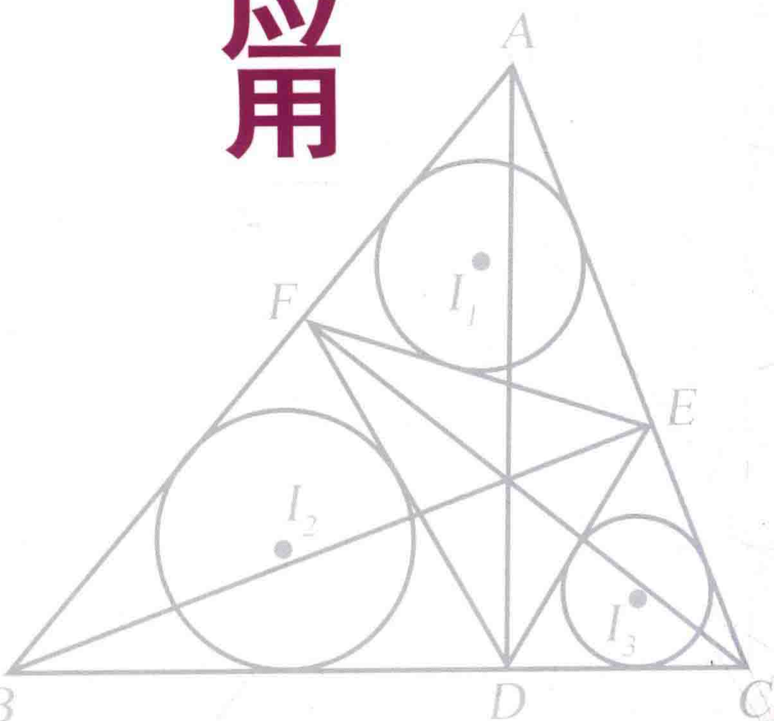
三角形的六心及其应用

SANJIAOXINGDELIUXINJIQIYINGYONG

贺功保 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

三角形的六心及其应用

贺功保　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

全书共分 6 章，包括三角形六心的概念和性质，三角形六心的坐标表示、向量形式及应用，三角形六心间的距离，圆内接四边形中三角形的六心性质及应用，三角形六心性质的综合应用等内容，每章节后配有习题，书后附有习题参考答案。

本书适合于初、高中学生，初、高中数学竞赛选手及教练员使用，也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

三角形的六心及其应用/贺功保编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015. 10

ISBN 978-7-5603-5642-6

Ⅰ. 三…　Ⅱ. ①贺…　Ⅲ. 三角形-研究　Ⅳ. O123. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 237413 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　总印张 33.5　总字数 580 千字
版　　次　2015 年 10 月第 1 版　2015 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5642-6
定　　价　68.00 元

目　录

第 1 章　三角形六心的概念和性质

三角形的六心，即外心、内心、重心、垂心、旁心、界心，是“两考”(即中考与高考）和“两赛”(即初中数学竞赛与高中数学竞赛）中，经常出现的热点内容，也是初高中数学竞赛大纲中特别加强的内容.与三角形六心有关的几何问题涉及知识广，难度大，技巧性强，方法灵活，是学生较难掌握的内容之一，因此，我们有必要对三角形六心的知识和解题技巧作一专门的研究和介绍.下面首先介绍三角形六心的概念和性质.

第 1 节　三角形外心的概念和性质

我们知道，经过线段中点且和这条线段垂直的直线，叫作这条线段的中垂线(或者称为垂直平分线).例如，图 1.1 中，直线 MN 就是线段 BC 的中垂线；或者说，它是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线(即直线 MN 经过 BC 的中点 P，而且垂直 BC).

我们还知道，线段的中垂线上任何一点和这条线段的两个端点距离相等.如图 1.2 中，O 是线段 BC 的中垂线 L_1 上的点，则 $OB=OC$.由此可见，只要作出 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线 L_1 和边 CA 的中垂线 L_2，那么，L_1 和 L_2 相交的交点 O，就是和 A,B,C 距离相等的点，即有 $OA=OB=OC$.

