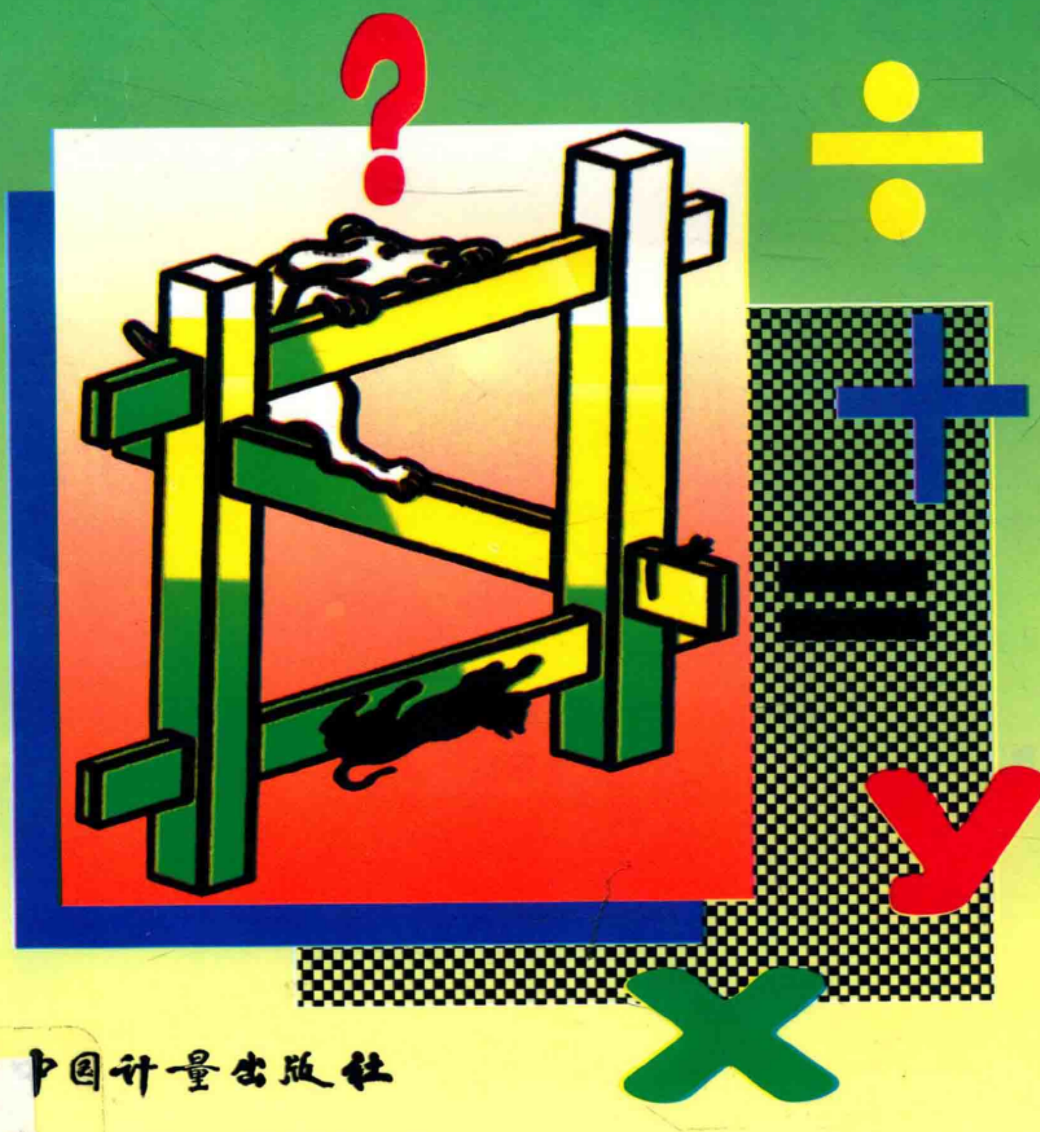
似对非对——中学数学错解分析

张鸿顺　编著



中国计量出版社

似 对 非 对

——中学数学错解分析

张鸿顺 著

中 国 计 量 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

似对非对：中学数学错解分析/张鸿顺著．—北京：中国计量出版社，1998
ISBN 7-5026-1041-3

Ⅰ．似… Ⅱ．张… Ⅲ．数学课-中学-解题 Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 00488 号

内 容 提 要

本书作者积几十年数学教学之经验，深刻体会到学习数学不能靠题海战术，而应了解其本质，学会分析问题、解决问题的方法，提高解题能力。

本书共分数与式、方程、函数、几何、不等式和充要条件六个部分。先给出似对非对的解法，然后再进行多方面的分析，找出错误的关键，最后给出正确的解答方法，意在使读者在辨别对错的过程中提高数学水平。

