

分布估计算法 及其应用

Distributed Estimation
Algorithm and Its Application

■ 高尚 著



國防工業出版社
National Defense Industry Press

分布估计算法及其应用

Distributed Estimation Algorithm and Its Application

高尚 著



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

分布估计算法提供了一个新的进化模式,它从有前途的候选解建立概率模型来引导搜索过程。本书介绍了分布估计算法的发展、理论研究成果及应用;介绍了分布估计算法的 MATLAB 工具箱 MATEDA-2.0 的用法;提出了改进的正态分布的分布估计算法求解连续空间函数优化问题;将分布估计算法应用于武器—目标分配问题、背包问题、可靠性优化问题、旅行商问题、多约束装箱问题文本聚类问题中;讨论了解连续性优化问题、最小包围圆问题和旅行商问题的摸石头过河算法;探讨了与“摸石头过河”混合的分布估计算法;探讨了利用分布估计算法解决多目标优化问题。该书反映了作者的最新成果。

本书是一本理论与实际相结合的书籍,书中给出了主要算法的源代码,通俗易懂,图文并茂。本书适合于从事智能计算领域研究和应用的科技工作者和工程技术人员使用,可以作为人工智能、计算机科学、信息科学、智能优化及智能控制领域的广大高年级本科生、研究生和教师的教材或教学参考书,也可供相关领域的科研人员 and 实际工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

分布估计算法及其应用/高尚著. —北京:国防工业出版社,2016.1

ISBN 978-7-118-10140-9

I. ①分… II. ①高… III. ①计算机算法 IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 247618 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 11 $\frac{1}{4}$ 字数 215 千字

2016 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 32.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

分布估计算法又称为基于概率模型的遗传算法,是 20 世纪 90 年代初提出的一种新型的启发式算法。它结合了统计学习理论和遗传算法的原理,通过构建概率模型、采样和更新概率模型等操作实现群体的进化。分布估计算法的思想起源于遗传算法,但却有与遗传法截然不同的进化模式。从一定意义上说,遗传算法是在“微观”层面对生物进化进行模拟,而分布估计算法则是在“宏观”的层面上控制算法搜索,是一种全新的进化模型。分布估计算法综合了智能计算领域和统计学领域的知识,是一种基于群体的算法,在每代循环体中,根据适应值选择出一些较好的个体组成优势群体,通过分析优势群体的概率分布模型来指导新一代群体的产生。该成果可应用于理科、工科和管理等多种学科。

本书将理论与实际相结合,介绍了分布估计算法的发展、理论研究成果及应用;介绍了分布估计算法的 MATLAB 工具箱 MATEDA-2.0 的用法;提出了改进的正态分布的分布估计算法,将分布估计算法应用于武器—目标分配问题、背包问题、可靠性优化问题、多约束装箱问题和文本聚类问题中;讨论了解连续性优化问题、最小包围圆问题和旅行商问题的摸石头过河算法;探讨了与“摸石头过河”混合的分布估计算法;讨论了利用分布估计算法解决多目标优化问题。

本书由 12 章组成。第 1 章介绍了智能优化算法及其分类,以及分布估计算法的发展、理论研究成果及应用,阐述了分布估计算法的研究现状及基于概率模型的其他优化算法,讲述了分布估计算法当前存在的关键问题与研究的难点,进一步指出了该算法的发展趋势。第 2 章介绍了分布估计算法的相关知识及分布估计算法的 MATLAB 工具箱 MATEDA-2.0 的用法。第 3 章提出了改进的正态分布的分布估计算法求解连续空间函数优化问题。第 4 章建立了武器—目标分配问题的优化模型,分析了各种解决此模型的方法的优缺点,将分布估计算法应用于武器—目标分配问题,并分析了个体种群数量、选择比例对算法的影响。第 5 章探讨了各种类型的背包问题,将分布估计算法应用于背包问题,并分析了个体种群数量、选择比例对算法的影响。第 6 章建立了可靠性冗余优化模型,提出了一种解可靠性优化的基于分布估计算法的新方法,并分析了选择较好个体的比例对算法的影响。第 7 章讨论了旅行商问题的各种模型,给出了模拟退火算法、遗传算法和蚁群算法解决旅行商问题的算法;提出利用分布估计算法来解决旅行商问题,依据蚁群算法的思想提出了两种改进方法,并且分析了选择较好个体的比例对算法的影响。第 8 章介绍了集装箱装载问题的相关概念和数学模型,将分布估计算法与启发式算法

