大学生数学竞赛复习指导

（上册）

主编 李孟芹 郭风军 朱新河

知识要点小结 梳理主线重点难点

典型题型归纳 分析精解评注例题

考研竞赛真题 稳扎稳打巩固提高

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学生数学竞赛复习指导

（上册）

主　编　李孟芹　郭风军　朱新河
副主编　王海庆　李红军　熊友兵　陈雅颂

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是依据高等学校本科生数学教学大纲及同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)进行编写的。本书下册共包括6章内容:向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。

本书是理工科在校大学生学习高等数学课程很好的辅导书,是报考硕士研究生、参加各类数学竞赛进行强化训练的精品,也是高等数学授课教师有益的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛复习指导. 上册 / 李孟芹,郭风军,朱新河主编. — 天津:天津大学出版社,2015.7
ISBN 978-7-5618-5359-7

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… ②郭… ③朱… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第163137号

出版发行	天津大学出版社
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647
网　　址	publish.tju.edu.cn
印　　刷	天津泰宇印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	13.5
字　　数	337千
版　　次	2015年9月第1版
印　　次	2015年9月第1次
定　　价	29.50元

序

高等数学是大学本科阶段最重要的基础课程.本人在担任天津工业大学教务处处长的十余年时间里,通过对大学生在校期间各门课程学习成绩海量数据进行统计分析,探究学生学习成绩的变化与发展规律,发现数学类课程的学习成绩与大学期间总体学习成绩存在着高度线性相关性.用大一数学课程的学习成绩来预测学生未来的学业成绩,预测哪些学生可以考上研究生,其预测的准确性很高.

数学类课程之所以重要,一方面由于它是很多后继课程的必备基础;另一方面,也是最重要的方面,数学类课程的学习对学生学习能力的培养至关重要.如何学好高等数学是摆在大多数大学新生面前的重要课题.

理论是学习,实践也是学习,而且是更重要的学习.对数学类课程来说,做题就是实践.通过系列典型题目训练,既可以精准把握教材中的概念、定义、定理,认识各个知识点之间的内在联系,加深对基本理论的理解与掌握;又可以了解数学理论在不同领域的灵活应用,掌握各种应用方法与技巧,提高学习兴趣与数学应用能力;还可以在已知与未知的深入分析中,提升寻找解题思路、破解难题的能力.

在高等数学的学习过程中,选择一套适合自己水平且具有针对性的训练与提高教材是非常重要的.我向大家隆重推荐由天津工业大学理学院数学系李孟芹、熊友兵、郭风军、李红军等老师编写的《大学生数学竞赛复习指导》,推荐理由如下.

首先,这几位老师都是天津市教学创新团队的核心成员,长期从事大学数学基础课程的教学,具有丰富的教学实践经验,是历届天津工业大学数学竞赛辅导的教练,个个教学业绩显赫,学生粉丝众多.

其次,教材中的内容和例题、习题,是天津工业大学大学数学教学团队长期教学实践的历史积淀,是团队的集体智慧和成果,具有针对性、典型性、成体系、与时俱进的特点.这里,针对性是指专门针对地方大学广大学生为考研、参加大学生数学竞赛等对高等数学的提高需求;典型性是指通过典型例题解决本科学生在高等数学复习提高过程中存在的共性问题和面临的共同困难;成体系是指将高等数学的教学内容通过典型例题系统展现出来;与时俱进是指把最近研究生考试、大学生数学竞赛题目的发展变化反映出来.

第三，本教材是在历届天津工业大学数学竞赛和考研辅导班讲义基础上补充、修改、提炼而成的. 天津工业大学在历年全国大学生数学竞赛、天津市大学数学竞赛中取得的辉煌成绩，就是本教材实用性和有效性的最好证明.

