



高等院校力学教材

Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

闫晓军 胡殿印 张小勇 王荣桥 编著

清华大学出版社





高等院校力学教材

Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

闫晓军 胡殿印 张小勇 王荣桥 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

弹性力学是力学、机械、土木、航空航天等专业的基础课。本书紧密结合当前工程技术发展,对相关概念和知识进行了介绍和阐述;同时,根据弹性力学的发展历程,系统、条理地给出了其研究方法。

全书共9章,涵盖了弹性力学的发展历史、数学基础、基本概念、方程组建立及求解原理、经典例题、数值方法、实验方法等内容。在大部分章中增加“重点概念阐释及知识延伸”部分,将该章涉及的重点概念进行深入内涵解释或证明,对涉及其他学科的知识点也进行了介绍、对比、关联,以期起到学科间的交叉和融会贯通、扩展视野的作用。

本书可作为高等学校工科相关专业本科、研究生的学习使用教材,也可供工程技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/闫晓军等编著.--北京:清华大学出版社,2015

高等院校力学教材

ISBN 978-7-302-40742-3

I. ①弹… II. ①闫… III. ①弹性力学—高等学校—教材 IV. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第160624号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:沈露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市金元印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:14.25 字 数:346千字

版 次:2015年8月第1版 印 次:2015年8月第1次印刷

印 数:1~2500

定 价:29.00元

前 言

弹性力学是力学、机械、土木、航空航天等专业的基础课。作为一门基础课的教材,一方面要准确、生动地介绍课程相关的概念和知识,为读者后续的学习奠定基础;另一方面,还需要系统、条理表述本学科的研究方法,便于读者在后续的工作中借鉴和使用。

在阐述弹性力学基本概念时,教材注重科学(弹性力学)和技术(工程)的结合。以第7章弹性力学的经典例题为例,教材首先介绍其工程背景,说明“从哪儿来”;然后在此基础上抽象出物理模型;在数学求解之后,则给出求解结果的工程应用,指出“到哪儿去”。每个例题的内容,体现了“认识世界”到“改造世界”的过程。书中各章的内容都给出了大量的工程实例。

在介绍弹性力学的求解方法时,教材注重阐述整个求解思路。首先,通过介绍弹性力学及其经典例题的发展历史来体现:较详细地介绍了科学家如何寻求和定义合适的物理量,如何建立不同形式的方程,以及如何采用不同的化简方法来求解的历史,还原了弹性力学的发展历程。其次,通过章节安排来体现:先介绍基本物理量(第3章),再介绍方程组(第5章),再重点介绍如何简化求解的过程(第6章)。弹性力学的发展历史和求解方法的演变,实际上折射出科学研究的过程和方法,以期读者能够从中受益。

教材还注重和其他学科的交叉和融汇。除第2章外,在每章内容中增加“重点概念阐释及知识延伸”部分,将本章涉及的重点概念进行深入内涵地解释或证明,将本章涉及的其他学科的知识点也进行了介绍、对比、关联,以期起到学科间的交叉和融会贯通、扩展视野的作用。

本书同时采用多种方式来表达课程内容。在每章中尽量安排框图来表达各部分内容的逻辑关系;通过曲线、云图、照片等表达求解结果;对于经典例题,通过多种求解方法来介绍,以期加深读者的印象。

北京航空航天大学能源与动力工程学院航空推进系的部分博士生和硕士生参加了本书的文字、图片的输入和整理工作,在此表示感谢!他们是博士生:张锴,陈霞,黄大伟,陈操,刘志伟,李达,高晔,张龙,毛建兴,蒋康河;硕士生:任军,朱畅,高伟思,杨宝锋,杨艺,聂

超,张顺杰。

在本书作为讲义使用阶段,北京航空航天大学能源与动力工程学院 2012 级本科生对书中的内容提出了大量的建议,在此表示感谢!

限于作者水平,疏漏和不足之处难免,恳请读者指正!

