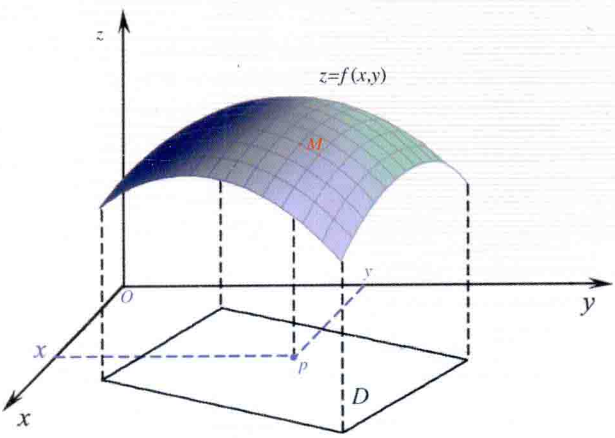
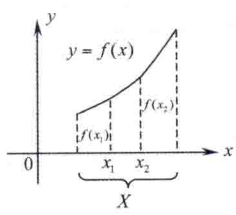
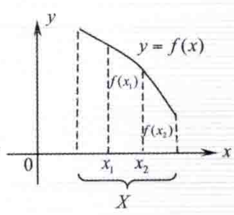
高等数学

及其应用

王建林 主编







中国农业出版社

GAODENG SHUXUE
JIQI YINGYONG

高等数学及其应用

王建林　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用/王建林主编．—北京：中国农业出版社，2012.7（2015.7 重印）
ISBN 978-7-109-16947-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 157467 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
责任编辑 石飞华

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2013 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月北京第 2 次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：21.25
字数：510 千字
定价：32.00 元

编写人员名单

主　　编　王建林（西藏农牧学院）

副 主 编　李冬云（西藏农牧学院）

刘秀丽（西藏农牧学院）

刘　铁（安康学院）

编写人员　（按姓氏笔画排序）

王忠红（西藏农牧学院）

王建林（西藏农牧学院）

冯西博（西藏农牧学院）

刘　铁（安康学院）

刘秀丽（西藏农牧学院）

杨玉田（西藏农牧学院）

李冬云（西藏农牧学院）

吴玉东（哈尔滨商业大学）

张长耀（西藏农牧学院）

桑旦多吉（西藏农牧学院）

敬久旺（西藏农牧学院）

前　言

本书是为适应高等农林院校应用型本、专科高等数学教学改革而编写的．在编写时紧扣国家数学课程教学指导委员会于2008年提出的高等农林院校高等数学课程教学基本要求，使得本书的内容在深度和广度上完全达到该基本要求．目前，在高等农林院校中使用的高等数学教材版本很多，但是理论与应用脱节的现象严重，致使学生学习起来枯燥乏味，考虑到理论与实例密切结合的高等数学教材缺少的实际，我们基于多年的教学经验，组织相关院校的教师编写了这本《高等数学及其应用》．

本书在内容和体系编排上有以下几个特点：(1) 既突出高等数学教学体系的完整性，达到了高等农林院校本、专科生应有的水平，又增加了大量的应用实例，突出了高等数学的应用性；(2) 文字叙述贴近生活、贴近生产（如植物、动物、环境、经济问题等），针对性强、通俗易懂；(3) 内容的编写，特色鲜明，注重问题的形式特点及解决问题的思想方法，由浅到深、循序渐进，力求简约、便于自学；(4) 章前加有导读文字，章后有知识总结，脉络清楚，使得学生对所学知识的整体把握，理解加深，进一步学习有所帮助；(5) 每章附有自测题，大多分基本题（自测题A）和考研真题（自测题B）两个层次，供学习者选做；(6) 章节后附有著名数学家的传记与逸事等阅读资料，不但能调节学生学习枯燥的情绪，而且还能使学生体会数学的创造和发展的历程，拓宽学生的视野．

全书共分七章：第一章函数、极限与连续，由吴玉东、刘秀丽编写；第二章导数、微分及其应用，由张长耀、吴玉东编写；第三章不定积分、定积分及其应用，由杨玉田、敬久旺编写；第四章微分方程，由刘铁编写；第五章空间解析几何，由刘铁、刘秀丽、王建林编写；第六章多元函数的微分法，由刘铁编写；第七章二重积分，由刘铁、李冬云编写．附录由刘秀丽编写．冯西博、王忠红、桑旦多吉等同志为本书提供了部分实例资料．

