经济应用数学

运筹学

主编 李凤香 尹 亮 主审 颜建设

东北林业大学出版社

经济应用数学

运　筹　学

主编　李凤香　尹　亮
主审　颜建设

东北林业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学——运筹学/李凤香,尹亮主编.—哈尔滨:东北林业大学出版社,2002.6

ISBN 7-81076-360-1

Ⅰ.经...　Ⅱ.①李...②尹...　Ⅲ.运筹学-应用-经济　Ⅳ.F224.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056872 号

责任编辑:卜彩虹
封面设计:戴　千

NEFUP

经济应用数学

运筹学

Jingji Yingyong Shuxue——Yunchouxue

主编　李凤香　尹　亮

主审　颜建设

东 北 林 业 大 学 出 版 社 出 版 发 行

(哈尔滨市和兴路 26 号)

东 北 林 业 大 学 印 刷 厂 印 刷

开本 850×1168　1/32　印张 7.375　字数 184 千字

2002 年 6 月第 1 版　2002 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—1 000 册

ISBN 7-81076-360-1

O·60　定价:18.00 元

前　言

本书系统地介绍了图与网络分析、动态规划、库存管理、排队论、决策论、对策论各运筹学分支的主要理论和方法。内容上力求简明,并运用较多的实际例子加以说明,充分体现了运筹学在实际生活中的应用。对于较难理解的内容尽量用多一些的实例加以说明,以便于学生深刻地理解内容。

由于作者掌握的资料有限,书中如有不妥之处,恳请读者批评指正。

作　者

2002 年 4 月

目　　录

第一章　图与网络

图论是应用十分广泛的运筹学分支，它可以解决生产管理中经常碰到的工序间的合理衔接搭配的问题，研究各种管道、线路的通过能力以及仓库、附属设备的布局等问题。这一理论采取的主要方法是通过对图与网络性质及优化的研究，解决设计与管理中的实际问题。

本章研究的主要问题包括：树和图的最小部分树、最短通路问题、网络的最大流及中国邮路问题。

第一节　基本概念

一、图

在生产和日常生活中我们经常会碰到各种各样的图，如几何图形、交通图形、建筑图形、函数图形等。运筹学中研究的图是指由若干个表示具体事物的点和连接这些点的连线所组成的图。如交通图是表明一些城镇及这些城镇之间的道路沟通情况，建筑图表示的是各工序之间的先后关系情况。这些图都是图论中所研究的图，它们的特点是只关心图中有几个点，哪些点之间有连线，至于连线的长短、曲直及斜率等都是无关紧要的。因此它有别于几何图形及函数的图形。

例 1　北京、天津、沈阳、哈尔滨及它们之间的铁路构成一个图。如图 1－1 所示。

如果用点表示研究的对象，用边表示这些对象之间的联系，则图 G 就可以定义为：$G=\{V,E\}$。式中，V 是点的集合，E 是边

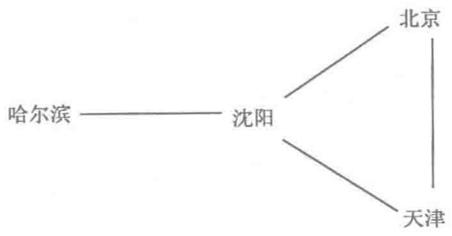


图 1－1

的集合。则例 1 的图就可以表示为：

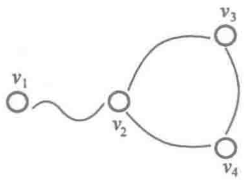


图 1－2

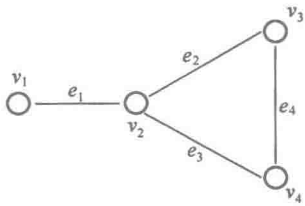


图 1－3

5 个球队进行单循环比赛，如果用点表示各个球队，用线表示两队要进行比赛，可画出图 1－4。其中，

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$；

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_{15}\}$

二、端点、关联边、相邻点

在图 $G=\{V, E\}$ 中，如果边 $e=\{V_i, V_j\}$，则称 V_i 和 V_j 是边 e 的端点，反之称 e 为 V_i 或 V_j 的关联边。若点 V_i、V_j 与同一条边关联，称点 V_i 和 V_j 为相邻点。例如，在图 1－5 中，v_1，v_2 称