进行融合,提出了一种新的混合方法来解决集装箱装载问题,并通过数据测试说明了该种方法的有效性。第9章介绍了文本聚类问题的研究,介绍了《知网》的相关概念和组织结构,提出了一种新的文本相似度计算方法,并结合K-均值算法提出了基于语义相似度的K-均值算法;提出了用分布估计算法和禁忌搜索算法进行文本聚类的算法。第10章首先介绍了作者于2014年提出的“摸石头过河”算法,讨论了解连续性优化问题、最小包围圆问题和旅行商问题的摸石头过河算法,最后探讨了与“摸石头过河”混合的分布估计算法,数值测试表明该算法的优势。第11章介绍了多目标优化问题及其各种解法,给出了分布估计算法解决多目标优化问题的方法。第12章对本书作了一个总结。

本书的内容是作者多年的研究成果,同时也吸收了同行的一些成果,向文献的作者们表示深深的谢意。在学习和工作中,还从网络中吸收了大量有价值的信息,感谢这些上传资料的网友们,对无法标注出这些网友的真实姓名表示遗憾。本书得到了我的研究生郭莉莉、左先亮等的大力支持与帮助。

本书得到了中国科学院智能信息处理重点实验室开放课题(IIP2013-1)、人工智能四川省高校重点实验室开放基金(2012RYJ04)、江苏科技大学研究生院专著资助项目和江苏省“333工程”的资助。

本书可作为计算机类专业的高年级本科生、研究生和教师的教材或教学参考书,也可供相关领域的科研人员和实际工作者阅读参考。

由于作者水平有限,书中难免有不当之处,敬请读者批评指正。联系邮箱:gao_shang@just.edu.cn。

高尚
2015年2月

目 录

第1章 概述	1
1.1 智能优化算法	1
1.2 智能优化算法特点及分类	2
1.3 典型的优化测试函数	3
1.3.1 无约束优化函数	3
1.3.2 有约束优化问题	9
1.4 分布估计算法的起源	13
1.5 分布估计算法的理论研究	16
1.6 分布估计算法的应用	17
1.7 分布估计算法的研究热点	17
1.8 本书的组织结构	19
第2章 基本分布估计算法	21
2.1 一个简单的分布估计算法例子	21
2.2 基于不同概率模型的分布估计算法	25
2.2.1 变量无关的分布估计算法	25
2.2.2 双变量相关分布估计算法	27
2.2.3 多变量相关分布估计算法	29
2.2.4 基于概率模型的其他算法	30
2.3 连续域的分布估计算法	31
2.4 分布估计算法的 MATLAB 工具箱 MATEDA -2.0	32
2.4.1 MATEDA -2.0 的特点	32
2.4.2 MATEDA 的安装	32
2.4.3 MATEDA 程序功能	33
2.4.4 数值例子	34
2.5 本章小结	36

