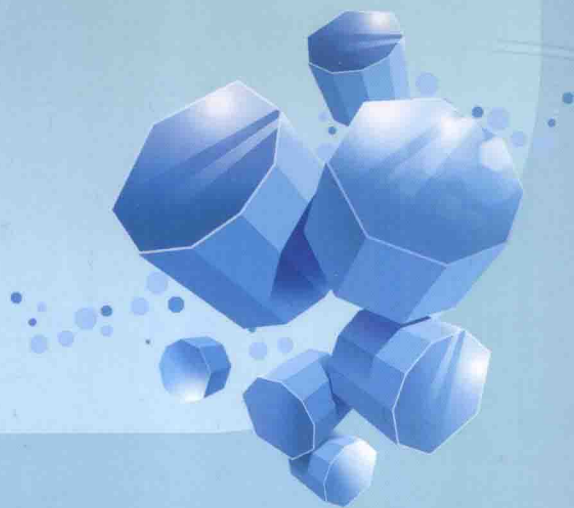


高职高专公共基础课“十三五”规划教材

高等数学 (上册)

宋振新 主编



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高职高专公共基础课“十三五”规划教材

高等数学

(上册)

主 编 宋振新

副主编 王艳梅 王云峰

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高职高专教育数学课程的基本要求,按照高职高专高等数学课程改革内容,结合编者多年从事高职数学教学经验编写而成的。

本书分为上、下两册,上册包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程及习题答案等内容;下册包括空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,线性代数初步等内容,书末附有基本初等函数表、初等数学常用公式、习题答案。

本书适用于高职高专院校理工类各专业的数学教学,也可作为“专接本”考试的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/宋振新主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2015.9

高职高专公共基础课“十三五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3802 - 7

I. ① 高… II. ① 宋… III. ① 高等数学—高等职业教育—教材

IV. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 216109 号

策划编辑 邵汉平 杨航斌

责任编辑 邵汉平 傅艳霞

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2015年9月第1版 2015年9月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 12

字 数 280千字

印 数 1~3000册

定 价 25.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3802 - 7/O

XDUP 4094001 - 1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版

前 言

本书是根据教育部颁布的高职高专数学课程的基本要求,按照高职高专高等数学课程改革内容,结合编者多年从事高职数学教学经验编写而成的。

本书的编写从高职高专教育实际出发,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,淡化了数学中的抽象概念和理论推导,强化了数学实践能力的训练。同时,将数学内容与数学建模知识相结合,对学生进行简单的数学建模知识培训。

本书分为上、下两册,上册包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程及习题答案等内容;下册包括空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,线性代数初步,以及基本初等函数表、初等数学常用公式、习题答案等。

结合“专接本”考试对“高等数学”的要求,每章内容之后都编写了测试题,下册书末还附有总测试题。

本书适用于高职高专理工类各专业的数学教学,也可作为“专接本”考试的教材或参考书。

本书由河北能源职业技术学院宋振新教授任主编。参加本书编写的有河北能源职业技术学院王艳梅(第1、8章及附录)、王恩亮及韦宁(第2章)、武瑞华(第3章)、郁国瑞(第4章)、宋振新(第5、6、7、9章)。本书编写过程中,得到了西安电子科技大学出版社的大力支持,在此表示感谢。

由于时间仓促,限于编者水平,书中不当之处在所难免,恳请同行和读者给予批评指正。

编 者

2015年6月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数及其性质	1
一、函数的概念	1
二、函数的几种特性	6
三、初等函数	8
能力训练题 1.1	11
1.2 极限的概念	12
一、数列的极限	12
二、函数的极限	13
三、极限的性质	16
能力训练题 1.2	17
1.3 无穷小量与无穷大量	17
一、无穷小量	17
二、无穷大量	18
三、无穷大量与无穷小量的关系	19
能力训练题 1.3	19
1.4 极限的四则运算法则	20
能力训练题 1.4	23
1.5 两个重要极限	24
一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	24
二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	26
能力训练题 1.5	28
1.6 无穷小量的比较	29
一、无穷小量的比较	29
二、等价无穷小的应用	29
能力训练题 1.6	30
1.7 函数的连续性	31

