深圳大学成人教育系列教材

主　编/赵延孟　刘绛玉
副主编/米据生　赵性聚

经济数学

下册

吉林大学出版社

J J S X

深圳大学成人教育系列教材

经济数学

下册

主　编　赵延孟
　　　　刘绛玉
副主编　米据生
　　　　赵性聚

吉林大学出版社

经济数学
(下册)
主编 赵延孟 刘绛玉

责任编辑、责任校对：赵洪波	封面设计：张沭沅
吉林大学出版社出版	吉林大学出版社发行
(长春市解放大路125号)	深圳市鹰达印刷包装有限公司印刷
开本：850 × 1168 毫米 1/32	2000年1月第1版
印张：9.25	2000年1月第1次印刷
字数：220千字	印数1-5000册
ISBN 7-5601-2270-1/O · 245	定价：16.00元

深圳大学成人教育系列教材

编 委 会

前　　言

根据深圳大学领导的指示精神，由深圳大学成人教育学院组织编写的《马克思主义哲学原理》、《政治经济学》、《公文写作》、《高等数学》、《经济数学》等5本成人系列专用教材，是由多年从事成人教育的十几名教授、讲师共同编写的。编写目的，是为了适应成人学习的特点，针对学生学习的流动性、学习时间的间隔性、学习内容的应用性及学习方法的先实际后理论、边学习边实践等特点，多次召集学科讨论会，并邀请校内知名教授和专家作顾问，由主编牵头、专家设计、集思广益、反复论证而成书的。

应该说，本书的编写既符合国家和省市教育部门的编书规定，又符合学科本身学习规律的要求；既符合成人学生的学习实际需要，又符合上级对有关学科的统考及大纲要求。在编写中，突出了系统理论，但不繁文冗琐，突出了科学知识的教授，但深入浅出，不搞过深的推理论证；并把案例教学和资料索引的提供，放在了本书的重要地位。所以，该书会成为深受广大青年欢迎的教材。

本教材在编写中，得到了章必功教授、郑天伦教授、蔡德麟教授、廖可人教授等的大力支持。从编写设想到案例选择和成书，每一过程都浸透了他们的心血，使本教材在科学性、系统性和应用性等方面，都具有鲜明的特色。

本系列教材主要编写人员如下：《马克思主义哲学原理》主编孙忠梅、赵宇峰，副主编凌静、屠海婷；《高等数学》上册主编刘平普，副主编朱慧、齐松茹、罗峰；《高等数学》下册主编刘平普、郭志芬，副主编朱慧、齐松茹；《经济数学》上册主编赵延孟，副主

编阮晓青、杨光辉、陈韩峰;《经济数学》下册主编赵延孟、刘绛玉,副主编米据生、赵性聚;《公文写作》主编赵蔚杰、曾锡环、副主编吴剑林、潘卿;《政治经济学》主编罗清和,副主编鲁志国、袁易明、胡大钺。

由于本系列教材在编写中,时间仓促,工作繁忙,科研任务多,加之编写人员的理论水平、教学实践及对学科本身认识的局限性,使系列教材本身尚有一定缺欠。特别在教学实践中更会显露出一些新的问题,那就需要学生和读者多提意见,我们虚心听取,尽快改进,逐步完善。

深圳大学成人教育系列教材编委会

1999 年 6 月 8 日

目　　录

第七章　微分方程

§1　微分方程的一些概念

95. 引例

在解决实际问题时，寻求变量之间的函数关系是非常重要的. 但在很多情况下，根据所给的条件不能直接得到函数关系，却可以列出含有要找的函数及其导数的关系式. 这样的关系式就是所谓微分方程. 本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法，并初步介绍它们在实际问题中的应用.