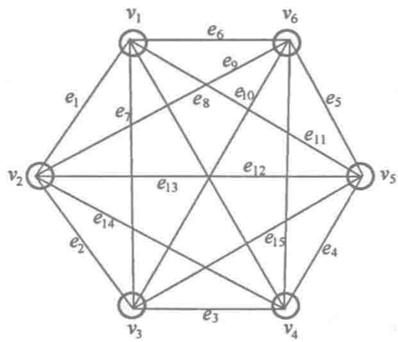


图 1－4

为 e_1 的端点，e_1 为 v_1 或 v_2 的关联边，v_1 与 v_2 都与 e_1 边关联，为相邻点。

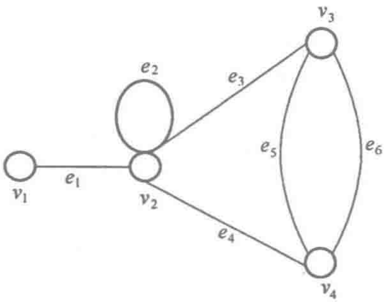


图 1－5

三、环、多重边、简单图

若边 e 的两个端点重合，则称该边为环。若两点之间多于一条边，则称为多重边。无环、无多重边的图称为简单图。例如，图 1-5 中 e_2 为环，e_5 和 e_6 为多重边。所以图 1-5 不是简单图，图 1-2 为简单图。

四、次、奇点、偶点、孤立点

以点 V 为端点的边的条数称为点 V 的次（或度），记作 $d(V)$。例如，图 1-5$d(V_1)=1, d(V_2)=5, d(V_3)=3$。

次为 1 的点称为悬挂点，次为 0 的点称为孤立点，次为奇数的点称为奇点，次为偶数的点称为偶点。

五、完全图、偶图

如果一个简单图 G 中的每一对顶点间都有一条边相连，则称图 G 为完全图。n 个顶点的完全图记为 K_n。图 1-4 为完全图。

若图 $G=\{V,E\}$ 中的顶点 V 可分为 v_1、v_2 两个集合，使得 G 的每一条边的一个端点在 v_1 中，另一个端点在 v_2 中，则称图 G 为二分图（或偶图）。如图 1-6 所示。

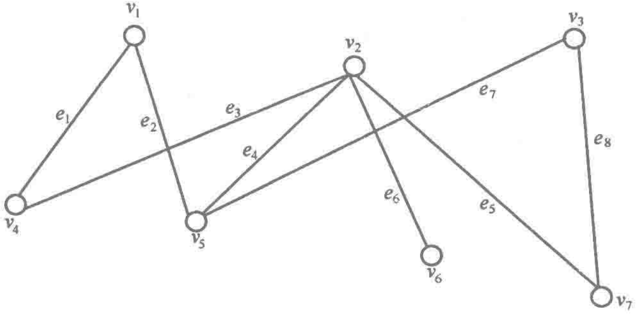


图 1-6

六、子图、部分图

设图 $G_1=\{V_1,E_1\}$，$G=\{V,E\}$，如果 $V_1\subseteq V$，$E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的子图，记作 $G_1\subseteq G$。

特别当 $V_2=V$，$E_2\subseteq E$ 时，称 G_2 是 G 的部分图。例如，图 1-7 中 G_1 是 G 的子图，G_2 是 G 的部分图。注意部分图也是子图，但子图不一定是部分图。

