



奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所

组编

奥林匹克数学中的数论问题

沈文选 张 垚 冷岗松 / 编著

湖南师范大学出版社



奥赛经典

专题研究系列



湖南省数学会 | 组编
湖南师范大学数学奥林匹克研究所

奥林匹克数学中的数论问题

沈文选 张 垚 冷岗松 / 编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

奥林匹克数学中的数论问题 / 沈文选, 张垚, 冷岗松编著. —修订本.
—长沙: 湖南师范大学出版社, 2014. 12
ISBN 978-7-5648-1997-2

I. ①奥… II. ①沈… ②张… ③冷… III. ①代数课—高中—教学参考资料 IV. ①G634. 623

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 288715 号

奥林匹克数学中的数论问题

沈文选 张 垚 冷岗松 编著

◇策 划: 廖小刚 颜李朝

◇责任编辑: 颜李朝

◇责任校对: 石 岷

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 88873071 88873070 传真/0731. 88872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 湖南省新华书店

◇印刷: 长沙超峰印刷有限公司

◇开本: 787mm×1092mm 1/16

◇印张: 29. 75

◇字数: 779 千字

◇版次: 2015 年 1 月第 2 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978-7-5648-1997-2

◇定价: 46. 00 元



沈文选

男，1948年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究会理事长，全国高等师范院校数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省高师教育研究会理事长，湖南省数学会初等数学委员会副主任，湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者，湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练。

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等30余部，发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等80余篇，发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章200余篇。多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛，2002年全国初中数学联赛，2003年第18届数学冬令营命题组成员。



◆ 张 垚

男，1938年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，中国数学奥林匹克高级教练，湖南省数学奥林匹克主教练，美国《数学评论》评论员。1987~1999年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，负责全省数学竞赛的组织及培训工作，并主持了1989年全国初中数学联赛和1997年全国高中数学联赛的命题工作。

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等17部，发表学术论文80余篇。从1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。曾荣获湖南省优秀教师，全国优秀教师，曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖，湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励。所培训的学生有100余人进入全国中学生数学冬令营，其中有40余人进入国家集训队，14人进入国家队，在国际中学生数学竞赛(IMO)中，共夺得10枚金牌和3枚银牌。



冷岗松

男，1961年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院、上海大学数学系教授，博士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所所长，中国数学奥林匹克委员会委员，美国《数学评论》评论员。从2000年起参加中国数学奥林匹克国家集训队的教练工作和上海市数学奥林匹克选手的培训工作。2001~2004年，多次参加国家集训队，中国数学奥林匹克(CMO)，西部数学竞赛，女子数学竞赛的命题工作。1991~2004年担任湖南省数学奥林匹克培训主要教练，为湖南师大附中、长沙市一中前后10位同学在IMO中获取金牌做了大量培训工作。

已出版专著《高中数学竞赛解题方法研究》，在国内外重要数学学术期刊发表论文30余篇。先后承担国家自然科学基金项目，教育部博士点基金项目等多项。曾获湖南省教委科技进步奖二等奖。

奋发图强，力争上游，
为提高我国数学水平
而共同努力。

王梓坤题书

▲王梓坤：中国科学院院士

湖南中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届 次	获奖情况
第28届（1987）	刘 雄（湖南湘阴一中）金牌
第32届（1991）	郭早阳（湖南师大附中）银牌
第34届（1993）	刘 炆（湖南师大附中）金牌
第35届（1994）	彭建波（湖南师大附中）金牌
第39届（1998）	艾颖华（湖南师大附中） 进国家队，该届国家队未参赛
第40届（1999）	孔文彬（湖南师大附中）银牌
第41届（2000）	刘志鹏（长沙市一中）金牌
第42届（2001）	张志强（长沙市一中）金牌 余 君（湖南师大附中）金牌
第43届（2002）	肖 维（湖南师大附中）金牌
第44届（2003）	王 伟（湖南师大附中）金牌 向 振（长沙市一中）金牌
第45届（2004）	李先颖（湖南师大附中）金牌
第48届（2007）	胡 涵（湖南师大附中）银牌
第52届（2011）	龙子超（湖南师大附中）金牌
第55届（2014）	谌澜天（湖南师大附中）金牌