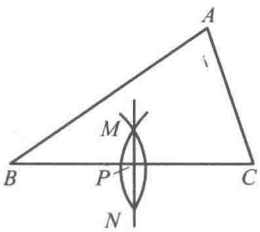


图 1.1

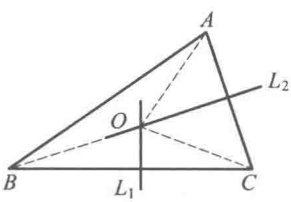


图 1.2

容易想到，如果再作出边 AB 的中垂线 L_3，那么，L_1 和 L_3 的交点也是和 A，B，C 距离相等的点，同理 L_2 和 L_3 的交点也应该是和 A,B,C 距离相等的点，这

样，我们要问：这两个交点是否就是 L_1 和 L_2 的交点 O 呢？也就是说，这三条直线 L_1，L_2，L_3 是否相交于一点呢？

我们来作三角形的中垂线：

先作锐角三角形三边的中垂线，如图 1.3 所示，可以看到，所作的这三条中垂线相交于一点 O；

再来作钝角三角形三边的中垂线，如图 1.4 所示，所作出的这三条中垂线相交于一点 O；

最后，来作直角三角形的中垂线，如图 1.5 所示，所作出的这三条中垂线也相交于一点 O.

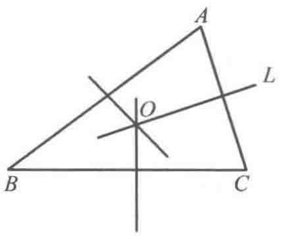


图 1.3

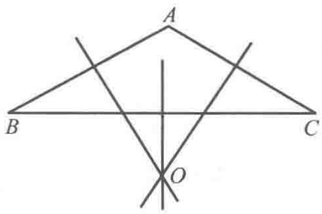


图 1.4

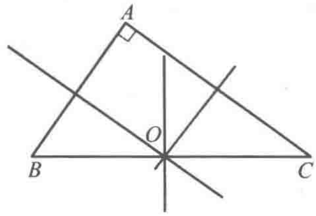


图 1.5

通过实际作图，综合以上三种情形，得到如下结论：

任何三角形的三边的中垂线，都相交于一点，这个点和三角形的三个顶点距离相等．通常称为三角形的“外心”，用大写字母“O”来表示，由上面的图 1.3，1.4，1.5 可以看出：

(1) 锐角三角形的外心在三角形内；

(2) 钝角三角形的外心在三角形外；

(3) 直角三角形的外心就是斜边的中点.

根据以上事实，我们得到：

三角形外心定理　三角形三边的中垂线相交于一点，这个点到三角形三个顶点的距离相等.

如图 1.6 所示，PD，QE，SF 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 的中垂线．求证：PD，QE，SF 相交于一点 O，且 $OA=OB=OC$.

证明　因为 BC 和 CA 相交于点 C，所以它们的中垂线 PD 与 QE 必相交于一点 O，联结 OA，OB，OC.

因为点 O 在 BC 的中垂线 PD 上，所以 $OB=OC$.

又点 O 在 CA 的中垂线 QE 上，所以 $OC=OA$.

于是，有 $OA=OB=OC$.

由 $OA=OB$ 可知，点 O 必在 AB 的中垂线 SF 上，即 SF 经过 PD，QE 的交点 O，这就证明了 $\triangle ABC$ 的三边的中垂线 PD，QE，SF 相交于一点 O，且 $OA=OB=OC$.

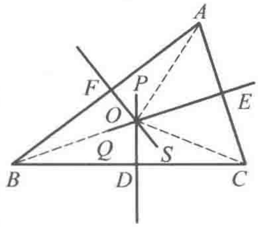


图 1.6

在上面的证明过程中，我们的证明思路是：先推断其中的两条直线 PD，QE 相交于点 O，再利用交点 O 的特性 $OA=OB=OC$ 来进一步判断第三条直线 SF 也经过这个交点 O，这是证明三线共点的一种常用方法.

由以上定理易知：$\triangle ABC$ 的外心 O 是到三个顶点 A，B，C 距离相等的点，因此，以 O 为圆心，OA 为半径作圆，必定经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点(图 1.7).

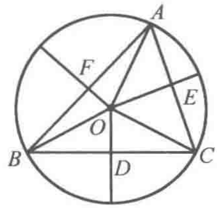


图 1.7

三个顶点都在同一个圆周上的三角形，叫作圆的内接三角形，这个圆就叫作三角形的外接圆，如图 1.7 中，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 都在圆 O 上，因此，这个 $\triangle ABC$ 就叫作圆 O 的圆内接三角形，这个圆 O 就叫作 $\triangle ABC$ 的外接圆.