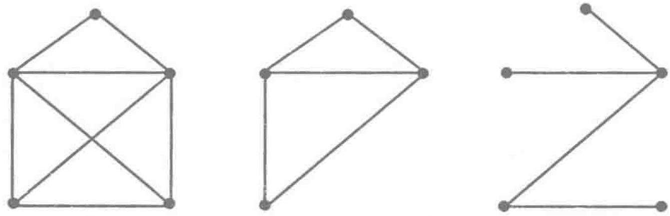


图 1-7

七、链、圈、连通图

在图 $G=\{V,E\}$ 中，某些点和边的交替序列 $\mu=\{V_{i0},e_{i1},V_{i1},e_{i2},V_{i2},\cdots,e_{ik},V_{ik}\}$。其中，$V_{ij}$，$V_{ij+1}$ 是 e_{ij+1} 的端点，则 μ 称为从 V_{io} 到 V_{ik} 的一条链。当起点和终点重合时，称 μ 为闭链。如果 μ 中所有的边都不相同，则称 μ 为简单链。起点和终点重合的简单链称为圈。如果链中的端点也都不相同，这样的链称为路。起点和终点相同的路称为回路。如图 1-8 所

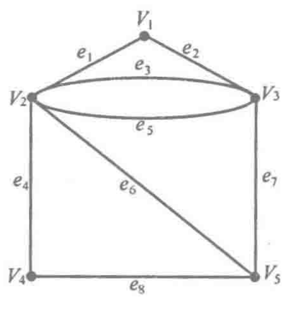


图 1-8

示。其中，$\mu_1=\{V_1,e_1,V_2,e_6,V_5,e_7,V_3,e_5,V_2,e_6,V_5,e_8,V_4\}$，是一条链。$\mu_2=\{V_1,e_1,V_2,e_6,V_5,e_7,V_3,e_5,V_2,e_4,V_4\}$，是一条简单链。$\mu_3=\{V_1,e_1,V_2,e_4,V_4,e_8,V_5\}$，是一条路。$\mu_4=\{V_1,e_1,V_2,e_5,V_3,e_3,V_2,e_6,V_5,e_7,V_3,e_2,V_1\}$，是一条闭链。$\mu_5=\{V_1,e_1,V_2,e_6,V_5,e_7,V_3,e_2,V_1\}$，是一条回路。

如果在图中，任意两点间都至少存在一条通路，则称此图为连通图。否则称为不连通图。图 1－9 为连通图，图 1－10 为不连通图。

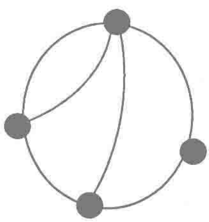


图 1－9

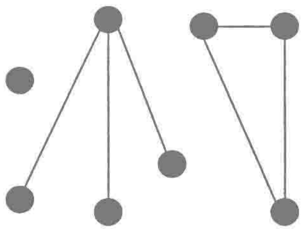
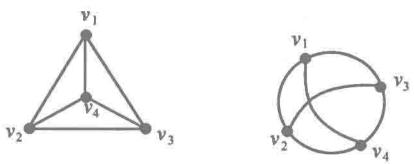


图 1－10

八、空图、图的表示法

一个图 G 的表示方法是不惟一的，如图 1－11 所示。

若图 G 中没有任何边，称 G 为空图。图 1－12 中的图为空图。



(1) (2)

图 1－11

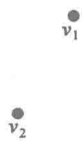


图 1－12

第二节　中国邮路、欧拉图

一个邮递员从邮局出发，走遍他负责投递的每一条街道，然后再返回邮局，问应选择什么样的路线，使走的路程为最短。这个问题称为中国邮路问题。

中国邮路问题是图论的一个应用，实际上，这个问题可以归结为：在一个连通图 G 中，是否可以找到一条链，它通过每一条边而且只通过一次？

一、欧拉链、欧拉图、中国邮路

在一个图 G 中，如果可以找到一条链，它通过每一条边且仅仅一次，这样的链称为欧拉链。起点和终点重合的欧拉链称为闭的欧拉链。如果图 G 中有一条闭的欧拉链，则称图 G 为欧拉图。图 1－13(2)中，$\mu_1=\{V_2,V_1,V_4,V_2,V_3,V_4\}$，为一条欧拉链，图 1－13(1)中，$\mu_2=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_2,V_5,V_4,V_6,V_5,V_7,V_6,V_3,V_1\}$，为一条闭的欧拉链。所以，图 1－13(1)为欧拉图，图 1－13(2)虽然有一条欧拉链，但不是闭的欧拉链，因此不是欧拉图。而图 1－13(3)既没有欧拉链，也不是欧拉图。