全书由王建林、李冬云、刘秀丽审阅定稿．

本书在编写过程中得到西藏农牧学院各级领导的关心和支持．同时，参编单位安康学院和哈尔滨商业大学各级领导也对本书的编写给予了很多关心和支持，在此一并表示感谢．

本书可供全国高等农林院校各专业（工科外）本科及专科教学使用，也可供农业技术人员、乡镇农业领导干部等学习参考．

由于我们的水平有限，加之编写时间仓促，错误和不足之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2012年6月

目 录

第一章

函数、极限与连续

中学所学过的数学习惯上称之为初等数学，是人类 17 世纪以前所认知的数学，研究的数和形基本上是常量和不变的规则几何形体．到了 17 世纪，人们开始关注研究变量和不规则的几何形体，而且数和形开始紧密联系起来，此时，由英国科学家牛顿（Newton）和德国科学家莱布尼茨（Leibniz）各自独立地创立了微积分．微积分的创立是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折点．微积分是高等数学课程的主要内容，函数是微积分的主要研究对象．极限是研究微积分的重要工具，是高等数学中最重要的概念之一．微积分中连续、导数、定积分等许多概念都是通过极限来定义的．因此，极限理论是微积分的基础．本章将在复习和加深函数概念有关知识的基础上，介绍极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

第一节　变量与函数

本节在中学数学基础之上对函数概念作进一步讨论．

一、常量与变量

在观察自然现象、科学试验或农业生产等过程中，经常会碰到各种不同的量．例如，质量、温度、速度、长度、面积、产量等等．在某一过程中，只取固定值的量称为**常量**，可以取不同值的量称为**变量**．

例如，一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和分子数保持不变，是常量，但气体的温度和压强一直在变，它们是变量；又如观察试验田里的作物生长，试验田的面积保持不变，是常量，作物的生长量、温度等是不断变化的，是变量．一个量是常量还是变量，不是绝对的，需要视具体情况而定，同一个量在某种情况下可以看成是常量，而在另一种情况下又可能是变量，例如重力加速度 g 的值是随着纬度和高度的变化而变化的，是一个变量，但是在地球表面附近的局部地区内，由于纬度和高度变化很小，g 值变化不大，可以把重力加速度 g 看作常量．

实际上，常量也可以看成一种特殊的变量，正如把静止看成运动的特例一样，把常量看成某一过程中始终取同一值的变量．常量通常用字母 a，b，c 等表示，变量用字母 x，y，z 等表示．本书讨论的变量的每一个取值，都限定在实数范围内，因而变量取的每个值都可以用数轴上的一个点来表示．如果一个量是常量，则用数轴上的一个定点 a 来表示；如果一个量是变量，则用数轴上的动点 x 来表示．

二、区间与邻域

一个变量能取到的全部数值组成的集合，叫做这个变量的**变化范围**（或**变域**）. 在高等数学中表达变域往往用区间，区间是常用的一类数集，可以分为有限区间和无限区间 .

1. 有限区间　设 a,b 为实数且 $a<b$，通常有如下定义和记法：

（1）闭区间　　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

（2）开区间　　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

（3）半开区间　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上区间称为**有限区间**，a，b 称为**区间端点**，a 为**左端点**，b 为**右端点**，数 $b-a$ 称为**区间的长度**. 从几何上看，这些区间是数轴上长度有限的线段，可以用图 1-1（a）、（b）、（c）和（d）在数轴上表示出来 .

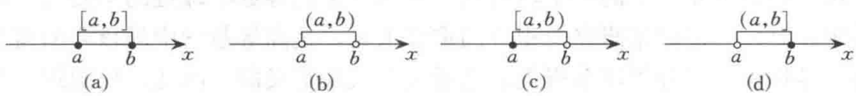


图 1-1

2. 无限区间　引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地给出无限区间的定义和记法 .

（1）$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；　　（2）$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

（3）$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；　　（4）$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

（5）$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

前四个无限区间同样可以在数轴上分别用图 1-2（a），（b），（c），（d）表示，而 $(-\infty,+\infty)$ 就是整个实数轴 .

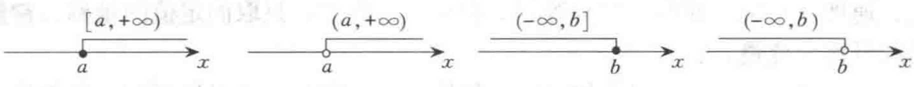


图 1-2

以后在不需要特别强调区间是开还是闭，以及有限还是无限的情形下，我们就简单地称之为**区间**，通常用字母 I 表示 .