由此可见，三角形的外心就是三角形的外接圆的圆心，根据以上知识，不难推得如下一些基本性质：

(1) 确定一个三角形的外心没有必要把三边的中垂线都作出来，只要作出三角形的任意两边的中垂线，则它们的交点就是所要确定的三角形的外心.

(2) 三角形的两边的中垂线的交点是唯一的，因此，每个三角形有且只有一个外心，同时，每个三角形有且只有一个外接圆，并且进一步可知：经过不在同一直线上的三点，可以作一个而且只可以作一个圆.

(3) 三角形的外心在任意一边的中垂线上，也就是三角形的任意一边的中垂线必定经过外接圆的圆心. 换言之，弦的垂直平分线必定经过圆心.

(4) 直角三角形的外心是斜边的中点，由此可见：以直角三角形的斜边为直径的圆，必定经过直角顶点，也就是说，这个圆是直角三角形的外接圆. 由此还可以得到：直角三角形中，斜边上的中线长等于斜边长的一半；直径所对的圆周角必是直角. 再结合锐角三角形与钝角三角形外心的作图方法(图 1.3，1.4)还可以进一步得到：圆外的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是锐角，圆内的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是钝角，反过来，这个结论也成立.

对于三角形的外心除了具备以上基本性质外，经过研究，我们发现三角形

的外心还具备如下性质：

定理 1.1 三角形的外心是三角形三边中垂线的交点；三角形的外心到三角形三顶点的距离相等，反之亦成立.

定理 1.2 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，当 $\angle A$ 为锐角时，则如图 1.8 所示，有 $\angle BOC=2\angle A$；当 $\angle A$ 为钝角时，则如图 1.9 所示，有 $\angle BOC=360^\circ-2\angle A$.（想一想，为什么？）

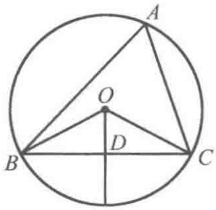


图 1.8

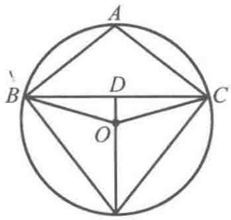


图 1.9

反过来，我们有若点 O 和 C 在直线 AB 同侧，$OA=OB$ 且 $\angle AOB=2\angle ACB$，则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心；若点 O 和 C 分居直线两侧，$OA=OB$，且 $\angle AOB=2(180^\circ-\angle ACB)$，则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

事实上，如图 1.10，延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆（存在且唯一）于点 D，联结 BD，则 $\angle ADB=\angle ACB$. 由 $\angle AOB=2\angle ACB$ 知 $\angle AOB=2\angle ADB$，所以 $\angle ADB=\angle OBD$，所以 $OD=OA=OB$. O 为 $\triangle ABD$ 的外心，又 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆，故点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

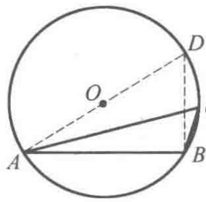


图 1.10

同理可证明后一情形成立.

顺便指出，这个性质可以用来判断一个点是否为三角形的外心.

例 1.1 （1987 年全国初中数学联赛试题）如图 1.11，D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点，$AD:DC=2:1$，$\angle C=45^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，求证：AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

证明 以 BD 为底边作等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$，使 O 与 C 在 BD 同侧，OD 交 BC 于点 E，联结 OC，则由定理 1.2 易知 O 为 $\triangle BCD$ 的外心.

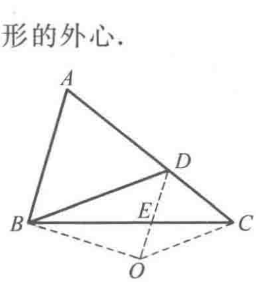


图 1.11

又

$$\angle DBC=\angle ADB-\angle ACB=15^\circ$$

所以 $$\angle DOC = 2\angle DBC = 30^\circ$$

所以 $$\angle BOC = 120^\circ$$

所以 $$\angle OCB = \angle OBC = 30^\circ = \angle DOC$$

所以 $$EC = OE = \frac{1}{2}BE$$

所以 $$BE : EC = AD : DC$$

即 $AB \parallel OD$,再由 $\angle BOD = 90^\circ$ 知 $AB \perp OB$. 所以 AB 为 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

例 1.2 (1992 年全国初中数学联赛试题) 如图 1.12,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,D 是底边 BC 上的一点,E 是线段 AD 上的一点,且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$. 求证:$BD = 2CD$.