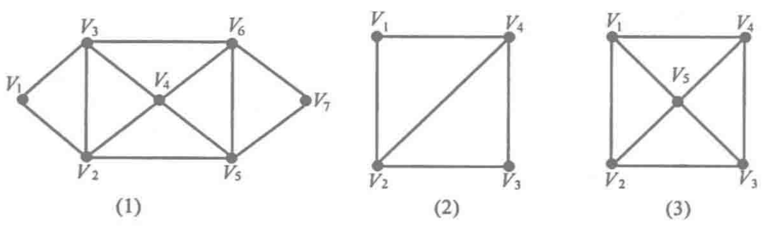


图 1－13

如何判断一个图是否为欧拉图呢？下面的定理给出了判断的

方法。

定理 非空连通图 G 有欧拉链的充分必要条件是:图 G 的奇点个数为 0 或 2;并且仅当奇点个数为 0 时,G 是欧拉图。显然,图 1-13(1)奇点的个数为 0,因此是欧拉图。图 1-13(2)奇点个数为 2,图 1-13(3)奇点个数为 4,都不是欧拉图。引入欧拉图的概念后,本节开始提出的中国邮路问题,就可以化为求欧拉图的问题,即如果邮递员所负责的街道图是一个欧拉图,他就可以每条街道恰好走一次而回到邮局,正好走一条闭的欧拉链,这样就可以使他走的总路程最短。如果街道图不是欧拉图,邮递员为了走遍所有的街道,他必须重复走某些街道,走的总路程是各街道的总长度加上重复走的街道总长度,而要使总路程最短,就必须使重复走的街道总长度最小。

二、中国邮路的奇偶点、图上作业法

1. 找出图 G 中的所有奇顶点(必须是偶数个),把它们两两配对。每对奇顶点间必有一条通路 P(因 G 是连通图),将通路 P 上所有的边都重复一次加到图 G 中,使所得的新图中的顶点全是偶点。

2. 若两点间的重复边数多于一条,可以从中去掉偶数条,使得图中顶点仍全是偶数点,而无奇点。

3. 检查图 G 中的每一个圈,如果每一个圈的重复边的总长度不大于该圈总长的一半时,则已求得最优方案。

4. 若图 G 中存在一个圈,重复边的总长度大于该圈总长的一半时,就进行调整,将这个圈中的重复边去掉,而将该圈中原来没有重复边的各边加上重复边,其他各圈的边不变,返回 2。

例 2 如图 1-14(1)所示,图中各边所标的数字表示该边的长度,邮递员从 A 出发,求最佳的投递路线。

解:$d(V_1)=3$,$d(V_2)=3$,$d(V_5)=3$,$d(V_6)=3$,将 V_1,V_5 配成一对,V_2,V_6 配成一对,并加上重复边得图 1-14(2),由

于边(V_1, V_6)上的重复边多于 1 条,因此可以去掉偶数条重复边,就得到 1 - 14(3)图。这个图中共有 6 个圈,要逐个检查。显然,在圈 V_1, V_2, V_5, V_6 中,重复边总长度 $=4+4=8$,而该圈的总长 $=4+4+3+3=14$。而 $\frac{14}{2}<8$,需要进行调整,将该圈中原有的重复边去掉,原来圈中没有加重复边的边加上重复边,得到图 1 - 14(4)。注意:不在这个圈中的其他边均不做改变。然后,再重新检查,由检查可知已经得到最优的投递路线,根据图 1 - 14(4)可作出最优投递路线图 1 - 14(5)。