希望本教材能为大家学习高等数学提供强大助力，衷心祝愿广大学子心想事成！

樊顺厚

2015 年 7 月 20 日

前　言

高等数学是当代大学生必修的一门公共基础课，它不仅有利于提高学生的逻辑思维能力，也是进一步学好其他后续课程的基础. 本书依据高等学校本科生数学教学大纲及同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)进行编写，旨在帮助学生更好地理解和掌握高等数学的基本知识，提高学生的解题能力.

本书每一章都包含该章的基本知识点要求、基本题型与解题思路分析、历年考研和竞赛真题三部分，其中竞赛题包含天津市及个别地区、院校大学生数学竞赛试题和全国大学生数学竞赛初赛、决赛试题. 我们出版此书的目的是帮助大家参加各类大学生数学竞赛以及全国大学生数学竞赛.

阅读本书既可以提高读者的数学思维能力、分析问题和解决问题的能力，又能使读者花费较少的时间和精力，掌握求解各种题型的思路和方法，希望取得事半功倍的效果.

本书是理工科在校大学生学习高等数学课程的很好的辅导书，是报考硕士研究生、参加各类数学竞赛进行强化训练的精品，也是高等数学授课教师有益的教学参考书.

参加本书编写工作的有郭风军(第 1 章)、王海庆(第 2、3 章)、李红军(第 4、5、6 章)、陈雅颂(第 7 章)、李孟芹(第 8 章)、熊友兵(第 9、10 章)、朱新河(第 11、12 章). 全书由李孟芹、郭风军、朱新河统稿.

由于时间仓促，如果大家在做题的过程中发现有错误，请做好记录转交给我们，不胜感激.

编者

2014 年 7 月

目　　录

第 1 章 极限与连续

1.1 基本知识点要求

1)理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2)了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3)理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4)掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5)理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6)掌握极限的性质及四则运算法则.

7)掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量的代换求极限.

9)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10)了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

1.2 基本题型与解题思路分析

题型 1 代数函数、极限运算法则求极限

基本知识

①代数函数求极限主要包括对有理函数用“抓大头”方法求其极限,以及求无理函数的极限;

②极限的运算法则主要指:极限的四则运算法则;无穷小运算法则;复合函数运算法则.

1. 代数函数求极限

代数函数分为有理函数和无理函数(主要指含根式的函数).

(1)求有理函数的极限

$$①\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m;\end{cases}$$

$$②\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, & Q_m(x_0)\neq 0,\\ \infty, & Q_m(x_0)=0,P_n(x_0)\neq 0,\\ \dfrac{0}{0}, & Q_m(x_0)=0,P_n(x_0)=0.\end{cases}$$

对于②中$\frac{0}{0}$型，通过分子分母分解因式，分解出公因子$(x-x_0)$约分后求极限(见例 2).当然对于$\frac{0}{0}$型的求解方法还有洛必达法则(见题型 8 例 47、48).

(2)求无理函数的极限

当分子或分母中含有无理式时(主要指根式)，可如下处理：

①当$x\to\infty$，若为$\frac{\infty}{\infty}$型时，分子分母同时除以x的最高次幂，然后再求极限(见例 3)；

②当$x\to x_0$，若为$\frac{0}{0}$型，将分子分母有理化，提取分子分母的公因子$(x-x_0)$约分后再求极限(见例 6)；

③对于含指数函数的$\frac{\infty}{\infty}$型也可以采用①的思想，分子分母同时除以底数最大的部分(见例 4、5)，当出现$\infty-\infty$型代数式时，我们可以通过通分整理成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型.

例 1 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^4\ (x-1)^6-5x(x^8+x)}{(x+2)^{10}}$.

【分析】 因为此题为$x\to\infty$时的有理函数求极限，将分子分母同时除以x的最高次幂即可.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^4x^{10}+P_9(x)}{x^{10}+Q_9(x)}=16$.

【评注】 利用"抓大头"的思想，因为分子分母最高次幂相同，所以极限只与x的最高次幂项有关，因此我们不用详细写出最高次幂后面的表达式而采用题中$P_9(x)$，$Q_9(x)$的形式即可.