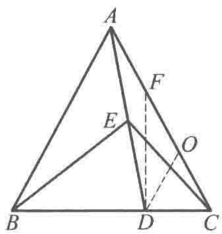


图 1.12

证明 作 $DO \parallel AB$ 交 AC 于 O,则由 $AB = AC$ 知 $OD = OC$,且 $\angle DOC = \angle A = 2\angle DEC$,所以点 O 为 $\triangle EDC$ 的外心,取 F 为 $\triangle EDC$ 的外接圆与 AC 的交点,则 $OF = OC = OD$,且 $\angle ACE = \angle ADF$,所以 $\triangle ACE \backsim \triangle ADF$,所以,$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AF}{AE}$,再由 $DO \parallel AB$ 有

$$\angle ADO = \angle BAE, \angle DOC = \angle A = \angle BED$$

所以 $$\angle AOD = \angle BEA$$

所以 $$\triangle ADO \backsim \triangle BAE$$

所以 $$\frac{OD}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

所以 $$AF = OD = OC = OF$$

再由 $OD \parallel AB$ 知$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AO}{OC}$,故 $BD = 2DC$.

定理 1.3 外心与顶点的连线与其中一边的夹角与该边所对角互余. 如在图 1.8 中,$\angle OBC + \angle A = 90^\circ$.

例 1.3 (第 26 届 IMO 试题) 设以 O 为圆心的圆,过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 与 C,且与边 AB,BC 分别交于 K 和 N,点 K 与 N 不同,$\triangle ABC$ 与 $\triangle KBN$ 的外接圆交于 B,M.

求证:$\angle OMB = 90^\circ$.

证明 如图 1.13,设 AC 与 KN 相交于点 P,联结 PB 与弧 BNK 相交于点 M',则由圆幂定理知

$$PC \cdot PA = PN \cdot PK = PM' \cdot PB$$

又 $$PM \cdot PB = PK \cdot PN,$$

所以 $$PM' \cdot PB = PM \cdot PB$$

从而知点 M 与 M' 重合.

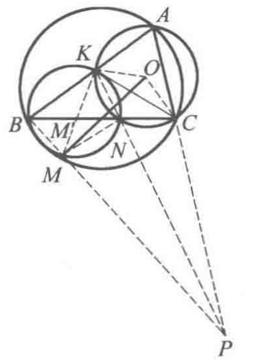


图 1.13

因为 A,K,N,C 四点共圆,所以 $\angle BNK = \angle A$,又 $\angle BNK = \angle BMK$,所以 $\angle BMK = \angle A$.

又由三角形的外心定理 1.3 知

$$\angle A + \angle KCO = 90°$$

下面只需证 $\angle KCO = \angle KMO$.

因为 $\angle BMN = \angle AKN = \angle NCP$,所以 M,N,C,P 四点共圆.

又 $\angle KMC = \angle KMN + \angle NMC = \angle KBN + \angle NPC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{KAC} - \overset{\frown}{KNC})$ 的度数,$\angle KOC = \overset{\frown}{KNC}$ 的度数,所以 $\angle KMC + \angle KOC = 180°$.

所以 K,O,C,M 四点共圆,从而可知结论成立.

定理 1.4 设三角形的三条边长,外接圆半径,面积分别为 $a,b,c,R,S_\triangle$,则 $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$.

事实上,如图 1.14

$$S_\triangle = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ac\sin B$$

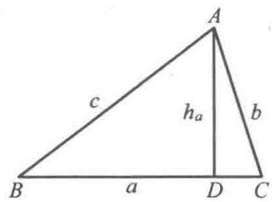


图 1.14

由正弦定理得,$\sin B = \frac{b}{2R}$,所以 $S_\triangle = \frac{abc}{4R}$,故 $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$.

对于其他情形,如钝角三角形或直角三角形,这个结论仍然成立.

定理 1.5 锐角三角形的外心到三边的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和.