前言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动。多年来的实践表明：这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣，焕发青少年的学习热情，吸引他们去读一些数学小册子，促使他们寻找机会去听一些名师的讲座；这项活动可以使参与者眼界大开，跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子，去与其他“高手”互相琢磨，激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神；这项活动可以使参与者求知欲望大增，使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进。这是一种有深刻内涵的文化现象，因此，越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外，还积极地参与到国际数学奥林匹克中。

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来，所取得成绩举世公认，十多年来一直保持世界领先的水平。其中，到2014年止，湖南的学生已取得12块金牌、3块银牌的好成绩。这优异的成绩，是中华民族精神的体现，是国人潜质的反映，是民族强盛的希望。为使我国数学奥林匹克事业可持续发展，一方面要继续吸引越来越多的青少年参与，吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来，另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系，要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略，研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系。为此，在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下，2003年，湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”。研究所组建以来，我们都积极投身到研究所的工作中，除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外，还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理，以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书，分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷。这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料，而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感。从教育心理学角度上说，只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识，才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动。

由于这套丛书篇幅较大，本次修订不可能解决存在的所有问题，不足之处，敬请专家、同行和读者不吝指正。

编者
2014年5月

目 录

第一章	整数的离散性与封闭性运算	(1)
第二章	整数的相除	(8)
第三章	同余	(27)
第四章	奇数与偶数	(49)
第五章	素数、合数及威尔逊定理	(70)
第六章	素因数分解	(94)
第七章	整数的可除性特征	(107)
第八章	平方数	(128)
第九章	公约数和公倍数	(162)
第十章	裴蜀定理	(188)
第十一章	互素数与欧拉函数	(196)
第十二章	欧拉定理、费马小定理	(205)
第十三章	中国剩余定理	(225)
第十四章	二次剩余	(239)
第十五章	高斯函数 $[x]$	(248)
第十六章	整数的 p 进位制及应用	(279)
第十七章	不定方程	(295)
第十八章	整点	(316)
参考解答		(333)
参考文献		(467)

第一章 整数的离散性与封闭性运算

【基础知识】

1. 整数的离散性

任何两个整数 x, y 之间至少相差 1, 因此有不等式:

$$x < y \Leftrightarrow x + 1 \leq y.$$

2. 整数的封闭性运算

任何两个整数的和、差、积以及乘方运算的结果仍为整数. 因此, 这几种运算是整数的封闭性运算.

【典型例题与基本方法】

例 1 求整数 a, b, c , 使它们满足条件:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c.$$

解 由题设条件 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$ 及整数的离散性, 有

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c,$$

$$\text{上式配方变形得} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0.$$

$$\text{由于} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 \geq 0, (c - 1)^2 \geq 0,$$

$$\text{从而} a - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - 1 = c - 1 = 0.$$

故 $a = 1, b = 2, c = 1$ 为所求.

例 2 证明不存在整数 a, b, c, d , 使得表达式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$, 当 $x = 19$ 时, 值为 1; 当 $x = 62$ 时, 值为 2. (第 2 届全俄数学奥林匹克题)

证明 设 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

若存在满足题目要求的整数 a, b, c, d , 则

$$P(19) = a \cdot 19^3 + b \cdot 19^2 + c \cdot 19 + d = 1, \quad \text{①}$$

$$P(62) = a \cdot 62^3 + b \cdot 62^2 + c \cdot 62 + d = 2. \quad \text{②}$$

② - ① 得

$$a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1,$$

$$\text{即 } 43[a(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2) + b(62 + 19) + c] = 1.$$

此式的左边是 43 的倍数, 显然不能等于 1.

因而满足题目要求的整数 a, b, c, d 不存在.

例3 将1、2、3、4、5、6、7、8分别放在正方体的八个顶点上,使得每一个面上的任意三个数之和均不小于10.求每一面上四个数之和的最小值.

