"十一五"国家重点图书出版规划项目

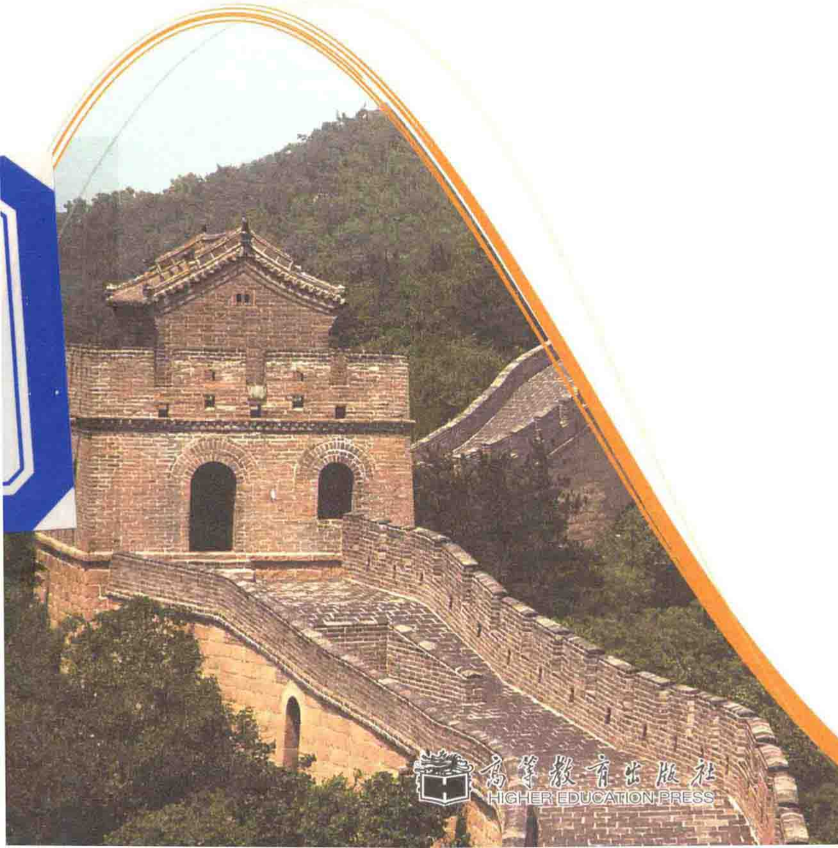
12

数学文化小丛书

李大潜 主编

漫话e

李大潜



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜　主编

漫话e

Man hua e

李大潜

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

数学文化小丛书．第2辑：全10册／李大潜主编．
-- 北京：高等教育出版社，2013.9
ISBN 978-7-04-033520-0

Ⅰ．①数… Ⅱ．①李… Ⅲ．①数学－普及读物 Ⅳ．
① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 226474 号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	张耀明	封面设计	张 楠
责任绘图	郝 林	版式设计	王艳红	责任校对	王效珍
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787 mm×960 mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
总 印 张	28.125		
本册印张	2.875	版 次	2013 年 9 月第 1 版
本册字数	48 千字	印 次	2013 年 11 月第 2 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	80.00 元

物 料 号 12-2437-40

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野，启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目　录

一、对数——化乘除为加减……1

二、常用对数……13

三、对数的尺度……19

四、e的现身——从一个复利问题谈起……28

五、自然指数函数和自然对数函数……37

六、无所不在的e……45

七、离不开e的奇妙曲线……53

八、由实变数到复变数……63

附表　常用对数的尾数表（兼作常用对数的反对数表）……73

参考文献……81

后记……82

e，是26个英文字母中的第五个字母，但在不同的场合，又有一些特殊的含义．在物理学中，常用e来表示电子(electron)，近年来广为使用的e-Mail（电子邮件），e-Business（电子商务），e-Commerce（电子贸易）及e-Services（电子服务）等均由此而来．在数学中，亦常用e来表示圆锥曲线的离心率(eccentricity)．但本书中所描述的e，专指自然对数的底，它有一系列深刻而有趣的性质，并有着多方面重要的应用，值得专题加以论述和介绍．