第3章 解连续性优化问题的改进的正态分布的分布估计算法 37

3.1 正态分布的分布估计算法 37

3.2 改进的正态分布的分布估计算法 38

3.3 数值仿真与分析 39

3.3.1 与均匀分布的分布估计算法比较 39

3.3.2 不同的 m/N 比例分析 40

3.4 本章小结 41

第4章 武器—目标分配问题的分布估计算法及参数设计 42

4.1 武器—目标分配问题 42

4.2 解武器—目标分配问题的改进分布估计算法 43

4.3 算法测试及参数设计 44

4.4 本章小结 46

第5章 背包问题的分布估计算法 47

5.1 引言 47

5.2 背包问题各种形式的数学模型 47

5.3 解 0-1 背包问题的分布估计算法 50

5.4 数值仿真与分析 51

5.5 本章小结 53

第6章 求解可靠性优化的分布估计算法 54

6.1 可靠性优化问题 54

6.2 最优冗余优化模型及解法 54

6.3 解可靠性优化问题的改进分布估计算法 55

6.4 算例分析 55

6.5 本章小结 58

第7章 旅行商问题的分布估计算法 59

7.1 旅行商问题 59

7.1.1 标准旅行商问题 59

7.1.2 标准旅行商问题的数学模型 59

7.1.3 扩展 TSP 60

7.1.4 TSP 的解法 61

7.2	解旅行商问题的模拟退火算法	62
7.3	解旅行商问题的遗传算法	63
7.4	解旅行商问题的蚁群算法	65
7.5	解旅行商问题的分布估计算法	67
7.6	解旅行商问题的改进分布估计算法	68
7.7	实例分析	69
7.8	本章小结	71
第8章	基于分布估计算法解决集装箱装载问题	72
8.1	集装箱装载问题	72
8.2	启发式规则	74
8.2.1	装载策略	74
8.2.2	空间分割	75
8.2.3	空间合并	76
8.3	分布估计算法解决集装箱装载问题	77
8.3.1	编码处理	77
8.3.2	评价适应度函数	78
8.3.3	建立概率模型	78
8.3.4	算法实现流程	78
8.3.5	算法测试与结果对比	78
8.4	改进分布估计算法解决集装箱装载问题	80
8.4.1	精英种群策略	80
8.4.2	变异操作	80
8.4.3	改进分布估计算法实现流程	80
8.4.4	算法测试与结果对比	81
8.5	本章小结	83
第9章	分布估计算法在文本聚类中的应用	84
9.1	聚类算法	84
9.1.1	划分方法	84
9.1.2	层次方法	85
9.1.3	基于密度的聚类方法	86
9.1.4	基于模型的聚类方法	87
9.1.5	基于网格的聚类方法	88
9.2	文本聚类关键技术	88

9.2.1	文本间距离计算	88
9.2.2	文本的表示模型	89
9.2.3	文本预处理	90
9.3	文本语义相似度计算	93
9.3.1	关于《知网》	93
9.3.2	文本语义相似度的计算	94
9.4	本文的语义相似度计算	95
9.4.1	近义词	95
9.4.2	文本相似度计算	96
9.5	语义相似度基础上的 K-均值聚类算法	96
9.5.1	问题描述	96
9.5.2	算法的实现	96
9.5.3	实验结果比较	97
9.6	基于分布估计算法的文本聚类	99
9.6.1	分布估计算法聚类相关改进	99
9.6.2	分布估计算法在聚类问题中的实现	100
9.6.3	实验结果分析	101
9.7	禁忌搜索算法	102
9.7.1	禁忌搜索算法概述	102
9.7.2	TS 算法的基本思想	103
9.7.3	禁忌搜索算法的流程	104
9.7.4	禁忌搜索算法的特点	106
9.8	分布估计算法和禁忌搜索算法融合聚类	106
9.8.1	聚类算法基本思想	106
9.8.2	聚类算法的实现	107
9.9	系统实现及实验结果分析	110
9.9.1	功能模块设计	110
9.9.2	语料库	112
9.9.3	实验结果分析	112
9.10	本章小结	116
第 10 章	与摸石头过河算法混合的分布估计算法	117
10.1	摸石头过河算法的思想	117
10.2	解连续性优化问题的摸石头过河算法	117
10.2.1	基本摸石头过河算法	117