(2003年西部数学奥林匹克题)

解 设某个面上的四个数 a_1, a_2, a_3, a_4 之和达到最小值,且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. 由于小于5的三个不同的正整数之和最大为9,故 $a_4 \geq 6$, 因此

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 16.$$

如图1-1,我们取正方体的上面依次为1、7、3、6,下面依次为4、8、2、5,则右侧面为 $6+3+2+5=16$,这表明16是可以达到的.

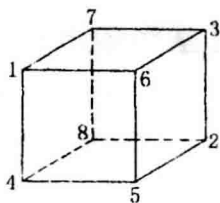


图1-1

例4 求所有的正整数对 (x, y) , 满足 $x^y = y^{x-y}$.

(2002年女子数学奥林匹克题)

解 若 $x=1$, 则 $y=1$; 若 $y=1$, 则 $x=1$.

若 $x=y$, 则 $x^y=1$, 所以 $x=y=1$.

下面讨论 $x > y \geq 2$ 的情形. 由题设

$$1 < \left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y},$$

所以 $x > 2y$, 且 x 是 y 的倍数.

设 $x=ky$, 则 $k \geq 3$, 且

$$k^y = y^{(k-2)y},$$

所以 $k = y^{k-2}$.

因为 $y \geq 2$, 所以 $y^{k-2} \geq 2^{k-2}$, 又用数学归纳法或二项式定理易证, 当 $k \geq 5$ 时, $2^k > 4k$, 故 k 仅可能为3或4.

当 $k=3$ 时, $y=3$, $x=9$; 当 $k=4$ 时, $y=2$, $x=8$.

所以, 所求的全部正整数对为 $(1, 1)$, $(9, 3)$, $(8, 2)$.

例5 求 k 的最大值, 使 3^{11} 可以表示为 k 个连续正整数之和.

(第5届美国数学邀请赛题)

解 假设 3^{11} 表示成连续 k 个正整数之和,

$$3^{11} = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k), \quad ①$$

其中 n 为非负整数, k 为正整数.

我们求满足①式的 k 的最大值.

$$3^{11} = nk + \frac{k(k+1)}{2},$$

$$2 \cdot 3^{11} = 2nk + k(k+1),$$

$$2 \cdot 3^{11} = k(2n+k+1).$$

显然 $k < 2n+k+1$.

要使等式右边较小的因数 k 尽可能地大, 又必须使 n 非负, 则最大的可能是

$$k = 2 \cdot 3^5, \quad 2n+k+1 = 3^6.$$

此时可解得 $n=121$.

因此有

$$3^{11}=122+123+\cdots+607.$$

所求的最大的 k 为 $2 \cdot 3^5=486$.

例 6 是否存在自然数 n , 使 $n!$ 的前面四位数为 1993?

(1993 年德国数学奥林匹克题)

解 存在.

设 $m=1000100000$, 当 $k < 99999$ 时, 若 $(m+k)! = \overline{abcd\cdots}$, 则

$$\begin{aligned} (m+k+1)! &= (m+k)! \times (m+k+1) \\ &= \overline{abcd\cdots} \times 10001\cdots \\ &= \overline{abcx\cdots}, \text{ 其中 } x=d \text{ 或 } d+1. \end{aligned}$$

于是, 设 $m! = \overline{abcd\cdots}$, 则 $(m+1)!, (m+2)!, \cdots, (m+99999)!$ 中每一个的前四位数与前一个的相等或增加 1. 而且 (由于左起第五位数字增加 a), 至多经过 10 个数, 前四位数就需增加 1. 这样 100000 个数 $m!, (m+1)!, \cdots, (m+99999)!$ 的前四位数跑遍 10000 个值, 其中必有 1993 出现.

【解题思维策略分析】

1. 逐步逼近, 缩小范围

例 7 一个正整数的立方是一个四位数, 这个正整数的四次方是一个六位数, 这里用到的 10 个数字, 恰好是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 各出现一次, 一个不重, 一个不漏. 试求出这个正整数.

解 设这个正整数为 n . 如果 n 是一位数, 那么 n^3 最多是三位数, n^4 最多是四位数, n^3 与 n^4 写在一起一定用不到 10 个数目字, 所以 n 不可能是一位数.