本书实用性强，在强调素质教育的今天更有深远的意义。很适合中学生课外阅读；教师也可在教学中参考使用，以提高教学质量；广大数学爱好者也可通过此书培养对数学的兴趣，提高数学水平。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码 100013
北京市迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
787×1092 毫米 16 开本 印张 6 字数 140 千字
1998 年 1 月第 1 版 1998 年 1 月第 1 次印刷
*
印数 1—5 000 **定价**：8.00 元

前　言

十几年来，很多人向我询问了一些问题，积累起来有百余个。当然，这些问题不是一眼就能识破的比较容易的问题，但是其中绝大部分也不是难得无从下手的问题，而是在解答之后验证不对又找不出错误来自何处，或是得出多种答案而不知何对何错，或是自认为解答正确，其实是错解了的问题。这些问题有的来自他们的教与学的实践，有的是他们在阅读书、报、教参以及在解答试题中发现的。其中有些问题确实很难辨别出对或错。我也曾在教师班讲学中用过其中的一些问题进行研讨，他们反映解之容易做对了难，而且有的难度还不小，特别是不易说清楚犯错误的原因，但是都认为问题很好，并建议我再写这方面的书，供中学生课外阅读，可使他们进一步明确学习数学应注意些什么以及怎样学数学，远比看一些题海战术的题解强。教师也可在教学中参考使用，肯定有助于提高教学效果，也有助于提高师生的数学水平。

为此，我从中选了大部分问题，并从我过去写的《错在哪里》中选出部分较好的或未说透的问题作为补充，编成这本书，希望读者在辨对错的过程中提高自己的数学水平。

本书共列六章：数与式、方程、函数、几何、不等式、充要条件，每章各有若干节。这里要说明几点：其一，各章节与教材中的章节不同，不是系统地完整地讲授各章的知识，只是便于问题的归属而列出章节。正因如此，各章所包含的内容较广，如方程中也有三角方程、对数方程等等。再如几何中也有立体、解析几何等等。其二是每一个问题可能是由多方面的错误而造成的，只好以其主要错误或更不容易发现的错误来归属于各章节，如极值问题，一般属函数一章，但也可能是在不等式或充要条件方面犯了主要错误，因而也就未归属函数一章，参数范围问题也是如此。这样处理，由于对问题把握得不一定那么准确，因此也不一定恰当，但是列出章节总比无章节要好一些，便于查阅，有一定方便之处。

本书写法是给出对错难辨的解法，然后再进行分析，希望读者先自行辨别，再进行核实，这样更有益于提高水平。另外，为了便于广大读者阅读，这里一方面只用初等数学方法解题与分析，另一方面解的过程写的较细，一般不跳步。

限于水平，有不妥之处，欢迎指正。

作　者

1997.8.5

目　录

1 数与式

1.1 否定三歧性

有人认为在 a, b 两实数之间，不一定存在三歧性（即 $a>b$; $a=b$; $a<b$ 三种关系中必存在一种，而且只存在一种），他说 $a>b$ 成立，$a=b$ 也就成立，并给出了如下的证明：

设 $a>b$，则有 $\quad a=b+c(c>0)$

两边同乘以 $a-b$，得 $\quad a(a-b)=(b+c)(a-b)$

即 $\quad a^2-ab=ab-b^2+ac-bc$

移项 $\quad a^2-ab-ac=ab-b^2-bc$

提因式 $\quad a(a-b-c)=b(a-b-c) \qquad (1)$

两边同除以 $a-b-c$，得

$$a=b \qquad (2)$$

不难发现这个证明的最后一步根据不足，只有当 $a-b-c\neq0$ 时才能由（1）式得（2）式，事实上，由 $a=b+c$ 可知 $a-b-c=0$，所以由（1）式推不出（2）式，他所犯的错误就是用 0 去除等式两边了。

除数不得为零，是一个概念问题，要明白为什么零不能做除数，但不要死记，否则一遇稍隐蔽一点的问题时，就会犯错误。尽管道理很简单，但是尚有不少学生说不清楚，为此，这里略加说明。我们知道被除数＝除数×商，如果除数是零，则被除数只能是零，而被除数也为零时，商不定，可为任意数。这就与运算结果的唯一性相矛盾，所以除数不能为零。