10.2.2	改进的摸石头过河算法	118
10.2.3	数值仿真与分析	119
10.3	求解最小包围圆问题的“摸石头过河”算法方法	121
10.3.1	引言	121
10.3.2	最小包围圆问题	121
10.3.3	解连最小包围圆问题的摸石头过河算法	122
10.4	解旅行商问题的摸石头过河算法	124
10.4.1	解旅行商问题的摸石头过河算法	124
10.4.2	数值例子	126
10.5	与“摸石头过河”混合的分布估计算法	128
10.5.1	解连续空间优化问题的摸石头过河与 分布估计混合算法	128
10.5.2	数值仿真与分析	129
10.6	本章小节	130
第 11 章	基于分布估计算法的多目标优化	131
11.1	引言	131
11.2	多目标优化问题的数学描述	131
11.3	常用的多目标优化问题的测试函数	132
11.4	求解多目标优化问题的算法	138
11.5	解多目标优化问题的传统算法	138
11.5.1	目标加权法	138
11.5.2	约束法	139
11.5.3	目标规划法	139
11.6	解多目标优化的智能优化算法	139
11.6.1	基于进化算法的多目标优化	139
11.6.2	基于粒子群算法的多目标优化	141
11.6.3	基于人工免疫系统的多目标优化	141
11.7	分布估计算法的多目标优化	142
11.8	解多目标 3-SAT 问题的分布估计算法	144
11.9	展望	145
第 12 章	总结	147
附录 A	解连续性优化问题的改进的正态分布的分布估计算法程序	149

附录 B 背包问题的分布估计算法程序 156

附录 C 解连续优化问题摸石头过河算法程序 158

附录 D 解连续优化问题摸石头过河分布估计混合算法程序 160

参考文献 163

第 1 章 概述

1.1 智能优化算法

优化问题普遍存在于科学研究、工程技术和经济管理等诸多领域,作为求解难解优化问题的优化技术,受到了人们的广泛重视,优化理论与算法的研究是一个同时具有理论意义和应用价值的热点课题。优化技术是一种以数学为基础,用于求解各种工程问题优化的应用技术。作为一个重要的科学分支,它一直受到人们的广泛重视,并在诸多工程领域得到迅速推广和应用,如系统控制、人工智能、模式识别、生产调度、VLSI 技术和计算机工程等。

随着计算机的日益广泛应用,最优化问题的研究不仅成为一种迫切需要,而且有了求解的有力工具。因此,最优化理论和算法迅速发展起来,形成一个新的学科,出现线性规划、整数规划、非线性规划、几何规划、动态规划、随机规划、网络流等许多分支。

传统的优化方法有单纯形法、牛顿法、最速下降法、共轭梯度法、变尺度法、步长加速法、罚函数法、可行方向法、分支界定法、割平面法、椭球算法等。各种方法各有千秋,均能解决某一类问题。

鉴于实际工程问题的复杂性、约束性、非线性、多极小、建模困难等特点,寻求一种适合于大规模并行且具有智能特征的算法已成为有关学科的一个主要研究目标和引人注目的研究方向。20 世纪 80 年代以来,一些新颖的优化算法,如人工神经网络、混沌、遗传、进化规划、模拟退火、禁忌搜索及其混合优化策略等,通过模拟或揭示某些自然现象或过程而得到发展,其思想和内容涉及数学、物理学、生物进化、人工智能、神经科学和统计力学等方面,为解决复杂问题提供了新的思路 and 手段。这些算法独特的优点和机制,引起了国内外学者的广泛重视,掀起了该领域的研究热潮,且在诸多领域得到了成功应用。在优化领域,由于这些算法构造的直观性与自然机理,因而通常被称为智能优化算法(Intelligent Optimization Algorithms),或称现代启发式算法(Modern Heuristic Algorithms)。

1.2 智能优化算法特点及分类

近年来,一类基于生物学、物理学和人工智能的具有全局优化性能、鲁棒性强、通用性强且适于并行处理的现代启发式算法得到了发展。因其具有高效的优化性能、无需问题特殊信息等优点,已广泛用于计算机科学、优化调度、运输问题、组合优化、工程优化设计等领域。

智能优化算法都是从一个(一组)初始解出发,在算法的关键参数的控制下通过邻域函数产生若干邻域解,按接受准则(确定性、概率性或混沌方式)更新当前状态,然后按关键参数修改准则调整关键参数。如此重复上述搜索步骤直到满足算法的收敛准则,最终得到问题的优化结果。

智能优化算法与普通的搜索算法一样都是一种迭代算法,但是,它们也有很大的区别:

(1) 普通搜索算法是以一个解为迭代的初始值,而现代启发式算法是以一组解(种群)为迭代的初始值;

(2) 智能优化算法需要将问题的优化参数进行编码,映射为可进行启发式操作的数据结构,而普通搜索算法不需要此过程;