如果 n 是三位数, 即使是最小的 100, n^3 也是个七位数了, n^4 更超过七位, n^3 与 n^4 写在一起一定超过 10 个数目字, 也与题设的条件不合. 因此, n 必是一个两位数.

当 n 是一个两位数时, n^4 比 n^3 至少要多一位. 所以 n^3 不能多于四位, n^4 不能少于六位. 由于 $22^3=10648$, 已经是五位数, 所以 n 一定小于 22; 又由于 $17^4=83521$, 只是一个五位数, 不到六位, 所以 n 一定大于 17. 因此, n 只能是 18, 19, 20, 21 这四个数中的某一个.

通过计算不难发现: $20^3=8000$, $19^4=130321$, $21^4=194481$, 都出现数字重码现象, 与题目的条件不合, 应予排除. 剩下的唯一有可能合乎条件的数就只有 18 了. 由于 $18^3=5832$, $18^4=104976$, 而且 10 个数目字不重不漏地出现, 从而所求的正整数为 18 这个数.

类似地可求解如下答案也为 18 的问题:

问题 一个正整数分别乘以 1, 2, 3, 4, 5 后, 把 5 个乘积依次排列起来, 恰好出现 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个数目字, 一个不重, 一个不漏, 试求出这个正整数.

2. 提炼特征, 寻求规律

例 8 设函数 $f: \mathbf{N}^+ \rightarrow \mathbf{N}^+$ 是严格递增的, 且对每个 $n \in \mathbf{N}^+$ 都有 $f[f(n)] = kn$. 求证: 对每个 $n \in \mathbf{N}^+$, 都有 $\frac{2kn}{k+1} \leq f(n) \leq \frac{(k+1)n}{2}, (k \in \mathbf{N}^+)$.

证明 由于 f 严格递增, 且取正整数值, 所以 $f(n+1) > f(n)$.

于是由整数的离散性, 有 $f(n+1) \geq f(n) + 1$.

从而, 对于 $m \in \mathbf{N}^+$, 有 $f(n+m) \geq f(n) + m$.

所以, 对 $m \geq n$ 的正整数, 有 $f(m) = f(n+m-n) \geq f(n) + m - n$,
即有 $f(m) - m \geq f(n) - n$.

取 $m = f(n)$, 得 $f[f(n)] - f(n) \geq f(n) - n$,

即有 $f(n) \leq \frac{1}{2} \{f[f(n)] + n\} = \frac{1}{2}(kn + n) = \frac{(k+1)n}{2}$.

用 $f(n)$ 代上式中的 n , 有 $f[f(n)] \leq \frac{k+1}{2} \cdot f(n)$.

又 $kn = f[f(n)] \leq \frac{1}{2}(k+1) \cdot f(n)$, 即有 $f(n) \geq \frac{2kn}{k+1}$.

故 $\frac{2kn}{k+1} \leq f(n) \leq \frac{(k+1)n}{2}$.

例 9 设 $f(n)$ 为一个在所有正整数集合 $\mathbf{N}^+$ 上有定义且在 $\mathbf{N}^+$ 上取值的函数, 证明: 如果对每一个正整数 n , $f(n+1) > f[f(n)]$, 则对每一个 n , 有 $f(n) = n$. (IMO-19 试题)

证明 由题设, 可推测应有 $f(n+1) > f(n)$, 即 $f(n)$ 单调递增. 我们放在后面再证这个结论.

这时, 由 $f[f(n)] < f(n+1)$, 有 $f(n) < n+1$.

注意到整数的离散性, 有 $f(n) \leq n$.

而 $f(1) < f(2) < \dots < f(n-1) < f(n)$, 即知它们必须是前 n 个不同的正整数, 故 $f(n) = n$.

下面证明 $f(n)$ 严格递增, 即证 $f(1), f(2), f(3), \dots$ 中 $f(1)$ 最小, $f(2)$ 次小, $f(3)$ 再次小, $\dots$.

由题设 $f(n+1) > f[f(n)]$, 知 $f(n+1)$ 不是最小的, 即在 $f(2), f(3), \dots$ 中自变量大于 1 的函数值都不是最小的, 因而只有 $f(1)$ 是最小的.