3. 邻域及去心邻域　邻域也是我们常用到的概念，设 $a,\delta\in R$，其中 $\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**，$U(a,\delta)$ 可以在数轴上表示为图 1-3.

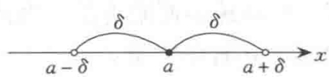


图 1-3

有时用到的数集需要把邻域的中心去掉，邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，是两个开区间的并集，见图 1-4.

为表达方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**，有时在研究某一变化过程中，无需指明 a 的某邻域（或去心邻域）的半径，此时，就简单地记为 $U(a)$（或 $\mathring{U}(a)$），读作 ***a* 的某邻域**（或 ***a* 的某去心邻域**）.

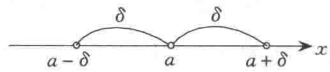


图 1-4

三、函数的概念

一切事物都在运动和发展之中，当我们考察某个自然现象或生产过程时，往往会遇到多个变量，各个变量之间也不是彼此孤立的，它们之间相互联系，相互依赖，并且具有一定的规律．下面主要就两个变量之间的这种确定的依赖关系，列举几个实例引出函数概念．

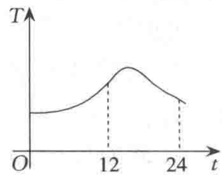


图 1-5

例 1　温度自动仪所记录的某地某天 24h 气温变化曲线（如图 1-5）描述了当天气温 T 随时间 t 的变化规律：对任一时刻 $t\in[0,24]$，按图中的曲线唯一对应一个温度．

例 2　某作物的叶组织对钾的吸收量（y）与时间（t，以小时计）的关系，在变域 $\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 4\}$ 内可表示为

$$y=at \tag{1-1-1}$$

其中常数 a 称为吸收率．实验表明：在亮光中的吸收率大约为黑暗中的两倍，比例常数 $a=y/t$ 称为增长率，公式（1-1-1）表示吸收量 y 与时间 t 之间的对应关系．其他诸如反应率、吸收率、突变率等也都属于此类．

例 3　蛇的身长与其尾长之间存在着一定的关系．根据辛泊森、洛尔和李文亭三位科学家的研究，有一种雌蛇，它的总长度 y（mm）与其尾长 x（mm）的依赖关系为

$$y=7.44x+8.6\text{，其中 } x\in(30,200),y\in(200,1\,400).$$

以上三个例子的实际意义虽不同，但却有共同之处：每个例子所描述的变化过程都有两个变量，当其中的一个变量在一定的变化范围内取定一数值时，按照某个确定的法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应．这种变量之间的对应关系就是函数概念的实质．

定义　设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 x 在一个给定的数域 D 中取值，如果对于 D 中每个变量 x 的取值，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称**变量 *y* 是定义在 *D* 上的变量 *x* 的函数**，记作 $y=f(x),x\in D$，其中，变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，有时记为 D_f，即 $D=D_f$，当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数域称为函数的**值域**，记作 R_f，即：$R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$，如果 a 是函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 中的一个值，就称函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处有定义，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的对应值叫做函数在该点的**函数值**，记作 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}=f(a)$.

关于函数定义，说明以下几点：

1. 在函数定义中，我们用“唯一确定”来表明所讨论的函数是单值函数，当 D 中某些 x 值有多于一个 y 值与之对应时，我们称之为**多值函数**．

2. 我们所研究的量 x 与 y，一般都是限定在实数范围内．

3. 由函数定义可知，要确定一个函数，必须知道函数的定义域和自变量与因变量之间的对应法则，这就是说，定义域和对应法则是确定函数的两个要素，对于两个函数，只有当

它们的定义域和对应法则都相同时，它们才是相同的，而不在于它们的自变量和因变量采用何字母表示．如：$y=x\sin\frac{1}{x}(x\neq0)$ 与 $S=t\sin\frac{1}{t}(t\neq0)$ 是相同的两个函数．

4. 函数定义域的确定取决于两种不同的研究背景：一是有实际应用背景的函数；二是抽象地用算式表达式的函数．前者定义域的确定取决于变量的实际意义，而后者定义域的确定是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为**自然定义域**，它可由函数表达式本身来确定，通常有：(1) 在分式中，分母不能为零；(2) 在根式中，负数不能开偶次方；(3) 在对数式中，真数要大于零；(4) 在三角函数与反三角函数式子中，要符合其定义域要求．如果函数表达式中同时含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集．如：函数 $y=\pi x^2$，若 x 表示圆半径，y 表示圆面积，则定义域的确定属于前者，此时 $D_f=[0,+\infty)$；若不考虑 x 的实际意义，则其自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$．

5. 常数 A 可看作是变量 x 的函数，即不论自变量 x 取什么值，因变量 y 永远取值 A，可写为 $y=A$.