一、对数——化乘除为加减

因为e是自然对数的底，为了深入地了解e，我们首先从对数谈起．

对数(Logarithm)是苏格兰数学家纳皮尔 (John Napier, 1550—1617)发明的，他从1594年到1614年花了二十年的时间造出了第一个对数表．和数学上一些其他的发明不同，对数降临人间事先似乎毫无征兆，但它绝不是一个从天上掉下来的怪念头，而是源自当时在天文、航海及工程实践中简化大量繁杂计算的实际需要．纳皮尔就说过："要实际应用数学，我看最大的障碍就是处理很大数字的相乘、相除，或者求取二次或三次方根……，因此我开始思考，有没有什么方法可以去除这些障碍．"

由于对数不仅能将乘除运算化为加减运算，而且能将乘方、开方运算化为乘除运算，一下子将人们从繁复的计算中解放出来，无异于成倍地延长了科学家与工程技术人员的寿命．德国天文学家开普勒(1571—1630)是最早使用对数的人之一，他成功地在行星轨道的计算中运用了对数．法国数学家拉普拉斯(1749—1827)曾说过："对数的发明让天文学家的寿命都延长了，因为少做了很多苦工．"恩格斯曾经将解析几何、对数及微积分并列为最重要的数学方法，并指出：对于将乘除转化为加减的"这种从一个形态到另一个相反的形态之转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就没法去进行一个较为复杂的计算．"

图 1　纳皮尔

由于西洋传教士的作用，在清代初年（17世纪中叶）对数传到了中国. 1653年薛凤柞(1600—1680)与波兰传教士穆尼阁(Jean Nicolas Smogolehshi, 1611—1656)共同编译出版了《比例对数表》一书，正式将对数介绍到中国，薛凤柞还将对数应用到历法计算中. 后来，康熙皇帝组织编撰的《数理精蕴》一书，在其下篇·卷三十八“对数比例”一节中，一开始就说:“对数比例乃西士若往·纳白尔(John Napier)所作，以假数与真数对列成表，故名对数表.”这儿的假数，我们现在叫“对数”，而若往·纳白尔就是我们所述的纳皮尔.

在科学发展的历史中，极少有哪个抽象的数学概念，能像对数一样，一开始就很快获得了整个科学界的热烈欢迎. 对数的发明，无疑是人类认识史上一个极大的飞跃与革命，在人类文明的进程中起了石破天惊的作用.

现在让我们来简要地追溯对数概念的引入及它的一些基本性质.

先看下面一张表格

y	$\cdots$	0.01	0.1	1	10	100	1 000	$\cdots$
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$

在这张表格中，下一栏中的x以等差数列（公差为1）排列，而上一栏中的y则以等比数列（公比为10）排列. y作为x的函数可写为以10为底的指

数函数[注]

$$y = 10^x \tag{1}$$

的形式，而x作为与y相对应的数，称为 y（以10为底）的对数，y则称为对应于对数x的真数.

容易看到，要求上一栏中两个y值$y_1 = 10^{x_1}$及$y_2 = 10^{x_2}$的积（或商），除直接做乘除法运算外，还可用以下简便的方法进行：

(1) 先在表格中分别找到y_1及y_2的对数x_1及x_2.

(2) 作加法$x_1 + x_2$(或减法$x_1 - x_2$).

(3) 再在表格中找到以$x_1 + x_2$(或$x_1 - x_2$)为对数的真数，它就是积y_1y_2(或商y_1/y_2)之值.

例如，要求$y_1 = 100 = 10^2$及$y_2 = 0.1 = 10^{-1}$之积或商. 由于相应的对数分别为$x_1 = 2$, $x_2 = -1$, 有$x_1 + x_2 = 1$, 其对应的真数为10，故$y_1y_2 = 10$; 而$x_1 - x_2 = 3$, 其对应的真数为1 000，故$y_1/y_2 = 1\ 000$.