再考虑 $f(2) - 1, f(3) - 1, \dots$.

令 $F(n) = f(n+1) - 1$, 则

$F(n+1) = f(n+2) - 1 > f[f(n+1)] - 1 = f[F(n) + 1] - 1 = F[F(n)]$.

于是, 知 $F(n)$ 具有 $f(n)$ 的性质.

即知 $F(1) = f(2) - 1$ 在 $f(2) - 1, f(3) - 1, \dots$ 中是最小的, 亦即知 $f(2)$ 在 $f(1), f(2), f(3), \dots$ 中是次小的.

依上可证, $f(3)$ 再次小, $\dots$. 故 $f(n)$ 单调递增.

例 10 试找出这样的 a 值, 它们使得方程 $x^2 - ax + 9a = 0$ 的根是整数.

(1990 年苏联教委推荐试题)

解 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + 9a = 0$ 的整数根, 于是由韦达定理得

$$x_1 + x_2 = a,$$

$$x_1 x_2 = 9a.$$

$$\text{于是 } x_1 x_2 = 9(x_1 + x_2),$$

$$x_1 x_2 - 9x_1 - 9x_2 + 81 = 81,$$

$$(x_1 - 9)(x_2 - 9) = 81.$$

注意到, 对 81 有如下 6 种形式的因数分解:

$$81 = 1 \cdot 81 = (-1) \cdot (-81) = 3 \cdot 27 = (-3) \cdot (-27) = 9 \cdot 9 = (-9) \cdot (-9).$$

因而可知 $a = x_1 + x_2 = (x_1 - 9) + (x_2 - 9) + 18$, 可得下面 6 个数:

$$\pm 82 + 18, \pm 30 + 18, \pm 18 + 18, \text{ 即}$$

$$a = 100, -64, 48, -12, 36, 0.$$

于是当 a 取上述 6 个整数值时, 所给方程有整数根.

例 11 有多少个实数 a , 使得 $x^2 + ax + 6a = 0$ 只有整数解.

(第 9 届美国数学邀请赛题)

解 设方程 $x^2 + ax + 6a = 0$ 有整数解 m, n ($m \leq n$), 则有

$$m + n = -a,$$

$$mn = 6a.$$

于是有 $-6(m+n) = mn$, 即

$$(m+6)(n+6) = 36.$$

因为 $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, 所以

满足 $m \leq n$ 的解 (m, n) 有

$$(-42, -7), (-24, -8), (-18, -9), (-15, -10),$$

$$(-12, -12), (-5, 30), (-4, 12), (-3, 6), (-2, 3), (0, 0).$$

对应的 $a = -(m+n)$ 的值为

$$49, 32, 27, 25, 24, -25, -8, -3, -1, 0. \text{ 共 10 个.}$$

例 12 当 $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ 时, 多项式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 取整数值. 求证对于所有的整数 x , 这个多项式取整数值. (第 14 届全俄数学奥林匹克题)

证明 考虑恒等式

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= 6a \cdot \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x + d. \end{aligned}$$

由于 $P(0) = d, P(1) = a + b + c + d$ 是整数, 则 d 是整数, $a + b + c$ 是整数.

$P(-1) = 2b - (a + b + c) + d$ 是整数, 则 $2b$ 是整数.

$P(2) = 6a + 2b + 2(a + b + c) + d$ 是整数, 则 $6a$ 是整数.

又因为 $\frac{(x-1)x(x+1)}{6}, \frac{x(x-1)}{2}$ 都是整数, 于是

$$P(x) = 6a \cdot \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x + d \text{ 对任意的整数 } x, \text{ 都是}$$

整数.