6. 将有序数 x_1，x_2，…，x_n，…叫做**数列**，记作 $\{x_n\}$，数列 $\{x_n\}$ 可以看作定义在正整数上的函数，记作 $x_n=f(n)$．

7. 通常函数的表示方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），将解析法和图形法相结合起来研究函数，可以将抽象问题直观化，也可以借助几何方法研究函数的有关特性. 相反，一些几何问题也可借助函数工具来做理论研究．

8. 在高等数学中，通常用一个数学表达式来表示函数关系，如：$S=\pi r^2$（圆的面积 S 与半径 r 的函数关系），但是并非所有函数关系均可由一个数学式子表示，即有的函数在其定义域的不同部分也可以用不同的式子表示，如：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,+\infty),\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ -x+1, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$ 这种形式的函数称为**分段函数**，还有一些函数甚至无法用数学式子来表达．

分段函数在实际生活中也是广泛存在的．例如，邮寄费与邮寄物重量的关系，出租车的计价费与行驶的里程关系等．对于分段函数，要注意几点：分段函数是由几个公式合起来表示的一个函数，而不是几个函数；分段函数的定义域是各段定义域的并集；在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的表达式．下面是两个常用分段函数：

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ **符号函数** $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

函数的例子不胜枚举，如植物在生长期，株高是时间的函数；在一定容积的培养基中培养细胞，细胞的数量是培养基中营养物质的函数，当然也与培养时间有密切的联系；植物群落中物种数目是面积的函数，随着面积的增大，物种数目也随之增加，最初增加很快，以后逐渐缓慢，形成一条曲线；矮生豆植物的亚硝酸根的利用率是光照浓度的函数；用药量是体重的函数；动物的增重量是进食量的函数；作物的产量是种植密度的函数，等等．

例 4 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域．

解 因为当 $1-x^2\geqslant0$ 时，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 才有意义，故定义域 $D_f=\{x\mid 1-x^2\geqslant0\}$，

即 $D_f\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}=[-1\ ,\ 1]$.

例 5　函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否相同？为什么？

解　$y=x$ 的定义域为 $D_f=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$，$y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $D_f=\{x|x\neq 0,x\in R\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，两函数定义域不同，故两个函数为不同的函数.

例 6　作出函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+3, & 1<x<3\end{cases}$ 的图形，并指出其定义域.

解　函数的定义域为 $D_f=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$，由于是分段函数，在不同的区间上画出相应的图形如图 1-6.

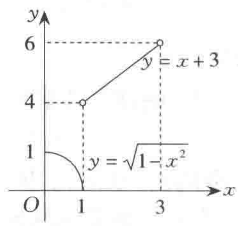


图 1-6

例 7　某淘宝店出售某种商品邮资规定，不超过 20kg 时免收运费，超过 20kg 时，每超过 1kg 收费 0.1 元，试把邮资 p 表示为商品重量 w 的函数.

解　当 $0\leqslant w\leqslant 20$，邮资 $p=0$，而当 $w>20$ 时，只有超过的部分 $w-20$收邮资，因而 $p=0.1\ (w-20)$，于是

$$p\ (w)\ =\begin{cases}0, & 0\leqslant w\leqslant 20,\\ 0.1(w-20), & w>20.\end{cases}$$

四、函数的几种特性

研究函数的目的是为了探索它所具有的性质，进而掌握它的变化规律，达到有效解决实际问题的目的．下面给出几个我们所关心的某些函数所具有的特性．在数学推理中，为了书写方便，我们通常采用逻辑符号“$\forall$”表示“任意”或“每一个”；逻辑符号“$\exists$”表示“存在”或“找到”．

1. 函数的有界性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，实数集 $X\subset D_f$，如果存在数 θ，使得 $\forall x\in X$ 都有 $f(x)\leqslant\theta$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**，而 θ 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**；如果存在数 p，使得 $\forall x\in X$ 都有 $f(x)\geqslant p$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**，而 p 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**．如果存在常数 M，使得 $\forall x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**，如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，即对 $\forall M>0$，$\exists x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$. **函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界，但无界函数分为无上界有下界、无下界有上界、无上界且无下界三种情况．**

例如，函数 $f(x)=\sin x$，在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，即 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$ 成立，这里任何 $M\geqslant 1$ 都有 $|f(x)|=|\sin x|\leqslant M$.

再如函数 $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内也有界，只要取 $M\geqslant\dfrac{1}{2}$都有 $|g(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant M$.