一、函数的连续性定义	31
二、函数间断点	32
三、初等函数的连续性	33
四、闭区间上连续函数的性质	34
能力训练题 1.7	36
能力测试题一	37
第 2 章 一元函数微分学	39
2.1 导数概念	39
一、引例	39
二、导数的定义	41
三、由定义求导举例	42
四、左导数与右导数	43
五、导数的几何意义	43
六、可导与连续的关系	44
能力训练题 2.1	45
2.2 导数的基本公式及运算法则	46
一、基本初等函数及常数的导数	46
二、导数的四则运算法则	47
三、反函数求导法则	48
四、复合函数的求导法则	49
五、隐函数的导数	51
六、对数求导法	52
能力训练题 2.2	53
2.3 函数的微分	55
一、微分的定义	55
二、微分的几何意义	56
三、微分的计算	57
四、由参数方程确定的函数的导数	58
五、微分在近似计算中的应用	59
能力训练题 2.3	60
2.4 高阶导数	61
能力训练题 2.4	63
2.5 微分中值定理与洛比达法则	64
一、微分中值定理	64
二、洛比达法则	68

能力训练题 2.5	71
2.6 函数的单调性及其极值	73
一、函数单调性的判别	73
二、函数的极值及其求法	75
能力训练题 2.6	79
2.7 函数的最值	80
一、闭区间上连续函数的最值	81
二、最值应用题	81
能力训练题 2.7	84
2.8 曲线的凹凸性、拐点与函数图形的描绘	85
一、曲线的凹凸性与拐点	85
二、曲线的水平渐近线和垂直渐近线	87
三、函数图形的描绘	89
能力训练题 2.8	90
能力测试题二	91
第3章 一元函数积分学	93
3.1 不定积分的概念与性质	93
一、原函数	93
二、不定积分的概念及几何意义	94
三、不定积分的积分公式	95
能力训练题 3.1	97
3.2 换元积分法	98
一、第一类换元积分法(凑微分法)	99
二、第二类换元积分法	104
能力训练题 3.2	107
3.3 分部积分法	109
能力训练题 3.3	113
3.4 定积分的概念及性质	114
一、引例	114
二、定积分的概念	116
三、定积分的几何意义	118
四、定积分的性质	119
能力训练题 3.4	122
3.5 微积分基本公式	123
一、变上限的定积分	123

二、牛顿—莱布尼兹公式	125
能力训练题 3.5	127
3.6 定积分的积分方法	128
一、定积分的换元积分法	128
二、定积分的分部积分法	131
三、无穷区间上的广义积分	133
能力训练题 3.6	135
3.7 定积分的应用	136
一、定积分的微元法	136
二、平面图形的面积	137
三、立体的体积	139
四、物理应用	142
能力训练题 3.7	145
能力测试题三	146
第4章 微分方程	149
4.1 微分方程的基本概念	149
一、引例	149
二、微分方程的基本概念	150
能力训练题 4.1	152
4.2 一阶微分方程	152
一、可分离变量的一阶微分方程	152
二、一阶线性微分方程	155
能力训练题 4.2	159
4.3 特殊的可降阶的微分方程	159
一、用降阶法解 $y^{(n)} = f(x)$ 类型的方程	159
二、用降阶法解 $y'' = f(x, y')$ 类型的方程	160
能力训练题 4.3	161
4.4 二阶线性微分方程	161
一、二阶线性微分方程解的结构	161
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	163
三、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	166
能力训练题 4.4	171
能力测试题四	171
习题答案	173

第1章 函数、极限与连续

函数是描述客观世界中量与量之间相依关系的数学模型,是微积分的一个基本概念,也是微积分研究的对象,其研究的基本方法是极限方法.本章我们将从分析日常现象中常见的变量出发,引入函数的一般定义,在复习函数有关知识的基础上着重讨论函数的极限和函数的连续性.