为了使学生进一步了解这个概念的重要性，同时也为进一步激发学生学习数学的兴趣，不妨再给出一些错例，让他们分辨。

例 1：已知 $a>0$，$b>0$，且 $a=b$，则可推得 $a=0$ 的矛盾，证法如下：

因为 $\quad a=b$

两边同乘以 $a(a>0)$，得 $\quad a^2=ab$

两边同时加上 b^2-2ab，得 $\quad a^2-2ab+b^2=b^2-ab$

因式分解 $\quad (b-a)^2=b(b-a)$

两边同除以 $b-a$，得 $\quad b-a=b$

所以 $\quad a=0$

例 2：由上题的已知条件，还可推出 $3=2$ 的矛盾，推法如下：

因为 $\quad a=b$

两边同时乘以 a^2，得 $\quad a^3=a^2b$

两边同时加上 $-b^3$，得 $\quad a^3-b^3=a^2b-b^3$

因式分解，得 $\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=b(a+b)(a-b)$

两边同除以 $a-b$，得 $\quad a^2+ab+b^2=b(a+b)$

以 a 换 b($\because a=b$),得 $$3a^2=2a^2$$
而 $a^2>0$,除以 a^2,得 $$3=2$$

由于概念没有很好掌握而出现荒谬结论的例子，不胜枚举。

1.2 由等推不等

其推法如下：

因为 $$25-45=-20,\quad 16-36=-20$$

所以 $$25-45=16-36$$

两边同时加上 $\frac{81}{4}$，得

$$25-45+\frac{81}{4}=16-36+\frac{81}{4}$$

即 $$5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

两边均符合完全平方公式，即

$$\left(5-\frac{9}{2}\right)^2=\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$$

开方，得 $$5-\frac{9}{2}=4-\frac{9}{2}$$

于是得 $$5=4$$

他所犯的错误，一般都能发现。但是这里牵涉到有关开方的一些概念问题，有些学生对于下面的结论，记得很熟，即

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$；

当 $a=0$ 时，$\sqrt{a^2}=0$；

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$。

问他为什么会有这样的结论，往往说不清楚。

首先要明确在实数范围内，负数不能开平方，即二次根底数不能为负，否则无意义，这是因为开方是乘方的逆运算，任何实数的平方都不会是负数之故。但是对于奇次方根来说，根底数可以是负数，如 $\sqrt[3]{a}$，a 可正，可负，也可为零。其次是开平方的结果是什么？这又牵涉到算术根的概念，因为 $\pm a$ 的平方都得 a^2，按着平方根的定义，a^2 的平方根应得 $\pm a$，即两个值，这与运算的唯一性不符，因此产生了算术根的概念，取其中非负的根为算术根，并规定 $\sqrt{a^2}$ 为算术根，即 $\sqrt{a^2}\geqslant0$，于是才有 $a\geqslant0$ 时算术根 $\sqrt{a^2}$ 取 a；$a<0$ 时算术根 $\sqrt{a^2}$ 取 $-a$（这时 $-a>0$）。

因此，在上述问题中，当 $\left(5-\frac{9}{2}\right)^2=\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$ 两边开平方时，左右均应取算术根，即

$$\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2}=5-\frac{9}{2}$$

而 $4-\frac{9}{2}<0$， $$\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=-\left(4-\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{2}-4$$

这样，应得 $5-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}-4$，即 $9=9$

不会出现 $5=4$ 荒谬的结论。

在实数范围内，有关负数不能开偶次方以及取算术根的问题，稍不注意就会导至错误，这里再一次提醒大家，今后我们还会遇到这类问题的。

1.3 理想的化简结果

有这样一个问题：化简

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-2\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2-b^2}}$$

有人发现在第一项根底式的分子与分母分别乘以 $a-b$，在第二项根底式的分子与分母分别乘以 $a+b$，第三项根底式通分，将得到相同的分母 $\sqrt{a^2-b^2}$。于是，他的做法如下：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}}+\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}-2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\\&=\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&=0\end{aligned}$$

见到这样比较理想的化简结果，甚是高兴，而不加思索地认为解答正确，实际上他又犯了 1.2 中所提出的错误。

这是一道比较复杂的问题，一定要考虑周到。有人认为根底式有 a^2-b^2，它必须为正，即 $a^2-b^2>0$，从而 $a-b>0$，$a+b>0$，$\sqrt{(a-b)^2}=a-b$，$\sqrt{(a+b)^2}=a+b$，因此，化简结果为零是正确的。

其实，由 $a-b>0$ 可得 $a^2-b^2>0$，但是由 $a^2-b^2>0$ 不一定有 $a-b>0$。当 $a-b<0$ 且 $a+b<0$ 时，也有 $a^2-b^2>0$。

又有人这样考虑，$a-b$ 与 $a+b$ 必须同号（同正或同负），原式才有意义，于是他的解法是：

当 $a-b>0$，$a+b>0$ 时，原式化简的结果为零（见前）；

当 $a-b<0$，$a+b<0$ 时，

$$\begin{aligned}原式&=\frac{b-a}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{-(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&=\frac{-4a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{-4a}{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}\end{aligned}$$