例 1　已知曲线上各点的切线斜率等于该点横坐标的平方，且该曲线通过原点，求曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，根据题意有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$$

这就是曲线 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，对其两端积分，得到

$$y=\frac{1}{3}x^3+C$$

其中 C 可根据题设（曲线通过原点，即 $y(0)=0$）来确定，易得 $C=0$，从而所求的曲线方程为

$$y=\frac{1}{3}x^3$$

例 2　设某商品的需求弹性 $\eta=-\frac{1}{3}P$，则该商品的需求量 Q 和价格 P 满足方程

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-\frac{1}{3}P$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-\frac{1}{3}Q$$

这是一个含有需求函数的导数的方程．求该商品的需求函数，就是求满足这个方程的函数．

96．基本概念

含有未知函数的导数(或微分)的方程叫微分方程．在不至于混淆的情况下，微分方程简称为方程．

方程中未知函数导数的最高阶数，称为该方程的阶．

例：方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2y=0$$

是一阶微分方程．

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x^2+xy=y\sin x$$

是二阶微分方程．

如果函数 $y=f(x)$ 满足一个微分方程，则称它是该微分方程的解．

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与该方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解．

例：$y=\frac{1}{3}x^3+C$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$ 的通解．

当自变量取某值时，要求未知函数及其导数取给定值，这种条件称为初始条件．

例如，条件曲线过原点，即

$$y(0)=0$$

就是初始条件，也可写为

$$y\big|_{x=0}=0$$

满足初始条件的解，称为微分方程满足该初始条件的特解. 例如 $y=\frac{1}{3}x^3$ 是微分方程$\frac{dy}{dx}=x^2$ 满足 $y(0)=0$ 的特解.

例 3 列车在平直轨道上以 20m/s 的速度行驶，当制动时，列车加速度为 $-0.4\mathrm{m/s^2}$，求制动后列车的运动规律.

解 设列车开始制动后 t 秒钟内行驶了 s 米，按题意，欲求出未知函数 $s=s(t)$.

由题意列出微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-0.4$$

积分一次，得

$$\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$$

根据题意 s 应满足

$$s'(0)=20$$

因假定路程 s 是从开始制动时算起的，也就是说 $s(0)=0$，把这两个条件代入上式得

$$C_1=20,\quad C_2=0$$

于是制动后列车的运动规律

$$s=-0.2t^2+20t$$

§2 一阶微分方程

97. 可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

的方程，称为可分离变量的微分方程. 解法如下：

设 $f(x),g(y)$为连续函数,当 $g(y)\neq 0$ 时,以 $g(y)$除方程两端,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

对两端积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

即是微分方程的通解.

例 1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$ 的通解.

解 分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$$

对两边积分,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x$$

得

$$\ln y = x^2 + C_1 \quad (C_1 \text{ 为任意常数})$$

整理得

$$y = \mathrm{e}^{x^2+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\cdot \mathrm{e}^{x^2} = C\mathrm{e}^{x^2} \quad (C = \mathrm{e}^{C_1})$$

为所求通解.

例 2 求方程 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

对两端积分,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得

$$\ln y = \ln x + \ln C \quad (C\text{ 为任意常数})$$

整理得

$$y = Cx$$

为所求通解.

例 3 已知某产品的净利润 L 与广告支出 x 有关. 设净利润 L 随广告支出的增加而增加,其增长率正比于常数 a $(a>0)$减去净利润,且广告支出为零时,净利润为 $L_0(L_0<a)$,求净利润 $L=L(x)$.

解 依题意有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = k(a-L) \quad (\text{其中 } k\text{ 为比例常数})$$

将上式分离变量得

$$\frac{1}{a-L}\mathrm{d}L = k\mathrm{d}x \quad (\text{由题知 } a-L>0)$$

对两边积分,

$$\int \frac{1}{a-L}\mathrm{d}L = \int k\mathrm{d}x$$

即

$$-\ln(a-L) = kx + C_1$$

则

$$L = a - C\mathrm{e}^{-kx}$$

由初始条件 $L|_{x=0}=L_0$,得

$$C = a - L_0$$

于是

$$L = a + (L_0 - a)\mathrm{e}^{-kx}$$

由上式知

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim_{x\to\infty}[a + (L_0 - a)\mathrm{e}^{-kx}] = a$$

表明净利润不断增加,且趋向水平渐近线 $L=a$,这表明参数 a

的经济含义是净利润可达到最大值.

98. 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程,称为齐次微分方程,简称齐次方程,解法如下:

令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$y = u \cdot x$$

从而

$$y' = u + xu'$$

于是原方程化为

$$u + xu' = f(u) \quad 或 \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u$$

是可分离变量方程.

例 4 求微分方程

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

的通解.

解 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$y = u \cdot x, \quad y' = u + xu'$$

代入方程,得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}u$$

分离变量, 得

$$\operatorname{ctg}u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对两边积分, 得

$$\ln\sin u = \ln x + \ln C$$

整理得