1.1 函数及其性质

一、函数的概念

1. 区间与邻域

1) 区间

数学中讨论的量分为两类:常量与变量.在给定的问题中,不变的、保持一定值的量叫做常量;由于某种缘故变化着的,取不同值的量叫变量.任何一个变量,都有确定的变化范围,如果变量的变化范围是连续的,常用一种特殊的数集——区间来表示,例如:

有限区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ 开区间

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 闭区间

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 半开区间

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 半开区间

无限区间: $(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}$

$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}$

$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}$

$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$

2) 邻域

设实数 x_0 , δ , 且 $\delta > 0$, 数集

$$\{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$. 即

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

因为 $|x - x_0| < \delta$ 相当于 $-\delta < x - x_0 < \delta$, 即 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, 所以在几何上, 邻域 $U(x_0, \delta)$ 表示以点 x_0 为中心, 长为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 如图 1-1 所示.

有时研究的邻域是不包括中心点 x_0 的, 称为点 x_0 的 δ 去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$. 即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

$$\text{或} \quad \dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

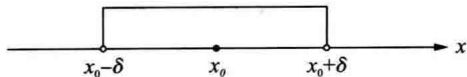


图 1-1

2. 函数的定义

现实世界中各种变化着的量不是孤立的, 而是相互联系和相互制约的, 这种变量间的相依关系反映到数学上就是函数, 它描述了自然现象中量的变化规律.

例 1 圆的面积公式:

$$S = \pi r^2$$

式中 r 是圆的半径, 圆的半径不同, 圆的面积也就不同, 而 π 在圆的面积计算中总是不变的, 因此, 在这个给定的问题中, π 是常量, 圆的半径 r 和圆的面积 S 都是变量, 当圆的半径 r 取定某一数值时, 则圆的面积 S 也随之有一个确定的数值与之对应, 如 $r = 1 \text{ m}$ 时, $S = 3.14 \text{ m}^2$.

例 2 气象台为了掌握某地气温的变化, 使用自动记录器将每天的气温记录下来, 直接画出一条如图 1-2 所示的曲线. 图中有 2 个变量: 时间 t 和气温 C . 对从 0 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t , 都有一个确定的气温 C 与之对应, 它们之间的对应关系就是图 1-2 的曲线, 当时间为 t_0 时, 通过图中曲线可以找到 C_0 , 且 C_0 是唯一的值.

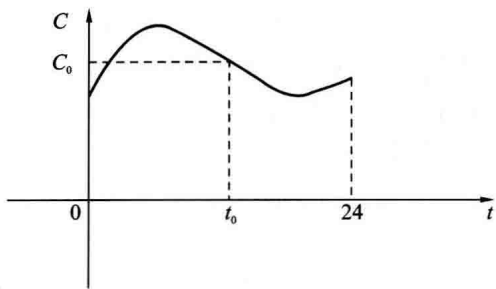


图 1-2

例 3 某种牌号语音机, 当单价为 230 元时, 每月可销售 1500 台, 如果单价每降低 10 元, 则可多销售 25 台, 单价不得低于 160 元. 销量 Q 与单价 P 有如下关系:

表 1-1

P	230	220	210	200	190	180	170	160
Q	1500	1525	1550	1575	1600	1625	1650	1675

当 P 在允许的降价范围内变化时, 销售量 Q 也随之有一个确定的值与之对应.

综合上述各例, 就其所涉及的应用领域而言, 有几何的、气象的、经济的, 但其共同本

质是参与给定问题的变量之间存在相互依赖的关系,当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时,按照某种确定的对应关系(如公式、图形和列表),另一个变量就有一个确定的值与之对应.函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义1 设 x 和 y 是两个变量,数集 D 是变量 x 的变化范围,如果对于属于 D 的每个数 x ,变量 y 按照一定的规律 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x), x \in D$$

称变量 x 是自变量,变量 y 是函数(或因变量),数集 D 是函数的定义域.若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应规律 f ,函数 y 有确定的值 y_0 与之对应,则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$$

全体函数值组成的集合,称为函数的值域,记作 M .

为了理解这个定义,说明以下几点:

(1) 在函数定义中,仅要求对自变量 $x \in D$,都有确定的 $y \in M$ 与之对应,因此,常量 $y=C$ 也符合函数的定义,因为当 $x \in \mathbf{R}$ 时,所对应的 y 值都是确定的常数 C ,一般称 $y=C$ 为常函数.