不妨令 $a=-3$，$b=1$ 来检验一下，这时 $a-b=-3-1<0$，$a+b=-3+1<0$ 符合条件。

$$\begin{aligned}原式之值&=\sqrt{\frac{-4}{-2}}+\sqrt{\frac{-2}{-4}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0\end{aligned}$$

$$化简结果的值=\frac{12}{8}\cdot\sqrt{8}=3\sqrt{2}$$

显然，他的答案不正确。

他仍旧犯了算术根方面的错误，为什么 $\sqrt{4a^2}=2a$，根据是什么？当 $a<0$ 时，$\sqrt{4a^2}=-2a$，说明他在处理算术根的问题尚有考虑不周之处。

综上所述，此题正确解答是：

当 $a>0$，$a-b>0$，$a+b>0$ 时，原式 $=0$；

当 $a>0$，$a-b<0$，$a+b<0$ 时，原式 $=\dfrac{-4a}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$；

当 $a<0$，$a-b>0$，$a+b>0$ 时，原式 $=\dfrac{4a}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$；

当 $a<0$，$a-b<0$，$a+b<0$ 时，原式 $=0$。

1.4 相反数相等

甲说他能证明 10 与 -10 相等，其证法如下：

$$\begin{aligned}10&=\sqrt{100}\\&=\sqrt{(-4)\times(-25)}\\&=\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}\\&=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{25}\times\sqrt{-1}\\&=2\times5\times(\sqrt{-1})^2=-10\end{aligned}$$

乙说这个证法不对，由 $\sqrt{(-4)\times(-25)}$ 不能得出 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}$，因为 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 这个公式中的 a，b 必须为非负数。甲说不对，当数扩充到复数范围之后，根底数是负数也有意义了，因此 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 这个公式中的 a，b 可以是负数了，不然的话 $\sqrt{-4}$ 为什么等于 $2i$，还不是由 $\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$ 得来的，乙也分辨不清了。

这里反映出他们有两个问题不清，其一是当数扩充到复数范围之后，$a>0$ 时 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 这是规定或者说是定义，而不是由 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$ 得来的，其二是公式 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是实数范围内的公式，a，b 必须非负，否则不仅会出现 $10=-10$，而是任何相反数都相等的荒谬结论，如

$a>0$ 时，有 $a=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot(\sqrt{-1})^2=-a$

$a<0$ 时，有 $a=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a\ (-a>0)$

上述几个问题提醒我们注意几点：(1) 对于每一个概念必须透彻掌握，不论它在问题中是如何乔装打扮出现的，也能一眼识破；(2) 必须重视每个公式成立的条件，这些条件是缺一不可的，否则难免出错误；(3) 当数的范围扩充之后，必须明确原有的性质、公式，哪些仍旧成立而哪些不成立了，如在自然数范围内，被减数必须大于减数，否则不能做减法，当扩充到整数范围，就没有这个限制了。又如在整数范围内可以提几个连续的整数，但是在有理数范围内就不能提了，因为不存在连续的有理数。再如在实数范围内可以比较两实数的大小，而在复数范围内就不能比较了。这样的例子还有许多。

这里顺便提一下往往被忽略的问题，即一元二次方程的求根公式，它是在实数范围内研究推得的，当数扩充到复数时，求根公式是否仍旧成立，是需要给以证明的，尽管证明比较

简单，但一定要给出，否则会给学生造成一种错觉，即旧的仍可使用。遗憾的是多数教材却忽略了这一点。

1.5 奇数能被偶数整除

有人推出了 $2|5$（各书整除号用法不同，这里指 2 能整除 5）、$4|19$，…等错误结论，他的推证如下：

设 x^n-a^n 是实数域中的二项式，且 $a\neq 0$，n 是自然数。

令 $y=\frac{x}{a}$，则有 $x=ay$，于是

$$x^n-a^n=(ay)^n-a^n=a^n(y^n-1) \quad (1)$$

而

$$x-a=ay-a=a(y-1) \quad (2)$$

(2) $\times a^{n-1}$，得

$$a^{n-1}(x-a)=a^n(y-1) \quad (3)$$

比较 (1)，(3) 两式，右端有 $a^n(y-1)\,|a^n(y^n-1)$，

所以左端应有 $a^{n-1}(x-a)\,|x^n-a^n$

取 $a=2, x=3, n=2$ 时

$$x^n-a^n=3^2-2^2=5,\quad 而\ a^{n-1}(x-a)=2, 得\ 2|5;$$

取 $a=2, x=3, n=3$ 时

$$x^n-a^n=3^3-2^3=19, 而\ a^{n-1}(x-a)=2^2\cdot 1=4, 得\ 4|19;$$

……

为什么会得出这么多的荒谬结论呢？

这里反映了几个概念问题。

①数的整除与式的整除是两个概念，对于两个整数 a，b 来说如果存在整数 c，使得 $a=bc$，就说 b 整除 a，记做 $b|a$，而 $g(x)|f(x)$[这里 $f(x)$，$g(x)$ 均为多项式]表示存在多项式 $p(x)$，使得 $f(x)=g(x)\cdot p(x)$，这里的 $f(x)$，$g(x)$，$p(x)$ 不一定是整数。如