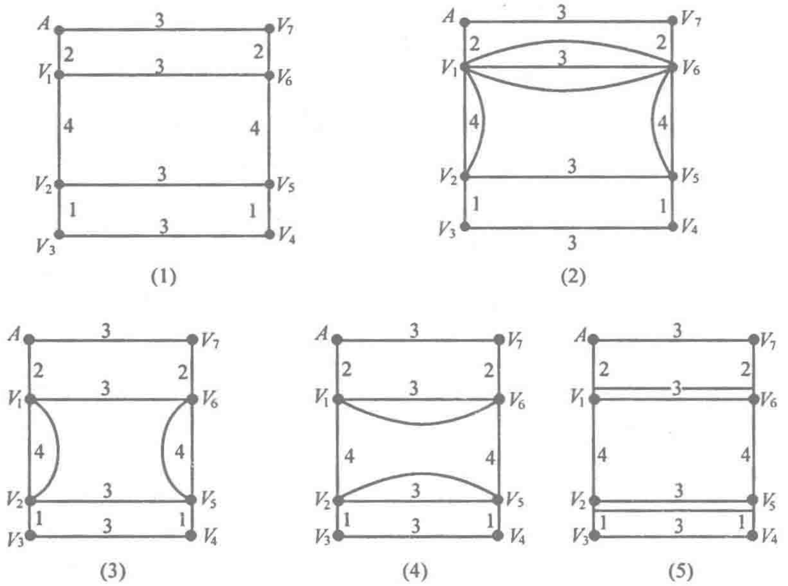


图 1 - 14

例 3 试为报童安排一条最佳的投递路线。

解:$d(V_2)=3, d(V_4)=3, d(V_6)=3, d(V_8)=3$,将 V_2,

V_4 配成一对。在通路 V_2, V_1, V_4 上加上重复边。把 V_6, V_8 配成一对,在通路 V_6, V_7, V_8 上加上重复边得到图 1－15(2)。显然在小圈(甲)中,V_1, V_2, V_5, V_4, V_1 重复边长为 5+2=7,总圈长为 5+6+3+2=16,一半为 8>7。

在小圈(乙)中,V_6, V_9, V_8, V_5, V_6 重复边长为 4+4=8,总圈长为 4+4+4+4=16,一半为 8。中圈(丙)中,$V_1, V_2, V_3, V_6, V_5, V_4, V_1$ 重复边长为 5+2=7,总圈长为 5+5+9+4+3+2=28,一半为 14>7。在中圈(丁)中,$V_4, V_5, V_6, V_9, V_8, V_7, V_4$ 重复边长为 4+4=8,总圈长为 3+4+4+4+3+4=22,一半为 11>8。在大圈(戊)中,$V_1, V_2, V_3, V_6, V_9, V_8, V_7, V_4, V_1$ 重复边长为 5+2+4+4=15,总圈长为 5+5+9+4+4+3+4+2=36,一半长为 18>15。

显然,方案 1－15(2)为最优。最佳投递路线如图 1－15(3)所示。

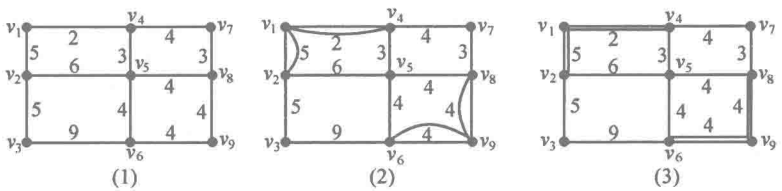


图 1－15

由上例可以看出,当重复边所在的圈有多个时,计算量是相当大的。因此,在找最佳的投递路线时,尽量找相距最近的两个奇点进行配对,这样可以减少调整的次数。

第三节　树和图的最小部分树

一、树及其性质

树是一类特殊的图，1947 年克希霍夫研究电网络时，就用到了有关树的理论。由于这类图类似于大自然中树枝状，因而取名为树。在网络分析、计算机应用、管理组织机构的分类及风险型决策中都可以用树图来表示。

树图（简称树）表示不含圈的连通图。当它的每一个分支都是一棵树时，称这样的树为森林。图 1－16(1)为树，1－16(2)为森林。

图 1－16

由图 1－16 不难看出，树具有如下性质：

1. 在树中，任意两个顶点间有惟一的一条路。
2. 去掉树中的任一条边，则树就成为不连通图。
3. 在树中，不相邻的两个顶点间添加一条边，则恰好得到一个回路。
4. 设 T 是有 n 个顶点的树，那么 T 的边数则为($n-1$)条。

二、图的最小部分树

定义 1　若图 G 的部分图是一棵树 T，则称 T 为图 G 的一个