证明 如图 1.15,设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,p,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 半周长,外接圆半径,内切圆半径,由

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ch_3 = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr \qquad ①$$

又 $A,F,O,E;B,F,O,D;C,D,O,E$ 分别四点共圆,则由托氏定理得

$$R \cdot \frac{a}{2}=\frac{c}{2} \cdot h_2+\frac{b}{2} \cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{b}{2}=\frac{c}{2} \cdot h_1+\frac{a}{2} \cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{c}{2}=\frac{a}{2} \cdot h_2+\frac{b}{2} \cdot h_1$$

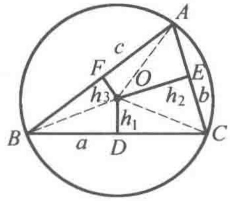


图 1.15

以上三式相加得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)R=\frac{a}{2}(h_2+h_3)+\frac{b}{2}(h_1+h_3)+\frac{c}{2}(h_1+h_2) \quad ②$$

由 ①＋② 得 $$pR+pr=p(h_1+h_2+h_3)$$

故 $$h_1+h_2+h_3=R+r$$

定理1.6 设O是$\triangle ABC$所在平面上的一点，过点O的任意一条直线分别交AB,AC于点P,Q，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=y\overrightarrow{AC}$，其中实数$x,y$具有任意性，$\frac{\sin 2B}{x}+\frac{\sin 2C}{y}=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$的充分必要条件是：$O$是$\triangle ABC$的外心.

证明 先证必要性：如图1.16，延长AO交BC于M，交外接圆于K，延长CO交AB于F，则

$$\frac{BM}{MC}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}=\frac{AM \cdot 2R\sin C \cdot \sin(90^\circ-\angle AKB)}{AM \cdot 2R\sin B \cdot \sin(90^\circ-\angle AKC)}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

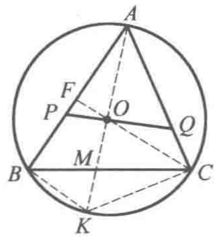


图 1.16

同理 $$\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

对$\triangle ABM$及截线FOC应用梅涅劳斯定理，得

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MO}{OA}=1$$

而 $$\frac{BC}{MC}=\frac{BM+MC}{MC}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2B}$$

于是 $$\frac{MO}{OA}=\frac{MC}{BC} \cdot \frac{BF}{FA}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}$$

从而 $$\frac{AO}{AM}=\frac{AO}{AO+MO}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

又 $$\frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}}=\frac{AP \cdot AO}{AB \cdot AM},\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BM}{BC}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C}$$

$$\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}$$

由
$$\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}=\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}}\cdot\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle AQO}}{S_{\triangle ACM}}\cdot\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}}$$
$$=\frac{AP\cdot AO}{AB\cdot AM}\cdot\frac{\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C}+$$
$$\frac{AQ\cdot AO}{AC\cdot AM}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}$$
即证得结论.

下面是充分性的证明：延长 AO 交 BC 于点 M，由平面向量基本定理知，存在实数 x_0,y_0，使得 $\overrightarrow{AM}=x_0\overrightarrow{AB}+y_0\overrightarrow{AC}$，又由共线定理知，存在实数 μ，使得 $\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AM}$，所以
$$\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AM}=\mu(x_0\overrightarrow{AB}+y_0\overrightarrow{AC})=\mu(\frac{x_0}{x}\overrightarrow{AP}+\frac{y_0}{y}\overrightarrow{AQ})$$
又由于 P,O,Q 三点共线，则存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AO}=(1-\lambda)\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{AQ}$. 所以
$$\overrightarrow{AO}=\mu(\frac{x_0}{x}\overrightarrow{AP}+\frac{y_0}{y}\overrightarrow{AQ})=(1-\lambda)\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{AQ}$$

即得
$$\frac{1}{x}=\frac{1-\lambda}{\mu x_0},\frac{1}{y}=\frac{\lambda}{\mu y_0}$$
所以
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{\sin 2B}{x}+\frac{\sin 2C}{y}=\frac{(1-\lambda)\sin 2B}{\mu x_0}+\frac{\lambda\sin 2C}{\mu y_0}$$
$$=\frac{y_0\sin 2B+\lambda(x_0\sin 2C-y_0\sin 2B)}{\mu x_0 y_0}$$