编者
2015 年春

弹性力学符号表

A	面积
C_{ijkl}	弹性常数张量
c_{mn}	弹性矩阵
D_{ij}	初始应力张量
e_{ij}	应变偏张量
e_1, e_2, e_3	单位矢量
E	弹性模量
F_B	体力集度
F_S	面力集度
F_{Sx}, F_{Sy}	薄板截面剪力
F_x, F_y, F_z	势函数引起的有势力
F^e	有限单元载荷
F_L^e	有限单元节点载荷
G	剪切模量
I_1, I_2, I_3	应力张量第一、二、三不变量
I'_1, I'_2, I'_3	应变张量第一、二、三不变量
I	惯性矩
I_p	极惯性矩
J_1, J_2, J_3	应力偏张量第一、二、三不变量
J'_1, J'_2, J'_3	应变偏张量第一、二、三不变量
K	体积模量(第 4 章)、应力集中系数(第 7 章)
\mathbf{K}	整体刚度矩阵
\mathbf{K}^e	单元刚度矩阵
l_{ij}	坐标变换张量
p	静水压力
q	单位长度的载荷
r	极坐标径向坐标
s_{ij}	应力偏张量
S	面积, 静矩(第 7 章)
t	厚度
T_n, T_t	应力矢量法向、切向分量
T_x, T_y, T_z	应力矢量 X, Y, Z 方向分量
u, v, w	位移 X, Y, Z 方向分量
V	势函数
w	扭转翘曲函数(第 6 章、第 7 章)

W	应变能
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	X, Y, Z 方向面力载荷
Z	垂度
α	单位长度扭转角
β	扭转角度
γ_8	八面体切应变
δ_{ij}	Kronecker 符号
Δ	节点位移向量
ϵ	应变张量
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	第一、二、三主应变
ϵ_8	八面体正应变
ϵ_{ijk}	交错张量
θ	体积应变(第 4 章)、极坐标角度(第 6 章)
λ	拉梅第一常数
μ	拉梅第二常数
ν	泊松比
ρ	密度
σ	应力张量
σ_n	正应力
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	第一、第二、第三主应力
σ_8	八面体正应力
σ_m	平均正应力
$[\sigma]$	许用应力
τ	切应力
τ_8	八面体切应力
$\varphi_f(r)$	轴对称问题应力函数
$\varphi(x, y)$	圣维南扭转函数
Φ	艾里应力函数(第 6 章)、普朗特应力函数(第 6 章)
Ψ	断面收缩率(第 7 章)、插值函数(第 8 章)
ω	角速度
I, II, III	张量的第一、第二、第三不变量
∇	散度运算符号

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 发展历史	2
1.3 基本假设	7
1.4 研究方法	10
1.5 与其他力学课程的关系	12
1.6 本书内容安排	12
1.7 重点概念阐释及知识延伸	13
1.7.1 连续介质	13
1.7.2 弹性力学建模中的物理量	13
1.7.3 各向同性与各向异性	14
1.7.4 弹性力学与材料力学的对比例子	16
1.7.5 巴黎综合理工学院对弹性力学发展的贡献	16
思考题	17
习题	17
参考文献	18
第 2 章 数学基础	19
2.1 概述	19
2.2 坐标系	20
2.3 标记方法	20
2.3.1 指标记法	20
2.3.2 求和约定	21
2.3.3 微分标记法	22

2.4	标量与矢量	23
2.5	坐标变换	23
2.6	张量	25
2.7	常用张量	26
2.7.1	Kronecker 符号	26
2.7.2	交错张量(ϵ_{ijk} 符号)	27
2.8	张量相关运算及法则	28
2.8.1	张量的性质	28
2.8.2	二阶张量特征值及不变量	29
2.8.3	各向同性张量	30
	思考题	31
	习题	31
	参考文献	33
第 3 章	应力与应变	34
3.1	概述	34
3.2	外力	35
3.3	应力	36
3.3.1	应力矢量	36
3.3.2	应力张量	37
3.3.3	主应力	40
3.3.4	八面体应力	42
3.3.5	应力球张量和应力偏张量	42
3.3.6	平衡方程	44
3.3.7	应力小结	46
3.4	应变	46
3.4.1	位移	46
3.4.2	应变张量	47
3.4.3	位移与应变关系	48
3.4.4	主应变	50
3.4.5	八面体应变	51
3.4.6	应变球张量和应变偏张量	52
3.4.7	变形协调方程	52
3.4.8	应变小结	54
3.5	重点概念阐释及知识延伸	54
3.5.1	体力与面力的尺寸效应	54
3.5.2	大变形下的几何方程	54

