高职高专公共基础课“十三五”规划教材

高等数学（上册）

宋振新　主编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高职高专公共基础课“十三五”规划教材

高 等 数 学

（上册）

主　编　宋振新
副主编　王艳梅　王云峰

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是根据高职高专教育数学课程的基本要求，按照高职高专高等数学课程改革内容，结合编者多年从事高职数学教学经验编写而成的。

本书分为上、下两册，上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程及习题答案等内容；下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，线性代数初步等内容，书末附有基本初等函数表、初等数学常用公式、习题答案。

本书适用于高职高专院校理工类各专业的数学教学，也可作为“专接本”考试的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/宋振新主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2015.9
高职高专公共基础课“十三五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 5606 - 3802 - 7

Ⅰ. ① 高… Ⅱ. ① 宋… Ⅲ. ① 高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 216109 号

策划编辑 邵汉平 杨航斌
责任编辑 邵汉平 傅艳霞
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071
网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经 销 新华书店
印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司
版 次 2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷
开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 12
字 数 280 千字
印 数 1～3000 册
定 价 25.00 元
ISBN 978 - 7 - 5606 - 3802 - 7/O
XDUP 4094001 - 1

前　言

本书是根据教育部颁布的高职高专数学课程的基本要求，按照高职高专高等数学课程改革内容，结合编者多年从事高职数学教学经验编写而成的。

本书的编写从高职高专教育实际出发，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，淡化了数学中的抽象概念和理论推导，强化了数学实践能力的训练。同时，将数学内容与数学建模知识相结合，对学生进行简单的数学建模知识培训。

本书分为上、下两册，上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程及习题答案等内容；下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，线性代数初步，以及基本初等函数表、初等数学常用公式、习题答案等。

结合“专接本”考试对“高等数学”的要求，每章内容之后都编写了测试题，下册书末还附有总测试题。

本书适用于高职高专理工类各专业的数学教学，也可作为“专接本”考试的教材或参考书。

本书由河北能源职业技术学院宋振新教授任主编。参加本书编写的有河北能源职业技术学院王艳梅(第1、8章及附录)、王恩亮及韦宁(第2章)、武瑞华(第3章)、郁国瑞(第4章)、宋振新(第5、6、7、9章)。本书编写过程中，得到了西安电子科技大学出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于时间仓促，限于编者水平，书中不当之处在所难免，恳请同行和读者给予批评指正。

编　者
2015年6月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是描述客观世界中量与量之间相依关系的数学模型，是微积分的一个基本概念，也是微积分研究的对象，其研究的基本方法是极限方法．本章我们将从分析日常现象中常见的变量出发，引入函数的一般定义，在复习函数有关知识的基础上着重讨论函数的极限和函数的连续性．

1.1　函数及其性质

一、函数的概念

1. 区间与邻域

1）区间

数学中讨论的量分为两类：常量与变量．在给定的问题中，不变的、保持一定值的量叫做常量；由于某种缘故变化着的，取不同值的量叫变量．任何一个变量，都有确定的变化范围，如果变量的变化范围是连续的，常用一种特殊的数集——区间来表示，例如：

有限区间：$(a, b)=\{x|a<x<b\}$ 开区间

$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 闭区间

$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 半开区间

$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 半开区间

无限区间：$(a, +\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$

$[a, +\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$

$(-\infty, b)=\{x|-\infty<x<b\}$

$(-\infty, b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$

2）邻域

设实数 x_0，δ，且 $\delta>0$，数集

$$\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0, \delta)$．即

$$U(x_0, \delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

因为 $|x-x_0|<\delta$ 相当于 $-\delta<x-x_0<\delta$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，所以在几何上，邻域 $U(x_0, \delta)$ 表示以点 x_0 为中心，长为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，如图 1－1 所示.

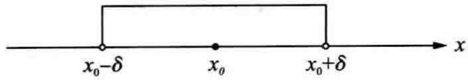

图 1－1

有时研究的邻域是不包括中心点 x_0 的，称为点 x_0 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$. 即

$$\mathring{U}(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$$

或
$$\mathring{U}(x_0, \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

2. 函数的定义

现实世界中各种变化着的量不是孤立的，而是相互联系和相互制约的，这种变量间的相依关系反映到数学上就是函数，它描述了自然现象中量的变化规律.

例 1　圆的面积公式：

$$S=\pi r^2$$

式中 r 是圆的半径，圆的半径不同，圆的面积也就不同，而 π 在圆的面积计算中总是不变的，因此，在这个给定的问题中，π 是常量，圆的半径 r 和圆的面积 S 都是变量，当圆的半径 r 取定某一数值时，则圆的面积 S 也随之有一个确定的数值与之对应，如 $r=1$ m 时，$S=3.14$ m^2.