(2) 若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

(3) 若对于 D 中的每个 x 的取值, y 有唯一的值与之对应,称这样的函数为单值函数,否则叫做多值函数,以后我们所涉及和讨论的函数一般是指单值函数.

(4) 一般函数的对应规律用字母“ f ”来表示,对不同的函数的对应规律可以用不同的字母来表示.

(5) 函数通常有三种表示法.

公式法(或解析法): 用一个数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法,如例1.

图形法: 用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法,如例2.

列表法: 用表格表示两个变量之间函数关系的方法,如例3.

(6) 函数的定义中涉及定义域 D 、对应规律 f 和值域 M 三个因素,显然,给定 D 和 f , M 就被相应确定了, D 和 f 就是决定一个函数的两个要素,于是两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应规律相同.例如 $y=x^2$, $u=r^2$ 甚至 $x=y^2$ 都是同一个函数,因为它们的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$,且对应规律都是因变量等于自变量的平方,这也表明因变量、自变量与字母无关.需要注意的是,同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律.

(7) 确定用公式法表示的函数的定义域,应考虑两种情况,一是确定使该式子有意义的自变量的全体,二是对实际问题要根据变量的实际变化范围来确定.一般地,应注意如下几点:

- ① 分母不能为零;
- ② 偶次根号下非负;

- ③ 对数的底大于零而不等于 1, 真数大于零;
 ④ 正切符号下的式子不等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$;
 ⑤ 余切符号下的式子不等于 $k\pi$;
 ⑥ 反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于 1;
 ⑦ 如果函数的表达式由若干项组合而成, 则它的定义域是各项定义域的公共部分.
 (8) 在几何上, 函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 表示在 xOy 坐标平面上的一条曲线.

例 4 设 $y=f(x)=2x^2-x+1$, 求: $f(0)$, $f(1)$, $f(x_0)$.

解

$$y|_{x=0}=f(0)=2 \cdot 0^2-0+1=1$$

$$y|_{x=1}=f(1)=2 \cdot 1^2-1+1=2$$

$$y|_{x=x_0}=f(x_0)=2x_0^2-x_0+1$$

例 5 设 $f(x+1)=x^2-3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则

$$x=t-1,$$

所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 6 确定下列函数的定义域:

$$(1) y=\frac{1}{1-x};$$

$$(2) y=\sqrt{1-x^2};$$

$$(3) y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2};$$

$$(4) y=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}.$$

解 (1) 除了 $x=1$ 使分母为零外, x 取任何实数, 函数式都有意义, 因此其定义域为除 $x=1$ 之外的全体实数, 可记作

$$D=(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \quad \text{或} \quad D=\{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$$

(2) 要使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义, 必须使 $1-x^2 \geq 0$, 即

$$x^2 \leq 1, |x| \leq 1$$

因此其定义域是

$$D=\{x|-1 \leq x \leq 1\} \quad \text{或} \quad D=[-1, 1]$$

(3) 这是两个函数之和的定义域, 先分别求出每个函数的定义域, 然后求其公共部分即可. 使函数 $\frac{1}{4-x^2}$ 有意义的 x 必须满足 $4-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 2$, 而使函数 $\sqrt{x+2}$ 有意义的 x 必须满足 $x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -2$, 因此, 函数的定义域是 $D=(-2, 2) \cup (2, +\infty)$, 或 $D=\{x|x \neq \pm 2, \text{且 } x > -2\}$.

(4) $\lg(1-x^2)$ 的定义域满足不等式

$$1-x^2>0$$

得

$$-1<x<1$$

$\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geq 0$. 因此, 函数的定义域是 $D=\{x \mid 0\leq x<1\}$, 或 $D=[0, 1)$.

3. 分段函数

定义 2 在定义域内, 当自变量在不同的部分取值时, 有不同的对应关系的函数叫分段函数.

分段函数是定义域上的一个函数, 它的定义域是各部分的自变量取值集合的并集, 求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时, 要根据 x_0 所在的部分, 选用相应的解析式, 其图形要分段作出.