(3) 普通搜索算法的搜索策略为确定性的,而智能优化算法的搜索策略是结构化和随机化的(概率型);

(4) 智能优化算法仅用到优化的目标函数值的信息,不必用到目标函数的导数信息,而普通搜索算法的大多数算法需要导数信息;

(5) 智能优化算法对问题的数学描述不要求满足可微性、凸性等条件,而普通搜索算法对此有着较严格的要求;

(6) 智能优化算法具有全局优化性能、鲁棒性强、通用性强且适于并行处理的特点,而普通搜索算法不具备这些优点。

通过上述比较可以看出,智能优化算法的适用范围非常广泛,且其算法易于修改,特别适用于大规模的并行计算。

来自于大自然的神奇灵感,催生出许多智能优化算法,各种算法百花齐放、百家争鸣。根据智能优化算法设计所模拟的自然特征,可以大体将其分为三类:

(1) 生态系统模拟算法。生态系统模拟算法包括生物地理学优化方法(Biogeography - Based Optimization, BBO)、入侵性杂草克隆算法(Invasive Weed Colony Optimization, IWCO)、多物种共生进化算法(Multi Species Evolutionary Algorithm, MSE)和模拟退火算法(Simulated Annealing Algorithm, SAA)等。

(2) 群智能优化算法。群智能优化算法包括蚁群优化算法(Ant Colony Optimization, ACO)、粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)、鱼群算

法 (Fish Swarm Algorithm, FSA)、细菌觅食优化算法 (Bacterial Foraging Algorithm, BFA)、萤火虫算法 (Firefly Algorithm, FA)、人工蜂群算法 (Artificial Bee Colony Algorithm, ABC)、随机蛙跳算法 (Shuffled Frog Leaping Algorithm, SFLA)、蝙蝠算法 (Bat Algorithm, BA)、布谷鸟算法 (Cuckoo Search, CS)、人工免疫优化算法 (Artificial Immune System, AIS)、智能水滴算法 (Intelligent Water Drops Algorithm, IWD)、文化优化算法 (Cultural Algorithms, CA) 和摸石头过河优化算法 (Wading Across Stream Algorithm, WAS) 等。

(3) 进化算法。进化算法包括遗传算法 (Genetic Algorithm, GA)、遗传规划 (Genetic Programming, GP)、进化策略 (Evaluative Strategies, ES)、差分进化算法 (Differential Evolution, DE)、混沌优化算法 (Chaotic Optimization Algorithm, COA)、禁忌搜索算法 (Tabu Search, TS)、稻田算法 (Paddy Field Algorithm, PFD)、和声搜索算法 (Harmony Search, HS) 及分布估计算法 (Estimation of Distribution Algorithm, EDA) 等。

智能优化算法在结构、研究内容与研究方法上具有较大的相似性,但其数学基础则不够完善,具体表现是:缺乏普遍适用的算法收敛性理论;缺乏完备的计算搜索效率及时空复杂度理论评价体系;没有建立起完备的算法结构框架;算法的理论基础还不能清楚地解释算法在应用过程中出现的各种问题;算法参数的选择主要还是凭经验选取;对算法操作算子的作用机理及其作用效果的分析仍不充分。同时,由于它们的研究机制和侧重点不同,使得研究成果相当分散。

1.3 典型的优化测试函数

算法的性能比较通常是基于一些 Benchmark 问题展开的,对于函数优化问题来说,常用的算法如下:

1.3.1 无约束优化函数

(1) Sphere Model, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2, |x_i| \leq 100$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(2) Schwefel's Problem 2.22, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \prod_{i=1}^n |x_i|, |x_i| \leq 10$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

4 ■ 分布估计算法及其应用

(3) Schwefel's Problem 1.2, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2, |x_i| \leq 100$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(4) Schwefel's Problem 2.21, 即

$$f(X) = \max_{i=1}^n \{ |x_i| \}, |x_i| \leq 100$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(5) Generalized Rosenbrock's Function, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2], |x_i| \leq 30$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(1, 1, \dots, 1) = 0$$