$$f(x)=x^2-1, g(x)=x+1$$

因为存在 $p(x)=x-1$，使得

$$f(x)=g(x)\cdot p(x)$$

所以

$$g(x)|f(x)$$

但是当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\frac{3}{4}$，$g(x)=\frac{3}{2}$，不能说 $\frac{3}{2}\Big|-\frac{3}{4}$。

②多项式的各项系数可以不是整数，如

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-1, g(x)=\frac{1}{2}x+1$$

因为存在 $p(x)=\frac{1}{2}x-1$，使 $f(x)=g(x)\cdot p(x)$，

所以说 $\left(\frac{1}{2}x+1\right)\Big|\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)$，即 $g(x)|f(x)$，

但 $f(3)=\frac{5}{4}$，$g(3)=\frac{3}{2}$，而不能说 $g(3)|f(3)$。

③如果 $f(a)$，$g(a)$ 都是整数由 $f(a)=g(a)\cdot p(a)$，并不能保证 $p(a)$ 也是整数。如 $f(a)$

$=7, g(a)=3, 7=3\cdot p(a)$，所以 $p(a)=\frac{7}{3}$ 不是整数。当然，当 $p(a)$ 也是整数时，符合整除定义，可以说 $g(a)\mid f(a)$。

他取 $a=2$，$x=3$，$n=2$，

这时
$$f(x)=x^2-4, g(x)=2(x-2),$$
可知
$$p(x)=\frac{1}{2}(x+2), p(3)=\frac{5}{2},$$
所以
$$g(3)\nmid f(3)$$

由此可知，$a=2$，$n=2$ 时，只要 x 取奇数，$p(x)$ 就不是整数，都会得出荒谬的结论。

1.6 答案不仅少 1

有一竞赛题：问在 1，2，…，1 995 这些自然数中，有多少个数，它们之中任意两数之和都是 14 的倍数？

参加竞赛的同学们都是数学优秀生，很快就得出了下面的解法：

这些数如果都是 14 的倍数，那么任意两数之和也一定是 14 的倍数，因此问题就转为在 1，2，3，…，1 995 这些自然数中，有多少个 14 的倍数，因为

$$1\,995\div 14=142\text{ 余 }7$$

所以所求答案为 142 个，即 14，28，42，…，1 988。

这个答案是错的。

由于余数为 7，有的同学就考虑是否都是 7 的倍数就可以了，这样的话，答案将增加不少。但是都是 7 的倍数不能满足任取两数之和都是 14 的倍数这个要求，如 7 与 14 都是 7 的倍数，但它们之和为 21 不是 14 的倍数，于是仍认为上述答案正确。

其实，他对问题考虑得还不够细致。由于 $14=2\times 7$，而两奇数之和必是偶数，所以在所考虑的数中或者都是 7 的偶数倍的数，或者都是 7 的奇数倍的数，那么任取两个数，它们之和就是 14 的倍数了。于是问题转为前 1995 个自然数之中会有多少个 7 的奇数倍的数。

因为
$$1\,995\div 7=285$$
所以在 1，2，…，1995 中共有 285 个 7 的倍数，其中 7 的奇数倍数与 7 的偶数倍数应各占一半或前者多一个。$285\div 2=142$ 余 1。所以有 142 个 7 的偶数倍数的数，而有 143 个 7 的奇数倍数的数。因此，所求的答案是 143 个，即 7，21，35，…，1 995。

两种答案虽然只差 1，但是所选的数是完全不同的，这一点绝不能忽视，否则仍会犯错误。如把原题增加 7 个数，改为在 1，2，3，…，1 995，…，2 002 这些数中，有多少个数，任选两个之和都是 14 的倍数，并简写出这些数。

如果按第一种方法考虑，得 $2\,002\div 14=143$，而按第二种方法考虑，得 $2\,002\div 7=286$（个）其中 7 的奇数倍数的数为 $286\div 2=143$ 个，两种做法，答案一致，都是 143 个，似乎答案唯一了，其实不然，答案是 143 个，但是是两组数：取 14 的倍数时（或 7 的偶数倍时）为