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leq x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1+x, & 0<x\leq 3 \end{cases}$$

(1) 求函数的定义域;

(2) 求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$;

(3) 作出函数的图形.

解 这是一个分段函数, 该函数用三个解析式表示:

当 $x\in[-2, 0)$ 时, $f(x)=x^2$;

当 $x=0$ 时, $f(x)=2$;

当 $x\in(0, 3]$ 时, $f(x)=1+x$.

(1) 自变量 x 的取值范围有三部分: $[-2, 0)$, $\{0\}$ 和 $(0, 3]$, 因此, 函数的定义域是这三个集合的并集, 即 $[-2, 3]$.

(2) 由于 $-2\in[-2, 0)$, $-1\in[-2, 0)$, 故

$$f(-2)=(-2)^2=4$$

$$f(-1)=(-1)^2=1$$

由于 $x=0$ 时, $f(x)=2$, 故 $f(0)=2$.

由于 $1\in(0, 3]$, 故 $f(1)=1+1=2$.

(3) 利用描点法, 分段作出各部分函数图形, 如图 1-3 所示.

下面列出的几个函数均为数学上常用的分段函数.

(1) 绝对值函数:

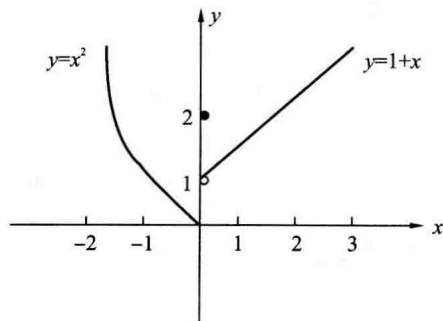


图 1-3

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

(2) 符号函数:

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

4. 反函数

定义 3 设给定函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M , 如果对于 M 中的每一个 y 值, 都可以从关系式 $y=f(x)$ 中找到确定的 x 值 ($x\in D$) 与之对应, 那么由此所确定的以 y 为自变量的新函数叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域为 M , 值域为 D , 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

因为函数对于用什么字母来表示自变量和因变量是没有限制的, 习惯上总是用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此, 往往把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作

$$y=f^{-1}(x)$$

若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 则 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数, 或者说它们互为反函数.

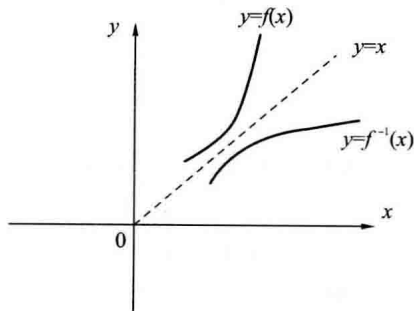


图 1-4

在同一直角坐标系下, 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称, 如图 1-4 所示.

例 8 求 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

解 由 $y=2^{x-1}$ 解得 x , 得

$$x=\lg y+1$$

将 x, y 的位置互换, 得

$$y=\lg x+1$$

这就是函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x\in D$, 则必有一 $x\in D$), 若对任意 $x\in D$, 有

(1) $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如, 我们熟悉的函数 $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ 等都是偶函数, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$ 等都是奇函数.

例 9 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=a^x-a^{-x}$; (2) $f(x)=2x^4+3x^2+1$; (3) $f(x)=x^3+\cos x$.

解 用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性, 应先算出 $f(-x)$, 然后与 $f(x)$ 对照.

$$(1) \quad f(x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \quad f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+1=2x^4+3x^2+1=f(x)$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

$$(3) \quad f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x$$

由于

$$f(-x) \neq -f(x), \quad f(-x) \neq f(x)$$

故该函数既不是奇函数也不是偶函数.

2. 函数的单调性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数, 若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数, 则称 I 是该函数的单调区间. 若沿着 x 轴的正方向看, 单调增加函数的图形是一条上升的曲线, 单调减少函数的图形是一条下降的曲线, 见图 1-5.