在几何图形上，有界函数表示函数 $y=f(x)$（其中 $x\in[a,b]$）的图形完全位于直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间，如图 1-7 所示．

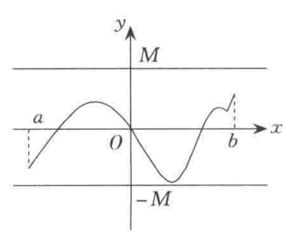


图 1-7

例 8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ 分别在 $[0,1]$，$[1,+\infty)$ 上的有界性.

解 (1) 当 $x\in[0,1]$ 时，恒有 $f(x)\geqslant 0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有下界，取 $p=0$ 即为其一个下界，但无上界，因为对任意的 $\theta(\theta>1)$，不妨取 $x_0=\dfrac{1}{2\theta}\in[0,1]$，有 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=2\theta>\theta$，从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无上界.

(2) 当 $x\in[1,+\infty)$时，取 $M=1$，则有 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$，从而 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上有界.

2. 函数的单调性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，$X\subset D_f$，如果对 $\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 X 上是**单调增加的**（或**单调减少的**）；如果对 $\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 X 上是**单调不减的**（或**单调不增的**），函数的以上性质统称为**单调性**，如果 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subset D_f)$ 上是单调增加（或减少）函数，则称**区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增加**（**或减少**）**区间**.

从几何直观上看，单调增加函数的图形是 X 上随 x 的增加而上升的曲线，如图 1-8；单调减少函数的图形是 X 上随 x 的增加而下降的曲线，如图 1-9.

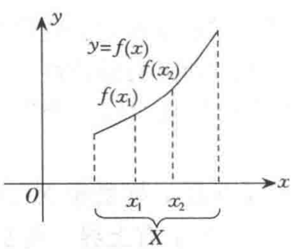


图 1-8

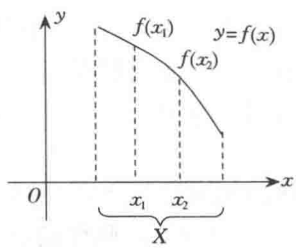


图 1-9

例 9 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 因为对任意 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，因此函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$ 上是单调增加的. 同理在$(-\infty,0]$ 上是单调减少的. 因而函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，$y=x^2$ 的图形如图 1-10.

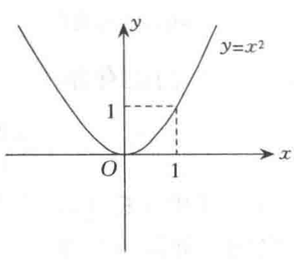


图 1-10

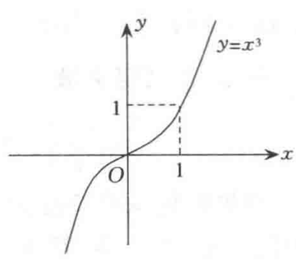


图 1-11

例如　函数 $y=x^3$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数（如图 1-11）.

3. 函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 是关于原点对称的数集，即对 $\forall x\in D_f$，有 $-x\in D_f$. 如果 $\forall x\in D_f$ 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对 $\forall x\in D_f$ 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(x)$ 既非奇函数，又非偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

从几何直观上，奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如，函数 $y=c, y=x^{2n}(n\in N), y=\cos x$ 等均为偶函数；函数 $y=x^{2n+1}(n\in N)$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等均为奇函数；而函数 $y=\sin x+\cos x$ 则为非奇非偶函数.

例 10　证明任意函数可表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

证明　设 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),\ h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x)$$

从而 $g(x)$ 为偶函数，而 $h(x)$ 为奇函数，且有 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=g(x)+h(x)$，所以任意函数 $f(x)$ 可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和.

4. 函数的周期性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在常数 T，使得 $\forall x\in D_f$，有 $x+T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则对 $\forall n\in N^+$，nT 也是 $f(x)$ 的周期，通常我们所说的周期函数的周期往往是指**最小正周期**.

例如，$y=\sin x, y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

从几何直观上看，若 $y=f(x), x\in D_f$ 是以 T 为周期的周期函数，在每个长度为 T，左端点相距为 $KT(K\in N^+)$ 的区间上，函数图形有相同的形状.

例 11　设函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，证明函数 $y=f(ax)(a>0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明　只需证明 $f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]$

因为 $f(x)$ 以 T 为周期，所以 $f(ax)=f(ax+T)$，即 $f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]$，从而 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

五、反 函 数

在初等数学中已熟知反函数的概念，如对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 与指数函数