根据上面的分析可知 x_0,y_0,μ 都是已知的，但 λ 与 x,y 有关且具有任意性. 所以，要使上述等式恒成立，只需 $x_0\sin 2C=y_0\sin 2B$，且 $\mu=\frac{\sin 2B}{x_0(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}$，因此
$$\overrightarrow{AO}=\mu(x_0\overrightarrow{AB}+y_0\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{AB}+$$
$$\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\overrightarrow{AC}$$
也即
$$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$
由此可知，O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

定理 1.7 设 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点，过点 O 的任意一条直线分别交 AB,AC,BC 于点 P,Q,R，且 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OR}=y\overrightarrow{OP}$，其中实数 x,y 具有任

意性，$\dfrac{\sin 2B}{x}+\dfrac{\sin 2C}{y}=-\sin 2C$ 的充分必要条件是：O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

证明 先证充分性，因为 A,P,B 三点共线，则存在实数 λ_1，使得 $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}+\lambda_1\overrightarrow{OA}$.

又 A,Q,C 三点共线，则存在实数 λ_2，使得

$$\overrightarrow{OQ}=(1-\lambda_2)\overrightarrow{OC}+\lambda_2\overrightarrow{OA}$$

又由 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OP}$ 知

$$(1-\lambda_2)\overrightarrow{OC}+\lambda_2\overrightarrow{OA}=x[(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}+\lambda_1\overrightarrow{OA}]$$

即

$$(\lambda_2-x\lambda_1)\overrightarrow{OA}+x(\lambda_1-1)\overrightarrow{OB}+(1-\lambda_2)\overrightarrow{OC}=\mathbf{0} \qquad ①$$

又因为 B,R,C 三点共线，则存在实数 λ_3，使得

$$\overrightarrow{OR}=(1-\lambda_3)\overrightarrow{OC}+\lambda_3\overrightarrow{OB}$$

又由 $\overrightarrow{OR}=y\overrightarrow{OP}$ 知

$$\overrightarrow{OR}=(1-\lambda_3)\overrightarrow{OC}+\lambda_3\overrightarrow{OB}=y[(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}+\lambda_1\overrightarrow{OA}]$$

即

$$y\lambda_1\overrightarrow{OA}+[y(1-\lambda_1)-\lambda_3]\overrightarrow{OB}+(\lambda_3-1)\overrightarrow{OC}=\mathbf{0} \qquad ②$$

因此，由 ① 和 ② 得

$$\begin{cases}(\lambda_2-x\lambda_1):x(\lambda_1-1):(1-\lambda_2)=a:b:c\\ y\lambda_1:[y(1-\lambda_1)-\lambda_3]:(\lambda_3-1)=a:b:c\end{cases}$$

其中比例系数 a,b,c 是待定常数，于是

$$x=\frac{b}{b\lambda_1+(c+a)(\lambda_1-1)}$$

$$y=\frac{a}{a(1-\lambda_1)-(c+b)\lambda_1}$$

所以

$$\begin{aligned}-\sin 2C&=\frac{\sin 2B}{x}+\frac{\sin 2C}{y}\\&=\frac{b\lambda_1+(c+a)(\lambda_1-1)}{b}\sin 2B+\frac{a(1-\lambda_1)-(c+b)\lambda_1}{a}\sin 2A\\&=\frac{[a(a+b+c)\sin 2B-b(a+b+c)\sin 2A]\lambda_1+ab\sin 2A-a(a+c)\sin 2B}{ab}\end{aligned}$$

根据上面的分析可知，a,b,c 是待定常数，但 λ_1 与 x,y 有关且具有任意性，所以，要使上述等式恒成立，只需

$$\begin{cases}a\sin 2B=b\sin 2A\\ b\sin 2A+b\sin 2C=(a+c)\sin 2B\end{cases}$$

即得
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}$$
$$\frac{a}{c}=\frac{\sin 2A}{\sin 2C}$$
也即
$$a:b:c=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$
因此
$$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$
由第二章第2节中定理2.4知，O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

下面证明必要性：

若点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，因为 A,P,B 三点共线，则存在实数 x，使得
$$\overrightarrow{OP}=(1-x)\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OA}$$
又 A,Q,C 三点共线，则存在实数 y，使得 $\overrightarrow{OQ}=(1-y)\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OA}$.