3.5.3	用位移表达的平衡方程	55
3.5.4	应力张量的证明	55
3.5.5	静止流体的应力状态	57
	思考题	58
	习题	58
	参考文献	60
第 4 章	弹性本构方程	61
4.1	概述	61
4.2	广义胡克定律	62
4.2.1	应力应变关系	62
4.2.2	弹性常数张量	63
4.3	各向异性弹性体	64
4.3.1	一般各向异性弹性体	64
4.3.2	具有一个对称面的弹性体	65
4.3.3	具有两个对称面的弹性体	66
4.3.4	横向各向同性弹性体	67
4.4	各向同性弹性体	69
4.4.1	弹性常数的简化	69
4.4.2	各向同性弹性常数的测定	71
4.5	重点概念阐释及知识延伸	74
4.5.1	脆性材料与韧性材料	74
4.5.2	温度对本构方程的影响	74
4.5.3	脆性材料的单轴性能测试	75
4.5.4	牛顿流体的本构方程	76
4.5.5	复合材料及其本构方程	76
4.5.6	形状记忆合金及其本构方程	77
	思考题	77
	习题	78
	参考文献	79
第 5 章	方程组求解方法与原理	80
5.1	概述	80
5.2	基本方程	80
5.3	边值问题及边界条件	81
5.3.1	应力边界条件	82
5.3.2	位移边界条件	82

5.3.3 混合边界条件	83
5.4 边值问题求解方法	84
5.4.1 应力法	84
5.4.2 位移法	86
5.5 叠加原理	88
5.6 圣维南原理	89
5.7 重点概念阐释及知识延伸	91
5.7.1 解的唯一性证明	91
5.7.2 叠加原理证明	92
5.7.3 有限元计算边界条件施加	93
5.7.4 应力解法中的方程个数	94
思考题	94
习题	94
参考文献	96
第 6 章 方程组的化简与求解	97
6.1 概述	97
6.2 平面问题	100
6.2.1 平面应力	101
6.2.2 平面应变	102
6.2.3 平面问题直角坐标求解	103
6.2.4 平面问题极坐标求解	105
6.2.5 平面轴对称问题	108
6.3 柱体扭转	109
6.3.1 基本假设	109
6.3.2 等截面柱体扭转的位移解法	112
6.3.3 等截面柱体扭转的应力解法	113
6.4 薄板弯曲	115
6.4.1 基本假设	116
6.4.2 薄板弯曲的位移解法	117
6.4.3 薄板内力	118
6.4.4 边界条件	119
6.5 重点概念阐释及知识延伸	121
6.5.1 位移函数	121
6.5.2 应力函数的复变函数形式	123
6.5.3 流体力学中的势函数	124
6.5.4 柱体扭转的薄膜比拟	124

6.5.5 基尔霍夫在其他学科的贡献	125
思考题	126
习题	126
参考文献	127
第7章 经典例题求解	128
7.1 概述	128
7.2 深梁弯曲问题	128
7.2.1 工程背景	128
7.2.2 物理模型	129
7.2.3 求解过程	129
7.2.4 结果分析	132
7.2.5 工程应用	135
7.3 旋转圆盘应力分布	136
7.3.1 工程背景	136
7.3.2 物理模型	138
7.3.3 求解过程	138
7.3.4 结果分析	140
7.3.5 工程应用	141
7.4 小孔应力集中	143
7.4.1 工程背景	143
7.4.2 物理模型	144
7.4.3 求解过程	144
7.4.4 结果分析	148
7.4.5 工程应用	149
7.5 等截面柱体扭转	151
7.5.1 工程背景	151
7.5.2 物理模型	152
7.5.3 求解过程	152
7.5.4 结果分析	154
7.5.5 工程应用	155
7.6 重点概念阐释及知识延伸	156
7.6.1 强度理论	156
7.6.2 结构静强度设计	157
7.6.3 应力集中手册	158
7.6.4 断裂力学: 结构缺陷/裂纹描述	159
7.6.5 温度对结构的影响	160

思考题	161
习题	161
参考文献	163
第 8 章 数值方法	164
8.1 概述	164
8.2 有限单元法	164
8.2.1 结构离散化	165
8.2.2 位移场表达	165
8.2.3 应力应变的位移表达	167
8.2.4 单元分析	168
8.2.5 整体分析	169
8.2.6 边界条件及求解	170
8.3 有限差分法	176
8.3.1 建立差分方程	177
8.3.2 边界应力函数求解	178
8.3.3 虚节点应力函数求解	179
8.4 重点概念阐释及知识延伸	182
8.4.1 有限元法的单元类型	182
8.4.2 有限元法的用户材料子程序	183
8.4.3 经典例题的有限元方法求解	184
8.4.4 变分法	193
8.4.5 边界元法	194
思考题	194
习题	195
参考文献	195
第 9 章 实验方法	196
9.1 概述	196
9.2 应变片测量	196
9.2.1 测量原理	196
9.2.2 测量系统	198
9.2.3 测量实例	199
9.3 光弹性测量	200
9.3.1 测量原理	200
9.3.2 测量系统	203
9.3.3 测量实例	204