14，28，42，…，2 002 共 143 个，简写为 $14k$（$k=1, 2, 3, \cdots, 143$）；

取 7 的奇数倍时为

7，21，35，…，1 995 共 143 个，简写为 $7m$（$m=1, 3, 5, \cdots, 285$）。

这两组数显然是不同的，其中任一组中任取两数之和都是 14 的倍数，都符合题目的要求，就个数来说是 143 个，但绝不允许丢掉任何一组。

1.7 刊物中的错解

某书刊上有这样一个问题，现抄录如下：

已知：p，q 为互质的自然数，且

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1\,319}-\frac{1}{1\,320}$$

求证：1 981 整除 p（即 $1\,981|p$）。

证：在$\frac{p}{q}$上加上

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1\,320}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1\,320}\right)$$

其值不变，于是有

$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,320}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1\,320}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1\,320}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{660}\right)$$

$$=\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+\cdots+\frac{1}{1\,319}+\frac{1}{1\,320}$$

$$=\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1\,320}\right)+\left(\frac{1}{662}+\frac{1}{1\,319}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{990}+\frac{1}{991}\right)$$

$$=\frac{1\,981}{661\times 1\,320}+\frac{1\,981}{662\times 1\,319}+\cdots+\frac{1\,981}{990\times 991}$$

$$=1\,981\left(\frac{1}{661\times 1\,320}+\frac{1}{662\times 1\,319}+\cdots+\frac{1}{990\times 991}\right) \tag{1}$$

由此可知 1 981 是分子的一个因数，所以 $1\,981|p$。

这个结论是有问题的，由（1）式怎知 $1\,981|p$？我们举一个反例：$\frac{4}{5}=3\left(\frac{1}{1\times 6}+\frac{1}{2\times 5}\right)$，这里（4，5）=1，右边括号中是若干个分子为 1 的和，且分母都是两数之积，第一个因数逐次加 1，第二因数逐次减 1，符合（1）式的形式，但 $3\nmid 4$。可见其所得结论是无根据的。

假设他是如下考虑的，即（1）式右边的括弧为一分数，设其为$\frac{s}{t}$（s，t 互质），于是有

$$\frac{p}{q}=1\,981\cdot\frac{s}{t}$$

从而有

$$pt=1\,981\cdot sq \tag{2}$$

这时也不能说 $1\,981|p$，随便举一反例就可说明这点。如当 $p=5$，$q=21$，有 $(p,q)=(5,21)=1$，$t=63$，$s=5$，有 $(t,s)=(63,5)=1$，这时 $pt=315$，$sq=105$，显然有 $pt=3\cdot sq$，但 $3\nmid 5$ 即 $3\nmid p$。

由（2）式要想得出 $p|1\,981$，必须具备 $(1\,981,t)=1$。这是有整除定理做为依据的，即当 $a|bc$，且 $(a,b)=1$ 则 $a|c$。由（2）式可知 $1\,981|pt$，所以只要 $(1\,981,t)=1$ 就可断定 $1\,981|p$。于是有人就把问题转为证明 1 981 与 t 是否互质的问题了，如果互质就可以肯定

$1\ 981|p$，如果不互质就说明 $1\ 981\nmid p$，他的证明这里就不写出了，因为他所引用的整除定理 $a|bc$ 且 $(a,\ b)=1$，则 $a|c$，但定理并没有说 $(a,\ b)\neq 1$ 时 $a\nmid c$。事实上，$a=2$，$b=2$，$c=4$ 时 $a|bc$，$(a,\ b)\neq 1$ 但 $a|c$。

所以当 $(1\ 981,\ t)=1$ 时，可推出 $1\ 981|p$，但当 $(1\ 981,\ t)\neq 1$ 不能断定 $1\ 981\nmid p$。

下面我们给出 $1\ 981\nmid p$ 的证明。

还是从 (1) 式入手，因为 $1\ 981=283\times 7$ 且 283 与 7 都是质数。看看 (1) 式括弧中的各项有哪些项分母中含有 283 的因数，把它与其他各项分开。由于 $283\times 2=566$ 小于第一项中分母的最小因数 661，而 $283\times 5=1\ 415$ 大于最末一项中分母最大的因数 1 320，所以分母中含有 $283\times 3=849$ 或 $283\times 4=1\ 132$ 的项，其分母含有 283 的因数，而符这个条件的恰是一项为 $\dfrac{1}{849\times 1\ 132}$，于是我们把 (1) 式写成

$$\frac{p}{q}=1\ 981\times\left[\frac{1}{849\times 1\ 132}+\left(\frac{1}{661\times 1\ 320}+\cdots+\frac{1}{848\times 1\ 133}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{850\times 1\ 133}+\cdots+\frac{1}{990\times 991}\right)\right] \tag{2}$$