例 2　气象台为了掌握某地气温的变化，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图 1－2 所示的曲线. 图中有 2 个变量：时间 t 和气温 C. 对从 0 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t，都有一个确定的气温 C 与之对应，它们之间的对应关系就是图1－2 的曲线，当时间为 t_0 时，通过图中曲线可以找到 C_0，且 C_0 是唯一的值.

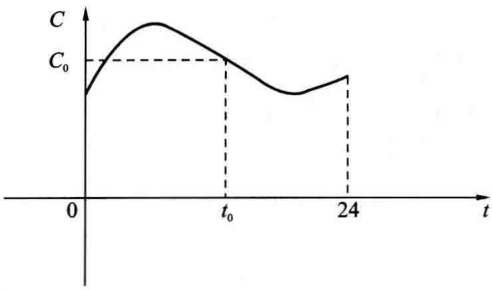

图 1－2

例 3　某种牌号语音机，当单价为 230 元时，每月可销售 1500 台，如果单价每降低 10 元，则可多销售 25 台，单价不得低于 160 元. 销量 Q 与单价 P 有如下关系：

表 1－1

P	230	220	210	200	190	180	170	160
Q	1500	1525	1550	1575	1600	1625	1650	1675

当 P 在允许的降价范围内变化时，销售量 Q 也随之有一个确定的值与之对应.

综合上述各例，就其所涉及的应用领域而言，有几何的、气象的、经济的，但其共同本

质是参与给定问题的变量之间存在相互依赖的关系，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，按照某种确定的对应关系(如公式、图形和列表)，另一个变量就有一个确定的值与之对应. 函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，数集 D 是变量 x 的变化范围，如果对于属于 D 的每个数 x，变量 y 按照一定的规律 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

称变量 x 是自变量，变量 y 是函数(或因变量)，数集 D 是函数的定义域. 若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 f，函数 y 有确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0)$$

全体函数值组成的集合，称为函数的值域，记作 M.

为了理解这个定义，说明以下几点：

(1) 在函数定义中，仅要求对自变量 $x\in D$，都有确定的 $y\in M$ 与之对应，因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in \mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C，一般称 $y=C$ 为常函数.

(2) 若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

(3) 若对于 D 中的每个 x 的取值，y 有唯一的值与之对应，称这样的函数为单值函数，否则叫做多值函数，以后我们所涉及和讨论的函数一般是指单值函数.

(4) 一般函数的对应规律用字母“f”来表示，对不同的函数的对应规律可以用不同的字母来表示.

(5) 函数通常有三种表示法。

公式法(或解析法)：用一个数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法，如例 1.

图形法：用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法，如例 2.

列表法：用表格表示两个变量之间函数关系的方法，如例 3.

(6) 函数的定义中涉及定义域 D、对应规律 f 和值域 M 三个因素，显然，给定 D 和 f，M 就被相应确定了，D 和 f 就是决定一个函数的两个要素，于是两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应规律相同. 例如 $y=x^2$，$u=r^2$ 甚至 $x=y^2$ 都是同一个函数，因为它们的定义域都是$(-\infty,\ +\infty)$，且对应规律都是因变量等于自变量的平方，这也表明因变量、自变量与字母无关. 需要注意的是，同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律.

(7) 确定用公式法表示的函数的定义域，应考虑两种情况，一是确定使该式子有意义的自变量的全体，二是对实际问题要根据变量的实际变化范围来确定. 一般地，应注意如下几点：

① 分母不能为零；

② 偶次根号下非负；

③ 对数的底大于零而不等于 1，真数大于零；

④ 正切符号下的式子不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$；

⑤ 余切符号下的式子不等于 $k\pi$；

⑥ 反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于 1；

⑦ 如果函数的表达式由若干项组合而成，则它的定义域是各项定义域的公共部分.

(8) 在几何上，函数 $y=f(x)$，$x\in D$，表示在 xoy 坐标平面上的一条曲线.

例 4　设 $y=f(x)=2x^2-x+1$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f(x_0)$.

解

$$y|_{x=0}=f(0)=2\cdot 0^2-0+1=1$$
$$y|_{x=1}=f(1)=2\cdot 1^2-1+1=2$$
$$y|_{x=x_0}=f(x_0)=2{x_0}^2-x_0+1$$

例 5　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x+1=t$，则

$$x=t-1,$$

所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 6　确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x}$；　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(4) $y=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}$.