9.4	数字图像相关法	205
9.4.1	测量原理	205
9.4.2	测量系统	206
9.4.3	测量实例	207
9.5	重点概念阐释及知识延伸	209
9.5.1	云纹干涉法	209
9.5.2	激光散斑干涉法	210
9.5.3	全息干涉法	211
	思考题	213
	习题	213
	参考文献	214

第 1 章

绪 论

1.1 概 述

力学是物理学的一个分支,主要研究能量、力以及它们与物体的平衡、变形或运动之间的关系。按照基础理论的差异,力学可以划分为经典力学和量子力学。其中,经典力学起源于牛顿运动定律,主要研究低速或静止的宏观物体;而量子力学的主要研究对象是微观粒子。图 1.1 给出了不同空间和时间尺度下,目前发展的相关力学理论和方法;其中,连续介质力学是研究包括固体和流体在内的连续介质宏观性质的力学,包括固体力学、流体力学等。

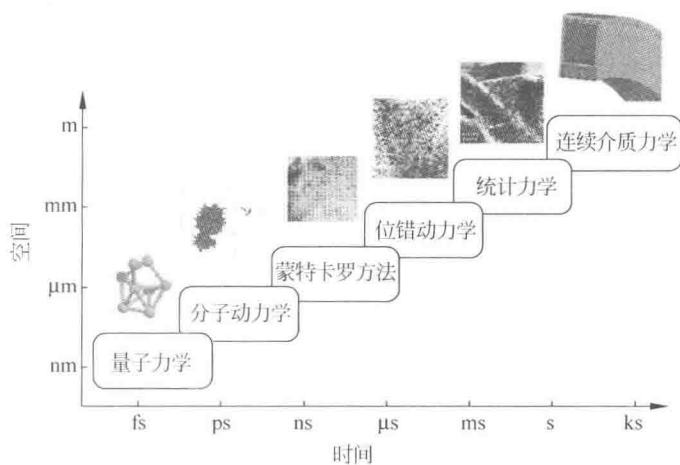


图 1.1 不同的空间和时间尺度下,目前采用的力学理论和方法^[1]

弹性力学(Elasticity),又称弹性理论(Theory of Elasticity),是研究弹性体由于外力或者其他外界因素作用,物体内部所产生的位移、变形和内力分布等。弹性力学是固体力学的基础和分支。

本章首先简单介绍弹性力学的发展历史,在此基础上,介绍弹性力学研究的基本假设、研究方法以及与其他力学课程的关系。

1.2 发展历史

弹性力学起源于对结构变形和破坏的研究,根据不同时期的发展特点,其发展阶段可以划分为萌芽探索、框架建成、体系形成、分支发展等四个阶段。

1. 萌芽探索(1700年之前)

在萌芽探索阶段,科学家们注意到了固体的变形和破坏现象,并初步研究了变形和破坏与结构尺寸、外力之间的关系,在此基础上,提出了胡克定律,为后续弹性力学的发展奠定了基础。

意大利博学家达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452—1519)是最早采用实验方法来研究材料强度的科学家。他当时研究了铁丝的断裂现象,这可能和他经常利用铁丝挂画而发生断裂的生活经历有关。达·芬奇的研究过程如下(图 1.2):选用不同长度的铁丝来悬挂容器,向容器中注入细沙直至铁丝断裂。实验研究得出结论是:铁丝的长度越短,断裂时承担的重量越大,即强度越高。得出这样结论的主要原因是:当时材料制造水平较低,铁丝长度越短,其含有缺陷的概率就越低,因此表现出的材料强度就越高。