又由 $\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{OP}$ 得
$$(1-y)\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OA}=m[(1-x)\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OA}]$$
即
$$(mx-y)\overrightarrow{OA}+m(1-x)\overrightarrow{OB}+(y-1)\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$
由第二章第2节中定理2.4知
$$(mx-y):m(1-x):(y-1)=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$
将上式消去 y 并整理得
$$\frac{\sin 2B}{m}=x(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)-(\sin A+\sin C) \qquad ③$$
又 B,R,C 三点共线，则存在实数 z，使得
$$\overrightarrow{OR}=(1-z)\overrightarrow{OC}+z\overrightarrow{OB}$$
同理可得
$$\frac{\sin 2A}{y}=\sin 2A-x(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) \qquad ④$$
由③，④得
$$\frac{\sin 2B}{x}+\frac{\sin 2C}{y}=-\sin 2C$$

定理1.8 如图1.17所示，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，试用向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$.

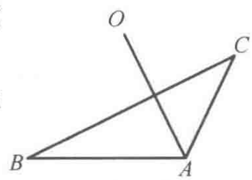


图1.17

分析 设向量 $\overrightarrow{AB}=c\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{AC}=b\boldsymbol{e}_2$，由平行向量的基本定理，可设 $\overrightarrow{AO}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，则
$$\begin{cases}\overrightarrow{BO}=(\lambda_1-c)\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2\\ \overrightarrow{CO}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-b)\boldsymbol{e}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-2\lambda_1+c)\boldsymbol{e}_1-2\lambda_2\boldsymbol{e}_2\\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-2\lambda_1\boldsymbol{e}_1+(-2\lambda_2+b)\boldsymbol{e}_2\end{cases}$$

由点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp\boldsymbol{e}_1$，$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\perp\boldsymbol{e}_2$，即

$$\begin{cases}2\lambda_1+2\cos A\cdot\lambda_2=c\\ 2\cos A\cdot\lambda_1+2\lambda_2=b\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{c-b\cos A}{2\sin^2 A}\\ \lambda_2=\dfrac{b-c\cos A}{2\sin^2 A}\end{cases}$$

反代，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}&=\frac{1}{2\sin^2 A}[(c-b\cos A)\boldsymbol{e}_1+(b-c\cos A)\boldsymbol{e}_2]\\&=\frac{1}{2\sin^2 A}\left[(c-b\cos A)\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+(b-c\cos A)\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right]\end{aligned}$$

推论 1 由于$\begin{cases}b\cos A+a\cos B=c\\ c\cos A+a\cos C=b\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}&=\frac{1}{2\sin^2 A}(a\cos B\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+a\cos C)\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\\&=\frac{a}{2\sin^2 A}(\cos B\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\cos C)\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\end{aligned}$$

推论 2 向量 $\cos B\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\cos C\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 所在直线一定过 $\triangle ABC$ 的外心.

推论 3 向量$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c\cdot\cos C}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b\cdot\cos B}$ 所在直线一定过 $\triangle ABC$ 的外心.

推论 4 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$\triangle ABC$ 的外心为(x,y)，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2\sin^2 A}\left[\left(\dfrac{2\sin^2 A}{a}-\dfrac{\cos B}{c}-\dfrac{\cos C}{b}\right)x_1+\dfrac{\cos B}{c}x_2+\dfrac{\cos C}{b}x_3\right]\\ y=\dfrac{a}{2\sin^2 A}\left[\left(\dfrac{2\sin^2 A}{a}-\dfrac{\cos B}{c}-\dfrac{\cos C}{b}\right)y_1+\dfrac{\cos B}{c}y_2+\dfrac{\cos C}{b}y_3\right]\end{cases}$$

推论 5 如图 1.18 所示，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，M 为边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{b^2+c^2}{4}$.

分析 由$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$，则

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a}{2\sin^2A}(\cos B\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\cos C\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{b})\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$=\frac{a}{4\sin^2A}[\cos B\cdot\frac{\overrightarrow{AB}^2}{c}+\cos C\cdot\frac{\overrightarrow{AC}^2}{b}+(\frac{\cos B}{c}+\frac{\cos C}{b})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]$$

$$=\frac{a}{4\sin^2A}[c\cos B+b\cos B+(\frac{\cos B}{c}+\frac{\cos C}{b})cb\cos A]$$

$$=\frac{a}{4\sin^2A}[c\cos B+b\cos B+(b\cos B+c\cos C)\cos A]$$

在 $\triangle ABC$ 中

$$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\ b=c\cos A+a\cos C\\ c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$$