解　(1) 除了 $x=1$ 使分母为零外，x 取任何实数，函数式都有意义，因此其定义域为除 $x=1$ 之外的全体实数，可记作

$$D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\quad 或\quad D=\{x\,|\,x\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$$

(2) 要使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义，必须使 $1-x^2\geqslant 0$，即

$$x^2\leqslant 1,\ |x|\leqslant 1$$

因此其定义域是

$$D=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}\quad 或\quad D=[-1,1]$$

(3) 这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可. 使函数 $\frac{1}{4-x^2}$ 有意义的 x 必须满足 $4-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 2$，而使函数 $\sqrt{x+2}$ 有意义的 x 必须满足 $x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -2$，因此，函数的定义域是 $D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$，或 $D=\{x\,|\,x\neq\pm 2，且\ x>-2\}$.

(4) $\lg(1-x^2)$的定义域满足不等式

$$1-x^2>0$$

得

$$-1<x<1$$

$\sqrt{x}$的定义域是 $x\geqslant 0$. 因此，函数的定义域是 $D=\{x \mid 0\leqslant x<1\}$，或 $D=[0, 1)$.

3. 分段函数

定义 2　在定义域内，当自变量在不同的部分取值时，有不同的对应关系的函数叫分段函数.

分段函数是定义域上的一个函数，它的定义域是各部分的自变量取值集合的并集，求分段函数的函数值 $f(x_0)$时，要根据 x_0所在的部分，选用相应的解析式，其图形要分段作出.

例 7　设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1+x, & 0<x\leqslant 3 \end{cases}$$

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$；

(3) 作出函数的图形.

解　这是一个分段函数，该函数用三个解析式表示：

当 $x\in[-2, 0)$时，$f(x)=x^2$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=2$；

当 $x\in(0, 3]$时，$f(x)=1+x$.

(1) 自变量 x 的取值范围有三部分：$[-2, 0)$，$\{0\}$和$(0, 3]$，因此，函数的定义域是这三个集合的并集，即$[-2, 3]$.

(2) 由于$-2\in[-2, 0)$，$-1\in[-2, 0)$，故

$$f(-2)=(-2)^2=4$$

$$f(-1)=(-1)^2=1$$

由于 $x=0$ 时，$f(x)=2$，故 $f(0)=2$.

由于 $1\in(0, 3]$，故 $f(1)=1+1=2$.

(3) 利用描点法，分段作出各部分函数图形，如图 1－3 所示.

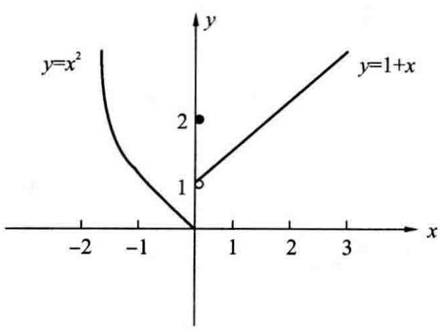

图 1－3

下面列出的几个函数均为数学上常用的分段函数.

(1) 绝对值函数：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

（2）符号函数：

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

4. 反函数

定义 3　设给定函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中找到确定的 x 值（$x\in D$）与之对应，那么由此所确定的以 y 为自变量的新函数叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 M，值域为 D，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

因为函数对于用什么字母来表示自变量和因变量是没有限制的，习惯上总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，往往把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作

$$y=f^{-1}(x)$$

若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

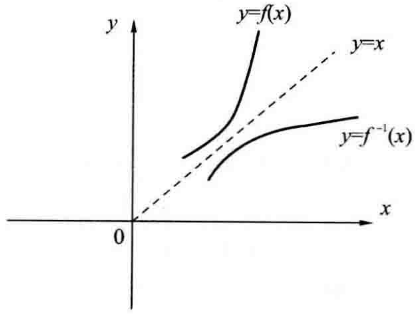

图 1－4

在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－4 所示.

例 8　求 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

解　由 $y=2^{x-1}$ 解得 x，得

$$x=\mathrm{lb}y+1$$

将 x，y 的位置互换，得

$$y=\mathrm{lb}x+1$$

这就是函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），若对任意 $x\in D$，有

(1) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如，我们熟悉的函数 $f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 等都是偶函数，$f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 等都是奇函数.

例 9　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=a^x-a^{-x}$；　(2) $f(x)=2x^4+3x^2+1$；　(3) $f(x)=x^3+\cos x$.

解　用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性，应先算出 $f(-x)$，然后与 $f(x)$对照.

(1)
$$f(x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$$
故 $f(x)$是奇函数.

(2)
$$f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+1=2x^4+3x^2+1=f(x)$$
故 $f(x)$是偶函数.