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

【分析】 把每一项都减去 1，然后分解因式，消去分母中的零因子$(x-1)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【评注】 此题难点在于把n分成n个 1 后分解因式.另外需要掌握x^n-1的因式分解公式.此题还可以利用洛必达法则(见题型 8)求极限，计算起来就会相对简单.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{2x+1}$.

【分析】 此题为无理式 $x\to\infty$ 时的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，上下同时除以 x 的最高次幂 x 即可.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1}{2+\dfrac{1}{x}}=0.$

【评注】 此题为 $x\to+\infty$ 的含开偶次方根式的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限. 若 $x\to-\infty$ 时，则有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-x}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-x}{2x+1}=-1.$$

$x\to\infty$ 时极限当然是不存在了，这里一定要注意. 具体 $x\to\infty$ 时极限不存在的理论见题型 6 单侧极限的求解.

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-4)^n}{3^{n+1}+(-4)^{n+1}}$.

【分析】 此题利用指数函数的"抓大头"思想，分子分母同时除以底数最大的指数，利用 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n+1}{3\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n-4}=-\dfrac{1}{4}.$

【评注】 这里要注意，当底数最大的指数的底为大于 0 的数，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$，分子分母同时除以 4^n 或 4^{n+1} 均可以，但当底数最大的指数的底为小于 0 的数时，如本例题我们习惯上选同时除以 $(-4)^n$，这样会避免一些符号上的麻烦.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}$.

【分析】 此题利用指数函数"抓大头"思想，通过观察知道其余部分趋于无穷的速度要远远小于指数函数趋于无穷的速度，我们采用分子分母同时除以指数函数即可.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2x\arctan x}{\mathrm{e}^x}}{1-\dfrac{\pi x}{\mathrm{e}^x}}=1,$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}=1.$$

【评注 1】 此题中需要掌握一些函数趋于无穷大的速度(如指数函数大于幂函数大于对数函数)，这样可以简化计算.

【评注 2】 这里讨论的是 $x\to+\infty$ 的极限，对于此题若 $x\to-\infty$，$x\to\infty$ 时，极限的情况又会发生改变，这是因为 e^x 的极限在 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$ 时会不同，具体情况参见题型 6

的例 37.

2. 利用四则运算法则求极限

例 6 求$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a\geqslant 0)$.

【分析】 此题分子中为含有三项带有根号的表达式，若简单按照分子分母有理化运算会非常复杂. 利用和的四则运算把该题简化为两项和的极限，大大降低了计算的难度.

解 原式
$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$
$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

【评注 1】 极限的四则运算法则成立的前提：①有限次的和、差、积、商运算；②利用 $f(x)\pm g(x)$；$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的四则运算求极限要保证 $\lim f(x)$与 $\lim g(x)$同时存在，且商式中极限 $\lim g(x)\neq 0$.

【评注 2】 ①若 $\lim[f(x)\pm g(x)]$存在，则 $\lim f(x)$与 $\lim g(x)$同时存在或同时不存在，即 $\lim f(x)$存在而 $\lim g(x)$不存在时 $\lim[f(x)\pm g(x)]$是不存在的；②若 $\lim f(x)g(x)$存在，则 $\lim f(x)$与 $\lim g(x)$不一定同时存在，如：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，但$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在；③若 $\lim f(x)g(x)=0$，则不一定有 $\lim f(x)=0$ 或 $\lim g(x)=0$；如 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，$y_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$，而$\lim x_ny_n=0$，但 $\lim x_n$ 与 $\lim y_n$ 都不存在；④若 $\lim f(x)=A\neq 0$，则$\lim f(x)g(x)$与 $\lim g(x)$同时存在或同时不存在.

例 7 求$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

【分析】 因为$\lim\limits_{x\to 1}\tan\dfrac{\pi x}{2}$不存在，所以不可以直接运用乘积的运算法则，但我们可以通过把 $\tan\dfrac{\pi x}{2}$化简整理后再运用.