(6) Step Function, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n (\lfloor x_i + 0.5 \rfloor)^2, |x_i| \leq 100$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(7) Quartic Function i. e. Niose, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n ix_i^4 + \text{random}[0, 1), |x_i| \leq 1.28$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(8) Generalized Schwefel's Problem 2.26, 即

$$f(X) = - \sum_{i=1}^n (x_i \sin(\sqrt{|x_i|})), |x_i| \leq 500$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(420.9687, 420.9687, \dots, 420.9687) = -418.9829n$$

(9) Generalized Rastrigin's Function, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10], |x_i| \leq 5.12$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(10) Ackley's Function, 即

$f(X) = -20\exp(-0.2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2/n}) - \exp(\sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)/n) + 20 + e, |x_i| \leq 32$
其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(11) Generalized Griewank Function, 即

$$f(X) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1, |x_i| \leq 600$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

(12) Generalized Penalized Function, 即

$$f(X) = \frac{\pi}{n} \{10\sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10\sin^2(\pi y_{i+1})] + (y_n - 1)^2\} + \sum_{i=1}^n u(x_i, 10, 100, 4), |x_i| \leq 50$$

其中

$$y_i = 1 + (x_i + 1)/4$$

$$u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m, & x_i > a \\ 0, & -a \leq x_i \leq a \\ k(-x_i - a)^m, & x_i < -a \end{cases}$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(1, 1, \dots, 1) = 0$$

(13) Generalized Penalized Function, 即

$$f(X) = 0.1 \{ \sin^2(3\pi x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] + (x_n - 1)^2 \} + \sum_{i=1}^n u(x_i, 5, 100, 4), |x_i| \leq 50, u(\cdot) \text{ 同上}$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(1, 1, \dots, 1) = 0$$

(14) Shekel's Foxholes Function, 即

$$f(X) = \left[\frac{1}{500} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{j + \sum_{i=1}^2 (x_i - a_{ij})^6} \right]^{-1}, |x_i| \leq 65.56$$

其中

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -32, -16, 0, 16, 32, -32, -16, 0, 16, 32, \\ -32, -32, -32, -32, -32, -16, -16, -16, -16, -16, \\ -32, -16, 0, 16, 32, -32, -16, 0, 16, 32, -32, -16, 0, 16, 32 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 16, 16, 16, 16, 16, 32, 32, 32, 32, 32 \end{pmatrix}$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(-32, -32) \approx 1$$

(15) Kowalik's Function, 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^{11} \left[a_i - \frac{x_1(b_i^2 + b_i x_2)}{b_i^2 + b_i x_3 + x_4} \right]^2, |x_i| \leq 5$$

其中

$$(a_i) = (0.1957, 0.1947, 0.1735, 0.16, 0.0844, 0.0627, 0.0456, \\ 0.0342, 0.0323, 0.0235, 0.0246)$$

$$(1/b_i) = (0.25, 0.5, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) \approx f(0.1928, 0.1928, 0.1231, 0.1358) \approx 0.0003075$$

(16) Six-Hump Camel-Back Function, 即

$$f(X) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + x_1^6/3 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4, |x_i| \leq 5$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0.08983, -0.7126) = f(-0.08983, 0.7126) = -1.0316285$$

(17) Branin Function, 即

$$f(X) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x_1 + 10, -5 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 15$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(-3.142, 12.275) = f(3.142, 2.275) \\ = f(9.425, 2.425) = 0.397887$$

(18) Goldstein-Price Function, 即

$$f(X) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \times \\ [30 + (2x_1 - 3x_2)^2 (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)], |x_i| \leq 2$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, -1) = 3$$

(19) Hartman's Function, 即

$$f(X) = - \sum_{i=1}^4 c_i \exp \left[- \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - p_{ij})^2 \right], 0 \leq x_j \leq 1$$

其中, 当 $n=3$ 时, 有

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3, & 10, & 30 \\ 0.1, & 10, & 35 \\ 3, & 10, & 30 \\ 0.1, & 10, & 35 \end{pmatrix} \\ (c_i) = (1, 1.2, 3, 3.2)$$