这就是说，利用上面的表格，上一栏中两真数的相乘或相除，就化为下一栏中两相应对数之相加或相减.

上述算法的根据是如下的指数关系式：

$$10^{x_1} \cdot 10^{x_2} = 10^{x_1+x_2}. \tag{2}$$

注　如下文所述，在历史上是先有对数，后才由欧拉引入并深入研究了指数函数的. 鉴于指数函数与对数函数互为反函数，为了清楚地说明事情的本质，在本书中我们不再重复历史，而且直接利用指数函数来引入对数.

上面的做法虽然简单，但只适用于这个表上一栏中之两数相乘或相除，而此表太粗，涉及的数相当有限，难以在实际运算中真正发挥作用．由于(2)式对任何给定的实数x_1及x_2均成立，如果在上表上一栏中均匀而相当密集地插入一些y值，例如，在1与10之间插入$2,3,\cdots,8,9$，或$1.1,1.2,\cdots,9.8,9.9$等等，并由(1)决定下一栏中相应的对数值x与之对应；或在上表下一栏中均匀而相当密集地插入一些x值，例如在0与1之间插入$0.1,0.2,\cdots,0.8,0.9$，或$0.01,0.02,\cdots,0.98,0.99$等等，并由(1)决定上一栏中相应的真数值$y$与之对应，将上表之内涵大大地加以扩充．这样，就可以由前面所述的原则，利用此表中对数x_1及x_2的和或差来方便地求得上一栏二相应真数y_1及y_2的积或商．这样就可以(至少近似地)求任意两正实数值$\widetilde{y}_1$及$\widetilde{y}_2$(不一定列在上一栏中，但总与上一栏中某两正实数y_1及y_2十分接近，从而可近似地用y_1及y_2来分别代替)的积或商．这样一个内涵大大扩充后的表，就是一个对数表或反对数表．

当然，要将上表的内涵扩大，制作哪怕一个比较粗疏的对数表或反对数表，工作量也是非常巨大的．这需要对下一栏中每一个给定的实数值x，求得相应的真数$y=10^x$值，或对上一栏中每一个给定的正实数值y，求得满足$y=10^x$的相应的对数值x．但花出这样巨大的劳动是值得的，因为只要这样的对数表或反对数表一旦制成，就可以一劳永逸地使任何人都可以利用它将乘除运算化简为加减运算．

利用(1)式，可由事先给定的任意实数值x，求得相应的以10为底的指数函数$y=10^x$的值，它永远取正值．反之，对事先任意给定的正实数y值，可由(1)求得相应的以10为底的对数x之值，这一过程记为

$$x=\log_{10} y \quad (y>0), \tag{3}$$

或简记为

$$x=\lg y \quad (y>0). \tag*{(3)$'$}$$

这儿，在(3)$'$中，按通常的约定，记号lg恒表示以10为底的对数．

这样，在实数x与正数y之间，就有一个由指数函数(1)或对数函数(3)(或(3)$'$)所联系的一一对应的关系．由x决定y的(1)式与由y决定x的(3)(或(3)$'$)式，就构成了相应的指数函数与对数函数之间互为反函数的关系．

上面说的，是以10为底的指数和对数．

再看下面这张表格

y	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	$\cdots$
x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$

在这张表格中，下一栏中的x以等差数列（公差为1）排列，而上一栏中的y以等比数列（公比为2）排列．这时，y作为这些x的函数是以2为底的指数函数：

$$y=2^x. \tag{4}$$

相应地，对所给的y值，x是y以2为底的对数，记为

$$x = \log_2 y \quad (y > 0). \tag{5}$$

由指数关系式

$$2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}, \tag{6}$$

利用这一张表格，上一栏中两真数y_1及y_2之相乘或相除，同样可化为下一栏中相应两对数x_1及x_2 之相加或相减. 且由于(6)式对任何给定的实数x_1及x_2均成立，同样可以将上述表格的内涵大大扩充后，得到一个以2为底的对数表或反对数表. 一旦构造了这样的对数表或反对数表，就可以利用加减法来（至少近似地）求得任意的两正实数值$\tilde{y}_1$及$\tilde{y}_2$ 的积或商.