解法 1

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}.$$

注意这里利用了洛必达法则.

解法 2

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}.$$

【评注】 1)解法 1 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ 运用了洛必达法则(见题型 8)；

2)解法 2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ 运用了等价无穷小代换(见题型 5)，方法更简便.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x\sin^3 x}$.

【分析】 先利用等价无穷小代换把分母简化为 x^4，把分子分解为 $(\tan x-x)(\tan x+x)$，然后运用乘积的运算法则达到简化计算的目的.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-x)(\tan x+x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\right)=2\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

【评注】 如果用洛比达法则求极限的话，需要进行 4 次求导，较复杂. 另外我们需要掌握一些函数无穷小的阶数，如当 $x\to0$ 时，$\tan x-x$，$\sin x-x$ 等都是 x 的 3 阶无穷小. 这样我们就知道该分解为哪两部分乘积的极限.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cot 2x}$.

【分析】 利用商的运算法则，在化简整理后利用等价无穷小代换求极限.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{2}-2x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x}=\frac{1}{2}.$$

3. 无穷小运算法则求极限

基本知识

有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小；无穷小与有界量的乘积仍为无穷小.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-2x+5)(2+\cos x-3\sin x)}{3x^5+2x+3}$.

【分析】 由“抓大头”方法知道，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}$ 的值为 0，剩余部分为有界量，故极限为 0.

解 因为 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}=0,\ \left|2+\cos x-3\sin x\right|\leqslant 6,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-2x+5)(2+\cos x-3\sin x)}{3x^5+2x+3}=0.$$

【评注】 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小，但商不一定是无穷小. 无限个无穷小的积不一定是无穷小.

4. 复合函数运算法则

基本知识

①设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，在 x_0 的去心邻域内，$g(x)\neq a$，若 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to a}f(u)=A. \qquad (*)$$

特别地，若 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，即 $f(u)$ 在 $u=a$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(a). \qquad (**)$$

【注 1】 $(*)$式表明，在所给条件下求极限时可做变量替换，令 $u=g(x)$，则求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$ 转化为 $\lim\limits_{u\to a}f(u)$；$(**)$式表明，在所给连续条件下函数符号“f”与极限符号“$\lim\limits_{x\to x_0}$”可以交换次序(见例 11).

【注 2】 上面的条件在 x_0 的去心邻域内，$g(x)\neq a$ 是不可以丢掉的.

如 $$g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\qquad f(u)=\begin{cases}2u^2+3, & u\neq 0,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

取 $x_0=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$，故 $a=0$，因此在 $x_0=0$ 的去心邻域内，不满足上面的 $g(x)\neq a=0$ 条件. 而

$$\lim_{u\to 0}f(u)=\lim_{u\to 0}(2u^2+3)=3,\ f(g(x))=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 5, & x=0,\end{cases}$$

所以 $$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{x\to 0}f(g(x))=0\neq\lim_{u\to 0}f(u)=3.$$

结论不成立.

②设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，在 x_0 的去心邻域内，$g(x)\neq a$，若 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=\infty$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to a}f(u)=\infty.$$

如 $f(g(x))=\ln|\sin x|$，$g(x)=\sin x$，$f(u)=\ln|u|$. 因为

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{u\to 0}\ln|u|=-\infty,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\ln|\sin x|=\lim_{u\to 0}\ln|u|=-\infty.$$

③设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，在 x_0 的去心邻域内，$g(x)\neq a$，若 $\lim\limits_{u\to a}f(u)$ 不存在(∞除外)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$ 未必不存在. 如 $\lim\limits_{u\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}$ 不存在(见题型 6). 令 $u=g(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$ 存在.

【评注】 这里的 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$ 中 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$ 也成立，a 也可以为∞.

例 11　求$\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(6x^4+x^2+1)-\ln(3x^4-2x^3+3x)]$.