例 13 计算: $\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{2n\text{位}} + \underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{位}} - \underbrace{66\cdots6}_{n\text{位}}}.$

解 令 $a = \underbrace{11\cdots1}_{n\text{位}}$, 则

$$10^n = \underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}} + 1 = 9a + 1,$$

$$\underbrace{44\cdots4}_{2n\text{位}} = 4a \cdot 10^n + 4a = 4a(9a + 2),$$

$$\underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{位}} = 10a + 1, \quad \underbrace{66\cdots6}_{n\text{位}} = 6a.$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= \sqrt{4a(9a+2) + 10a + 1 - 6a} \\ &= \sqrt{(6a+1)^2} = 6a+1 \\ &= \underbrace{66\cdots67}_{n-1\text{位}}. \end{aligned}$$

【模拟实战】

1. 已知 n 是一个整数, 设 $p(n)$ 表示它的各位数字的乘积 (用十进制表示). (1) 求证: $p(n) \leq n$; (2) 求使 $10p(n) = n^2 + 4n - 2005$ 成立的所有 n .

(2005 年罗马尼亚数学奥林匹克题)

2. 求方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2004}$ 的全部整数解. (第 48 届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)

3. 我们在一个立方体的每个面上写一个正整数, 然后, 在每个顶点处再写一个数, 该数等于过这个顶点的三个面上的整数的乘积. 已知该立方体各个顶点上的数字之和为 70, 求该立方体各个面上的数字之和. (第 48 届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)

4. 对每一个正整数 n , 是否都存在 n 个连续的整数, 使得它们的和等于 n . (第 4 届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)

5. 已知数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 定义如下:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_{n+3} = \frac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2} + 7), n > 0.$$

证明: 对于所有的正整数 n , a_n 是整数. (2003—2004 年度德国数学竞赛题)

6. 求所有多于两位的正整数, 使得每一对相邻数字构成一个整数的平方. (2004 年克罗地亚数学竞赛题)

7. 设 a 是整数, 且 $|a| \leq 2005$, 求使得方程组 $\begin{cases} x^2 = y + a, \\ y^2 = x + a \end{cases}$ 有整数解的 a 的个数.

(第 36 届奥地利数学奥林匹克题)

8. 将集合 $S = \{1, 2, \dots, 2006\}$ 分成两个不交的子集 A 和 B , 且满足

(1) $B \in A$;

(2) 若 $a \in A, b \in B, a+b \in S$, 则 $a+b \in B$;



(3) 若 $a \in A, b \in B, ab \in S$, 则 $ab \in A$.

求 A 中元素的数目.

(2006 年塞尔维亚和黑山队选拔赛试题)

9. 求所有函数 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, 对所有 $m, n \in \mathbf{N}$ 满足 $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$ 且 $f(1) > 0$.

(2003 年台湾集训题)

10. 设 S 是有限整数集. 假设对于任两个不同的元素 $p, q \in S$, 存在三个元素 $a, b, c \in S$ (a, b, c 不必不同, 且 $a \neq 0$), 使得多项式 $F(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $F(p) = F(q) = 0$. 试确定 S 中元素个数的最大值. (第 9 届中美洲及加勒比海地区数学奥林匹克题)

11. 已知 $n \in \{3900, 3901, \dots, 3909\}$. 求满足下述条件的 n : 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 可分拆成若干个三元数组, 且每一个数组中有一个数等于其他两数之和.

(2007 年捷克-斯洛伐克-波兰数学竞赛题)



第二章 整数的相除

【基础知识】

1. 一条基本定理

定理 (带余除法) 若 a, b 是两个整数, 其中 $b \neq 0$, 则存在唯一的一对整数 q 和 r , 使得

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < |b|),$$

其中 q 称为商数, r 称为余数.

2. 定义

(1) 在上述带余除法中, 当 $r=0$ 时, 则称 a 能被 b 整除, 或者 b 整除 a , 记为 $b \mid a$, 并约定 $0 \mid 0$. 易见当 a, b 均为正整数时, 有 $b \leq a$.

(2) 若 $b \mid a$, 则 a 叫做 b 的倍数, b 叫做 a 的约数 (因数), 若 $b \neq \pm 1$, 则 b 叫做 a 的真约数.

(3) 若 a 不能被 b 整除, 则记作 $b \nmid a$.

(4) 如果 $a^t \mid b$, $a^{t+1} \nmid b$, $t \in \mathbf{N}^+$, 记作 $a^t \parallel b$.