以2为底的指数函数（4）与以2为底的对数函数（5）在x与$y(>0)$之间构成了一一对应的关系. 这两个函数亦互为反函数.

其实，任何大于0的数都可以取为指数或对数的底，只有1是例外. 因为以1为底的指数函数$y = 1^x = 1$不能在实数x及正数y之间构成一一对应的关系.

这样，我们就可以给出关于对数的如下一般性的定义：给定$a > 0$，但$a \neq 1$，若

$$y = a^x, \tag{7}$$

则称x为y以a为底的对数，记为

$$x = \log_a y \quad (y > 0). \tag{8}$$

对数函数(8)与指数函数(7)之间互为反函数. 由此立刻得到如下的恒等式

$$a^{\log_a y} = y \quad (y > 0) \tag{9}$$

及

$$\log_a a^x = x. \tag{10}$$

令

$$y_1 = a^{x_1}, \quad y_2 = a^{x_2}, \tag{11}$$

由定义, 就有

$$x_1 = \log_a y_1, \quad x_2 = \log_a y_2. \tag{12}$$

于是, 利用指数函数(7)的性质

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \tag{13}$$

两端取以a为底的对数, 并利用(10), 就得到

$$\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2. \tag{14}$$

相应地, 由

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}, \tag{15}$$

可得

$$\log_a \frac{y_1}{y_2} = \log_a y_1 - \log_a y_2. \tag{16}$$

此外, 由$a^0 = 1$及$a^1 = a$, 可得

$$\log_a 1 = 0 \tag{17}$$

及

$$\log_a a = 1. \tag{18}$$

其实，这两式分别是（10）式当$x=0$及$x=1$时的特例.

对于任何给定的$a,b,c>0$，且$a,b\neq 1$，可证明

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c. \tag{19}$$

事实上，利用(7)及(8)式，由

$$b^x = c, \tag{20}$$

可得

$$x = \log_b c.$$

而由(9)式，

$$b = a^{\log_a b}, \quad c = a^{\log_a c}.$$

从而，由指数函数满足的性质

$$(a^x)^k = a^{kx}, \tag{21}$$

(20)式的左端可写为

$$(a^{\log_a b})^x = (a^{\log_a b})^{\log_b c} = a^{\log_a b \cdot \log_b c},$$

而其右端则为

$$a^{\log_a c},$$

于是就得到(19)式.

由(19)式，就得到

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}. \tag{22}$$

特别在其中取$c = a$，并注意到(18)式，就得到

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \tag{23}$$

有了公式(22)及(23)，对数的底可以根据需要自由地加以转换.

对数除具有性质（14）及（16）外，利用上述换底公式（22）和（23），还可以得到关于对数的又一个重要的性质：

$$\log_a y^k = k \log_a y \quad (y > 0), \tag{24}$$

其中k是一个实数.

由(17)式，(24)式在$y = 1$时显然成立. 剩下来只需在$y > 0$，且$y \neq 1$时证明(24)式. 此时，可取y为底，由换底公式(22)和(23)，并注意到(10)式，就有

$$\log_a y^k = \frac{\log_y y^k}{\log_y a} = \frac{k}{\log_y a} = k \log_a y.$$

这就证明了(24).

容易看到，(10)式是(24)式的一个特殊的形式.

(14)，(16)及(24)式为简化乘除及乘方开方运算提供了基础.

下面我们归纳一下利用以a为底的对数将乘除运算化为加减运算的过程.