【分析】　该题属于"$\infty-\infty$"型未定式，利用对数的运算性质和极限的复合函数运算法则整理求极限.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{6x^4+x^2+1}{3x^4-2x^3+3x}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+x^2+1}{3x^4-2x^3+3x}=\ln 2$.

题型 2　夹逼准则求极限

基本知识

夹逼定理：①设存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $\varphi(n)\leqslant f(n)\leqslant\psi(n)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$；②设在 x_0 的某一邻域内，恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$,，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

解题思路

①一般地，这类极限都是处理多项和、乘积的具体表达式不容易写出时的极限. 此时可以考虑用夹逼准则. 一般是找出表达式中的最大、最小项放缩来求极限(见例 12、例 13).

②对于通项是连乘的数列极限，若不能化简，可采用夹逼准则(见例 14).

③对于几项或多项和开 n 次方的极限考虑找取最大项利用夹逼准则(例 15、例 16).

例 12　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\dfrac{\sqrt[n]{n+n}}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$.

【分析】　多项和式的极限，和式没有办法具体写出，此时考虑夹逼准则.

解　因为 $\dfrac{n\cdot\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\dfrac{\sqrt[n]{n+n}}{\sqrt{n^2+2n}}=I_n\leqslant\dfrac{n\cdot\sqrt[n]{n+n}}{\sqrt{n^2+2}}$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[n]{n+n}}{\sqrt{n^2+2}}=1,$$

所以原式极限为 1.

例 13　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2-n+1}+\dfrac{2}{n^2-n+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2-n+n}\right)$.

解　设 $x_n=\dfrac{1}{n^2-n+1}+\dfrac{2}{n^2-n+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2-n+n}$，则

$$\frac{1}{n^2-n+n}+\frac{2}{n^2-n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{2}{n^2-n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+1},$$

即
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2-n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2-n+1},\quad\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+n)}\leqslant x_n\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+1)},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+1)}=\frac{1}{2},$$

由夹逼准则得
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

例 14 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

【分析】 对于连乘的这种形式,考虑放缩运用夹逼准则.

解 令 $x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ (*),因为$\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2n}{2n+1}$,所以 $x_n<\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (* *),由(*)×(* *)得 $x_n^2\leqslant\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)\cdot!!}=\dfrac{1}{2n+1}$,所以 $0\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\quad(n\to\infty)$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$.

【评注】 和式的放缩要保证放缩后左右两侧的极限存在并相等.

例 15 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 因为
$$3^n\leqslant 1+2^n+3^n\leqslant 3\cdot 3^n,$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=3,$$
所以由夹逼准则得
$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$$

例 16 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}\ (a_i>0)$.

解 假设 a_i 为所有 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中最大的数,则
$$a_i^n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant ma_i^n,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_i^n}=a_i,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a_i^n}=a_i,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\},(a_i>0).$$

【评注 1】 此题可以作为例 15 的推广. 该题在求极限的过程中用到了一个比较重要的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;而且此题在题型 13 中关于与极限有关的函数题型部分也有应用.

【评注 2】 这类题型总是找底数最大的数,因此也可以把这类题型看成是夹逼准则的“抓大头”.

题型 3 单调有界定理求极限

基本知识

如果一个数列单调有界,则该数列存在极限. 往往证明时只要证明数列满足单调递增有上界或单调递减有下界.

解题思路

此方法适用于由递推关系给出的数列的极限,或数列具有递推关系 ,本身不具有单调性但其奇、偶子列具有单调性的数列,然后利用单侧极限存在定理证明极限存在(见例 20).

(1)极限的存在性

①证明单调性. 可以采用做差,做比,或作辅助函数利用后面的导数性质证明其单调性.

②说明数列有界. 往往利用均值不等式,或给出的递推公式整理得出数列有界.

【注】 对于一部分题型必须先找到数列的界,然后利用数列的界证明数列的单调性(见