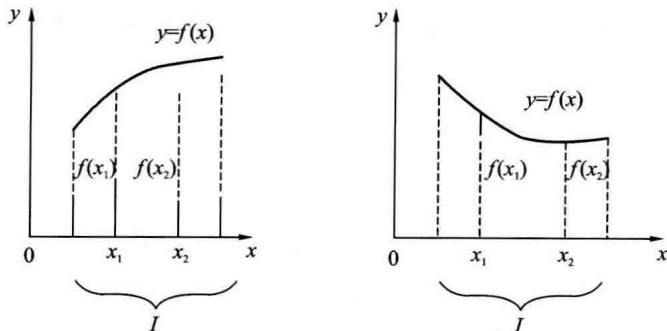


图 1-5

3. 函数的周期性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个非零常数 T , 对于任意 $x \in D$, 有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 是周期函数, 称 T 是它的一个周期.

若 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期, 则 $\pm 2T, \pm 3T \dots$, 也都是它的周期, 通常, 我们称周期中的最小正周期为周期函数的周期. 例如, 函数 $y=\sin x, y=\cos x$, 是以 2π 为周期的周期函数, $y=\tan x, y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期为 T 的周期函数, 在长度为 T 的各个区间上, 其函数图形有相同的形状.

有很多自然现象, 像季节、气候等都是年复一年呈周期变化的; 有很多经济活动, 小到商品销售, 大到经济宏观运行, 其变化也具有周期规律性.

4. 函数的有界性

定义 7 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 M , 使得对于任意的 $x \in I$, 有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数, 若这样的 M 不存在, 就称 $f(x)$ 在 I 内是无界函数.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 例如, 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在 $M=1$, 使得 $|\sin x| \leq 1$ 恒成立. 而 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是无界的. 又如, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在

开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 内是有界的.

由此可见, 笼统地说某个函数是有界函数或无界函数是不确切的, 必须指明所考虑的区域.

三、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常指以下六类函数: 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

常量函数	$y=C$	(C 为常数);
幂函数	$y=x^\mu$	(μ 为实数);
指数函数	$y=a^x$	($a>0, a \neq 1, a$ 为常数);
对数函数	$y=\log_a x$	($a>0, a \neq 1, a$ 为常数);
三角函数	$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;	
反三角函数	$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.	

这六种函数统称为基本初等函数, 这些函数的性质、图形在中学已经学过, 今后要经

常用到.

2. 复合函数

定义 8 设 $y=f(u)$ 是 u 的函数, $u=\varphi(x)$ 是 x 的函数, 如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内, 即由 x 所确定的 u 使得 y 有意义, 则把 y 叫做 x 的复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

u 称为中间变量, $f(u)$ 称外层函数, $\varphi(x)$ 称内层函数.

对于复合函数, 我们做下面的说明:

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数, 例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数, 因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域是 $u<0$, 而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$.

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量, 还可以有多个中间变量, 这些中间变量是经过多次复合产生的.

(3) 由基本初等函数经有限次的四则运算得到的函数, 称做简单函数. 复合函数的合成和分解往往是对简单函数而言的.

例 10 已知 $y=\sqrt{u}$, $u=2x^2+5$, 将 y 表示成 x 的函数.

解 将 $u=2x^2+5$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中, 可得

$$y=\sqrt{2x^2+5}$$

例 11 已知 $y=\ln u$, $u=4-v^2$, $v=\cos x$, 将 y 表示成 x 的函数.

解 $y=\ln u=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$

例 12 指出下列复合函数的复合过程.

$$(1) y=\sin^2 x; \quad (2) y=\arcsin(\ln x);$$

$$(3) y=(2x+1)^5; \quad (4) y=\cos^2(x^2+1);$$

$$(5) y=a^{\sin^3 \frac{1}{x}}.$$

解 (1) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(2) $y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的.

(3) $y=(2x+1)^5$ 是由 $y=u^5$ 和 $u=2x+1$ 复合而成的.

(4) $y=\cos^2(x^2+1)$ 是由 $y=u^2$, $u=\cos v$ 和 $v=x^2+1$ 复合而成的.

(5) $y=a^{\sin^3 \frac{1}{x}}$ 是由 $y=a^u$, $u=v^3$, $v=\sin w$ 和 $w=\frac{1}{x}$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 9 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的, 并且可以由一个式子表示的函数, 叫做初等函数.