方便，只要试题中没有出现随机项 ε 的非线性回归模型 $y=f(x)$ 的形式，其能否线性化只取决于 $f(x)$ 的形式；回归函数 $f(x)$ 的形式常可由数据 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ 的散