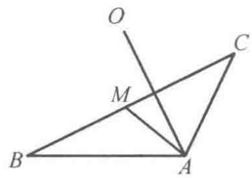


图 1.18

$\cos B,\cos C$ 可化为

$$\cos B=\frac{c-b\cos A}{a},\cos C=\frac{b-c\cos A}{a}$$

得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a}{4\sin^2A}[a+(b\cdot\frac{c-b\cos A}{a}+c\cdot\frac{b-c\cos A}{a})\cos A]$$

$$=\frac{1}{4\sin^2A}[a^2+2bc\cos A-(b^2+c^2)\cos^2A]$$

由余弦定理得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4\sin^2A}[b^2+c^2-(b^2+c^2)\cos^2A]=\frac{b^2+c^2}{4}$$

定理 1.9 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，OD,OE,OF 分别是 O 到 BC,CA,AB 的距离，则

$$\frac{OD}{\cos A}=\frac{OE}{\cos B}=\frac{OF}{\cos C}=R$$

证明 如图 1.19 所示，联结 OB，因为点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以

$$\angle BOD=\angle A$$

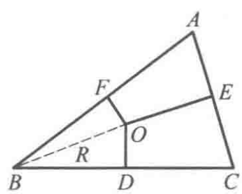


图 1.19

所以 $OD=OB\cos\angle BOD=R\cos A$

同理 $OE=R\cos B,OF=R\cos C$

故定理成立.

定理 1.10 若 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，$AO,BO,$

CO 分别与其对边交于点 A_1, B_1, C_1. 则

$$\frac{AA_1}{\sin B\sin C\sec(B-C)}=\frac{BB_1}{\sin C\sin A\sec(C-A)}$$
$$=\frac{CC_1}{\sin A\sin B\sec(A-B)}=2R$$

证明 如图 1.20 所示,作 $AH\perp BC$ 于点 H, $OD\perp BC$ 于点 D,则 $\triangle ODA_1\backsim\triangle AHA_1$,所以

$$\frac{OA_1}{OA_1+R}=\frac{OD}{AH}$$

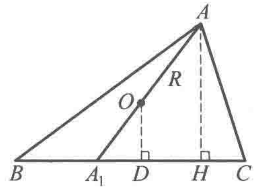


图 1.20

所以
$$OA_1=\frac{R\cdot OD}{AH-OD}$$

又由定理 1.9 知, $OD=R\cos A$,所以

$$AA_1=OA_1+R=\frac{R\cdot AH}{AH-OD}$$
$$=\frac{R\cdot AB\sin B}{AB\sin B-R\cos A}=\frac{2R^2\sin B\sin C}{R(2\sin B\sin C-\cos A)}$$
$$=\frac{2R\sin B\sin C}{\cos(B-C)}=2R\sin B\sin C\sec(B-C)$$

同理

$$BB_1=2R\sin C\sin A\sec(C-A)$$
$$CC_1=2R\sin A\sin B\sec(A-B)$$

故定理成立.

定理 1.11 如图 1.21 所示,设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AO, BO, CO 分别交 BC, CA, AB 于点 D, E, F, EF, FD, DE 分别交 AO, BO, CO 于点 D_1, E_1, F_1,则 $\frac{1}{OD}-\frac{1}{OD_1}=\frac{1}{OE}-\frac{1}{OE_1}=\frac{1}{OF}-\frac{1}{OF_1}=-\frac{2}{CO}$.

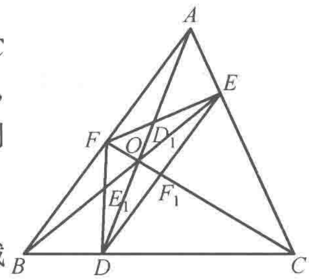


图 1.21

证明 对于 $\triangle OED_1$ 及截线 AFB, $\triangle OEA$ 及截线 BDC, $\triangle D_1EA$ 及截线 FOC 分别应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{EB}{OB}\cdot\frac{OA}{AD_1}\cdot\frac{D_1F}{FE}=1,\frac{EC}{AC}\cdot\frac{OB}{EB}\cdot\frac{AD}{OD}=1,\frac{AC}{EC}\cdot\frac{FE}{D_1F}\cdot\frac{OD_1}{OA}=1$$

三式相乘得

$$\frac{AD}{AD_1}\cdot\frac{OD_1}{OD}=1$$