3. 欧几里得 (Euclid) 辗转相除法

设 a, b 是任意两个正整数, 由带余除法, 知

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b),$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1),$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1}),$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1} \quad (r_{n+1} = 0),$$

于是 $r_n = (a, b)$.

4. 关于整除的一些简单性质

(1) $b \mid 0, \pm 1 \mid a, a \mid a (a \neq 0)$.

(2) 若 $b \mid a, a \neq 0$, 则 $1 \leq |b| \leq |a|$.

(3) 若 $a \mid b, k \in \mathbf{Z}$, 则 $a \mid kb$.

(4) 若 $a \mid b, a \mid c$, 则 $a \mid (b \pm c)$.

推论 1 若 $a \mid b, a \mid (b \pm c)$, 则 $a \mid c$.

推论 2 若 $a \mid b, a \mid c, m, n \in \mathbf{Z}$, 则 $a \mid (mb + nc)$.

(5) 若 $a \mid b$, 则 $a^m \mid b^m$.

(6) 若 $a \mid b, b \mid c$, 则 $a \mid c$.

(7) 若 $a|c, b|c, (a, b)=1$, 则 $ab|c$.

(8) 若 $a|bc, (a, b)=1$, 则 $a|c$.

(9) 若 p 为素数, $p|ab$, 则 $p|a$ 或 $p|b$.

推论 3 若 p 为素数, $p|a^m$, 则 $p|a$.

(10) 设 $a=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $b=p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, 则 $a|b \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i$ ($i=1, 2, \dots, r$).

(11) 若 $\sum_{i=1}^k a_i=0$, b 能整除 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 中的 $k-1$ 个, 则 b 能整除另一个.

5. 几个相除结论

(1) 任何 n 个连续整数之积一定能被 n 整除.

(2) 任何 n 个连续整数之积一定能被 $n!$ 整除.

(3) $(a+b)^n$ 被 a 除的余数是 b .

【典型例题与基本方法】

例 1 试找出不能表示为 $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ 的形式的最小的正整数, 其中 a, b, c, d 都是正整数. (2005 年俄罗斯数学奥林匹克题)

解 所求的最小正整数是 11.

我们有:

$$1 = \frac{4-2}{4-2}, 3 = \frac{8-2}{4-2}, 5 = \frac{16-1}{4-1} = \frac{2^5-2}{2^3-2},$$

$$7 = \frac{16-2}{4-2}, 9 = 2^3+1 = \frac{2^6-1}{2^3-1} = \frac{2^7-2}{2^4-2},$$

$$2 = 2 \cdot 1 = \frac{2^3-2^2}{2^2-2}, \dots, 10 = 2 \cdot 5 = \frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

假设

$$11 = \frac{2^a-2^b}{2^c-2^d},$$

不失一般性, 可设 $a>b, c>d$, 记 $m=a-b, n=c-d, k=b-d$, 于是得到

$$11(2^n-1) = 2^k(2^m-1).$$

上式左端为奇数, 因此 $k=0$. 易知 $n=1$ 不能使上式成立. 而如果 $m>n>1$, 则 2^n-1 与 2^m-1 被 4 除的余数都是 3, 从而上式左端被 4 除的余数为 1, 右端却为 3, 此为矛盾.

例 2 (1) 设 a, m, n 是自然数, $a>1$. 证明: 如果 a^m+1 能被 a^n+1 整除, 那么 m 能被 n 整除. (2) 设 a, b, m, n 是自然数, 同时 a 和 b 互素, 且 $a>1$. 证明: 如果 a^m+b^m 能被 a^n+b^n 整除, 那么 m 能被 n 整除. (1972 年第 6 届全苏数学奥林匹克题)

证明 注意到(1)是(2)的特例, 即(2)中 $b=1$ 的情形, 所以我们只证明(2).

首先证明如下两个引理:

引理 1: 若 $a^n+b^n|a^k+b^k, (a, b)=1$, 则 $a^n+b^n|a^{k-n}+b^{k-n}$.

引理 2: 若 $a^n+b^n|a^l+b^l, (a, b)=1$, 则 $a^n+b^n|a^{l-n}+b^{l-n}$.