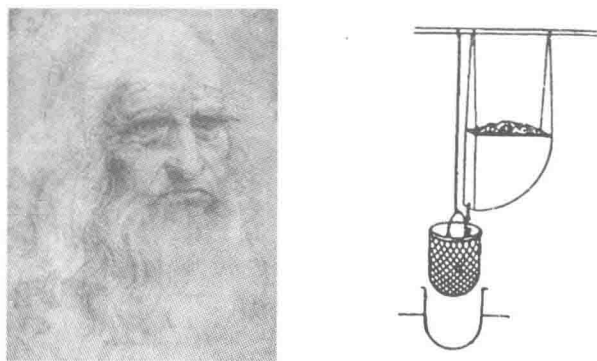


图 1.2 达·芬奇及铁丝断裂实验

意大利科学家伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)除了在天文学方面很有造诣外,也是早期开始对材料强度问题进行研究的科学家。他首先考虑到了固体的变形,对直杆进行过拉伸实验(图 1.3),发现杆件的承载能力与横截面积成正比,而与它的长度无关,他把杆件这种承载能力叫做“抗断裂力”(Absolute Resistance to Fracture)^[2]。此外,伽利略还对悬臂梁进行了受力计算与分析,由于对梁端部 AB 的应力分布(图 1.3)假设不合适,得出的计算结果并不准确。

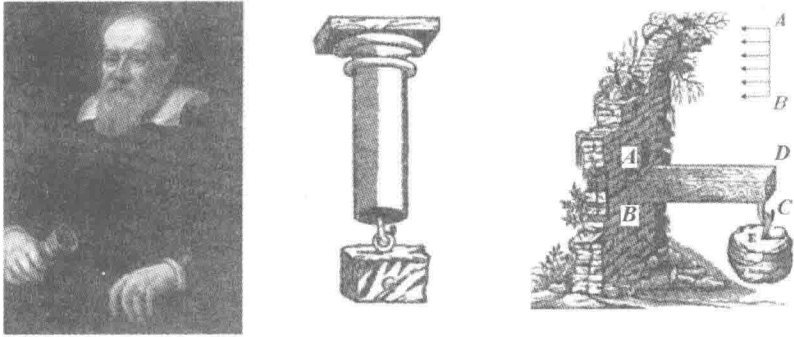


图 1.3 伽利略及直杆、悬臂梁强度实验

英国科学家胡克(Robert Hooke, 1635—1703)在 1678 年发表了第一篇讨论材料弹性的文章《弹簧》。在文章中,作者通过对金属弹簧悬挂砝码的实验研究发现,不同重量的砝码及其引起的弹簧伸长量具有相同的比例(图 1.4),即力与力所产生的位移变化量成正比,这种力与位移变化量间的线性关系即胡克定律。胡克曾担任英国皇家学会的实验室主任,在力学、显微学、光学方面的贡献突出,胡克定律是弹性力学后续发展的理论基础。

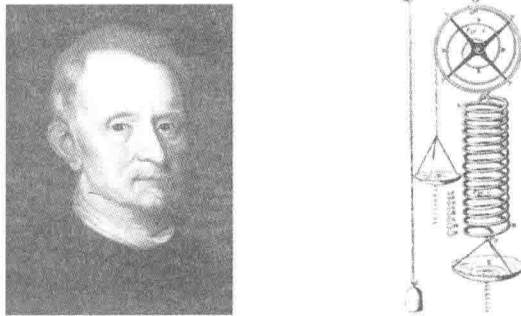


图 1.4 胡克及弹簧拉伸实验

在这一时期,法国物理学家马略特(Edme Mariotte, 1620—1684)针对梁构件进行了一系列拉伸与弯曲试验,改进了伽利略的悬臂梁计算理论。瑞士的伯努利家族代表人物之一雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705)通过研究得到了悬臂梁的挠度曲线。

在弹性力学的萌芽探索阶段,科学家通过对简单结构的变形和破坏研究,积累了一定的力学认识和基础规律。伴随桥梁道路建设、造船、军械制造等工程领域的发展,构建更为普遍的力学理论用来指导变形结构设计的需求越来越迫切。

2. 框架建成(1700—1880 年)

对弹性体在受到外力后的平衡状态进行描述,选取合适的物理量,并建立方程体系,是弹性力学在这一发展时期的主要特征。

最早提出应力应变概念的是雅各布·伯努利,他在 1705 年的一篇论文中提出了应力和应变的概念;瑞士伟大的科学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783, 图 1.5)在 1727 年提出了应力和应变之间的线性关系;1807 年,英国物理学家托马斯·杨(Thomas Young,