假设 (2) 式中的小括弧中各项之和为既约分数 $\dfrac{m}{n}$（如不既约可约分为既约），就有

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=1\ 981\times\left(\frac{1}{283\times 3\times 283\times 4}+\frac{m}{n}\right)\\&=283\times 7\times\frac{n+283^2\times 12m}{283^2\times 12\times n}\\&=\frac{7(n+12\times 283^2m)}{283\times 12\times n}\end{aligned} \tag{3}$$

由于 n 中不含质因数 283（由 n 的假设可知），而且 $(283,\ 7)=1$，所以 $283\nmid 7n$ 而 $283|12\times 283^2m$，所以 $283\nmid 7\ (n+12\times 283^2m)$。

于是可知
$$1\ 981\nmid 7(n+12\times 283^2m) \tag{4}$$

在 (3) 式中，如果右端是既约分数，就有
$$p=7(n+12\times 283^2m)$$

由 (4) 可知 $\quad 1\ 981\nmid p$

在 (3) 式中，如果右端不是既约分数，可设其最大公因数为 r，分子分母约去 r 时为既约分数，即 $\dfrac{p}{q}$，从而有 $p\cdot r=7(n+12\times 283^2m)$

但 $1\ 981\nmid 7(n+12\times 283^2m)$，

所以仍有 $1\ 981\nmid p$，[否则 $1\ 981|7\ (n+12\times 283^2m)$]。

而原题要求证明 $1\ 981|p$，这是不可能的，所以原题是一个错误的命题。

1.8 推出了 $A=A+1$

有人推证出 $A=A+1$，他的证法如下：

设
$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

把第 i 项的分子与分母分别乘以 i，其值不变，于是有

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots$$

$$\begin{aligned}=&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\\&+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\\&+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\\&+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\end{aligned}\tag{1}$$

由 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，(1) 式可变为

$$\begin{aligned}A=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\end{aligned}\tag{2}$$

(2) 式各行去括号之后，正负抵消，每一行只留下了第一括号中的第一个数，于是有

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\tag{3}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=1+A$$

显然，$A=1+A$ 这个结论是错误的，那么错在何处？整个证明的过程似乎没有什么问题，其实不然，他犯了一个严重的概念错误。

他所设的 A 是一个无限个数的和，这就必须在无限范围内来研究它，是一个有关无限的问题。无限与有限不同，一些在有限范围内成立的结论，在无限范围内是否成立就不一定了，千万不能照搬。譬如全体大于部分，这是在有限范围内成立的结论，而在无限范围内就不成立了。如果问所有的整数与所有的偶数哪个多？很容易不加思索的回答，当然整数多，因为起码要多出所有的奇数。这只能说明他的思想还是停留在有限范围而没有转变。其实所有的整数与所有的偶数一样多。下面我们就证明这一点。设 M 是整数集合，N 是偶数集合，在 M 到 N 建立一个一一对应法则 $f: t\leftrightarrow 2t$，$t\in M$，$2t\in N$。于是在 M 中任一个整数 t，则在 N 中必有唯一的偶数 $2t$ 与之对应，说明 N 中元素的个数不比 M 中元素个数少；反之在 N 中任一个偶数 $2s$，则在 M 中必有唯一的整数 s 与之对应，说明 M 中元素的个数不比 N 中元素个数少，所以 M 与 N 中的元素个数一样多。

再看一例，在有限范围内

$$1-1+1-1+1-1+\cdots+1$$

这个代数和为 1，因为原式 $=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+1$ 之故。同样可知 $1-1+1-1+1-1+\cdots-1$ 这个代数和为零。但是在无限范围内 $1-1+1-1+1-\cdots$ 就不知这个代数和是多少了。如果学了极限，就知道这个代数和的极限是不存在的。这就进一步说明在无限

范围内，不能不加思索的引用有限范围内的结论。

$A=A+1$ 的推证错误，就是把在有限中的结论想当然地用于无限了。由（2）式怎能得到（3）式？怎知（2）式各行

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots=1$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots=\frac{1}{2}$$

……

实际上（2）式各行都是无穷个数的代数和，而且都不定，即极限不存，因此，由（2）式推不出（3）式，从而得不出 $A=1+A$ 荒谬的结论。

建立无限的观念不是容易的事，但是没有无限观念，就易于用有限观念来处理无限问题。如有不少学生（包括各国的学生）对 $0.\dot{9}=1$ 不太相信，他们总认为“$0.\dot{9}$不能真正等于 1，而是约等于 1，不论在小数点后边连续出现多少个 9，也不能等于 1，总还是差一点”。认为 9 的个数出现的越多，就越接近 1，或说与 1 的误差越小，但总还是不到 1，所以认为是约等于 1。这说明他们还没有建立无限的观念，因此分不清无限与有限，事实上在小数点后边连续出现多少个 9，只要一停就是有限小数，而不是无限小数 $0.\dot{9}$了。