(3)
$$f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x$$
由于
$$f(-x)\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x)$$
故该函数既不是奇函数也不是偶函数.

2. 函数的单调性

定义 5　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是单调增加的；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数，若 $f(x)$在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的单调区间. 若沿着 x 轴的正方向看，单调增加函数的图形是一条上升的曲线，单调减少函数的图形是一条下降的曲线，见图 1－5.

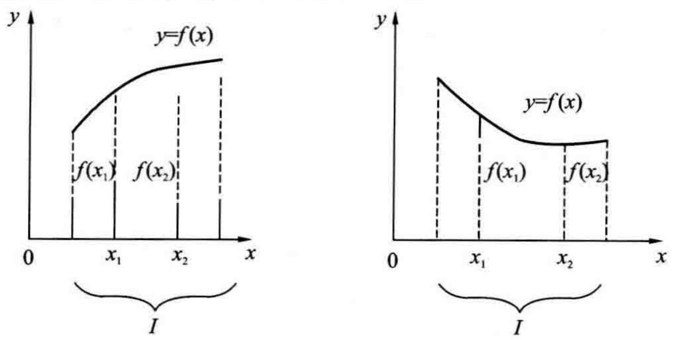

图 1－5

3. 函数的周期性

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在一个非零常数 T，对于任意 $x\in D$，有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$是周期函数，称 T 是它的一个周期.

若 T 是函数 $f(x)$的一个周期，则$\pm 2T$，$\pm 3T\cdots$，也都是它的周期，通常，我们称周期中的最小正周期为周期函数的周期. 例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，其函数图形有相同的形状.

有很多自然现象，像季节、气候等都是年复一年呈周期变化的；有很多经济活动，小到商品销售，大到经济宏观运行，其变化也具有周期规律性.

4. 函数的有界性

定义 7 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数，若这样的 M 不存在，就称 $f(x)$在 I 内是无界函数.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 例如，函数 $y=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant 1$ 恒成立. 而 $y=\tan x$ 在开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上是无界的. 又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在开区间$(0, 1)$内是无界的，而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[1, 2]$内是有界的.

由此可见，笼统地说某个函数是有界函数或无界函数是不确切的，必须指明所考虑的区间.

三、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常指以下六类函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

常量函数	$y=C$	(C 为常数)；
幂函数	$y=x^{\mu}$	(μ 为实数)；
指数函数	$y=a^{x}$	($a>0$，$a\neq 1$，a 为常数)；
对数函数	$y=\log_{a}x$	($a>0$，$a\neq 1$，a 为常数)；
三角函数	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；	
反三角函数	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.	

这六种函数统称为基本初等函数，这些函数的性质、图形在中学已经学过，今后要经

常用到.

2. 复合函数

定义 8　设 $y=f(u)$是 u 的函数，$u=\varphi(x)$是 x 的函数，如果函数 $u=\varphi(x)$的值域全部或部分包含在函数 $y=f(u)$的定义域内，即由 x 所确定的 u 使得 y 有意义，则把 y 叫做 x 的复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

u 称为中间变量，$f(u)$称外层函数，$\varphi(x)$称内层函数.

对于复合函数，我们做下面的说明：

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$就不能构成复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$的值域是 $u<0$，而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$.

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的.

(3) 由基本初等函数经有限次的四则运算得到的函数，称做简单函数. 复合函数的合成和分解往往是对简单函数而言的.

例 10　已知 $y=\sqrt{u}$，$u=2x^2+5$，将 y 表示成 x 的函数.

解　将 $u=2x^2+5$ 代入 $y=\sqrt{u}$中，可得

$$y=\sqrt{2x^2+5}$$

例 11　已知 $y=\ln u$，$u=4-v^2$，$v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解
$$y=\ln u=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$$

例 12　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\arcsin(\ln x)$；

(3) $y=(2x+1)^5$；　　(4) $y=\cos^2(x^2+1)$；

(5) $y=a^{\sin^3\frac{1}{x}}$.

解　(1) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(2) $y=\arcsin(\ln x)$是由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的.

(3) $y=(2x+1)^5$是由 $y=u^5$ 和 $u=2x+1$ 复合而成的.

(4) $y=\cos^2(x^2+1)$是由 $y=u^2$，$u=\cos v$ 和 $v=x^2+1$ 复合而成的.

(5) $y=a^{\sin^3\frac{1}{x}}$是由 $y=a^u$，$u=v^3$，$v=\sin w$ 和 $w=\frac{1}{x}$复合而成的.

3. 初等函数

定义 9　由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的，并且可以由一个式子表示的函数，叫做初等函数.