1.9 猜想的结论

课堂上教师提出了如下的问题：

由
$$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=25=5^2;$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=121=11^2;$$
$$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=361=19^2;$$
……

能否猜出四个连续自然数的积与 1 之和的结果是什么？

学生非常活跃，并步步深入地回答如下：

①是一个数的完全平方；

②是一个奇数的完全平方；

③是首末两数之积与 1 之和的平方（如 $(1\cdot4+1)^2=5^2$，$(2\cdot5+1)^2=11^2$，$(3\cdot6+1)^2=19^2$，…）；

④是中间两数之积与 1 之差的平方（如 $(2\cdot3-1)=5^2$，$(3\cdot4-1)^2=11^2$，$(4\cdot5-1)^2=19^2$，…）；

⑤是一个质数的平方。

对于⑤有的学生给出了以下的证明：

即证 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=a_n^2$（a_n 为质数），因为由③可知 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2=(n^2+3n+1)^2$，所以只需证明 n^2+3n+1 是质数就可以了。

他们是用反证法证明的。

假设 n^2+3n+1 是合数，那么就存在自然数 s 与 t，使

$$\begin{aligned} n^2+3n+1&=(n+s)(n+t)\\ &=n^2+(s+t)n+st \end{aligned} \tag{1}$$

由对应项系数相等，得

$$s+t=3 \tag{2}$$

$$st=1 \tag{3}$$

由（2）式可知 s 与 t 的奇偶性相反，其积应为偶数，与（3）式矛盾，所以 s，t 不存在，即 n^2+3n+1 是合数是不对的，所以 n^2+3n+1 是质数。

有的学生想用数学归纳法证明 n^2+3n+1 是质数。当 $n=1$ 时，$1^2+3\cdot1+1=5$ 是质数。假设 $n=k$ 时 n^2+3n+1 是质数，即 k^2+3k+1 是质数，要证 $n=k+1$ 时也成立，即 $(k+1)^2+3\cdot(k+1)+1$ 是质数。即证 k^2+5k+5 是质数，这时他发现了 k^2+5k+5 不是质数，因为 $k=5$ 时 k^2+5k+5 就是合数，5 就是它的一个因数。从而他不仅放弃了进一步证明，而且也否定了 n^2+3n+1 是质数的结论。事实上 $k=5$ 而 $n=k+1$，即 $n=5+1=6$ 时 n^2+3n+1 就是合数，它等于 55。

那么前边的同学用反证法证明的结论是错误的，错在何处？他由（1）式，根据对应项系数相等而得到（2），（3）两式。对应项系数相等不是随便就可以使用的，它的前提必须是恒等式。那么（1）式是恒等式吗？我们随便取 $n=1$ 检验一下。左边 $n^2+3n+1=5$，而右边为 $(1+s)\cdot(1+t)$，5 是质数，不可能分解成 $(1+s)\cdot(1+t)$，即 s，t 不存在，（1）式不是恒等式，得不出（2），（3）两式。所以他的证明是错误的。猜想（5）被否定了，其余的猜想正确与否？回答是肯定的，即（1）～（4）猜想都正确，下面只给出（3）的证明，即证

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$$

$$\begin{aligned}左&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\&=[(n^2+3n)+1]^2=(n^2+3n+1)^2\\右&=(n^2+3n+1)^2\end{aligned}$$

所以等式成立。

1.10 数学归纳法问题

有人用第二数学归纳法证明了下述命题：

“x^n+y^n 对于一切自然数 n 都能被 $x+y$ 整除。”其证法如下：

当 $n=1$ 时，$(x+y)\mid(x+y)$，命题成立。

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，下面推证 $n=k+1$ 时命题也成立。

$$\begin{aligned}x^{k+1}+y^{k+1}&=x^{k+1}+y^{k+1}+x\cdot y^k+x^ky-xy^k-x^ky\\&=(x^{k+1}+x\cdot y^k)+(y^{k+1}+x^ky)-(xy^k+x^ky)\\&=x(x^k+y^k)+y(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})\end{aligned}$$

由归纳假设可知等式右端的三项每一项都能被 $x+y$ 整除，所以右端能被 $x+y$ 整除，从而可知左端 $x^{k+1}+y^{k+1}$ 能被 $x+y$ 整除。即 $n=k+1$ 时命题也成立。由第二数学归纳法可知命题成立。

实际上，$n=2$ 时，x^2+y^2 就不能被 $x+y$ 整除，可见上述证明有错误。

错误之处就是没有真正掌握数学归纳法。一般教材或教师在讲授数学归纳法时，都明确指出数学归纳法的两步，第一步通常叫“基础”，第二步通常叫“传递”，有了“基础”又能