普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等工科数学系列课程教材

工科数学分析教程

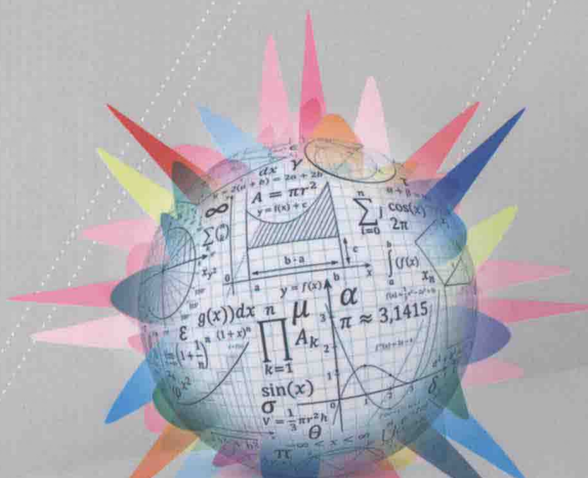
MATHEMATICAL ANALYSIS 下册

第3版

孙振绮　总主编

孙振绮　金承日　[乌克兰] О. Ф. 包依丘克　主　编

王雪臣　王黎明　副主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等工科数学系列课程教材

工科数学分析教程

下册

第3版

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　金承日　［乌克兰］О. Ф. 包依丘克
副主编　王雪臣　王黎明

机械工业出版社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是以教育部（原国家教委）1995 年颁布的高等工科院校本科高等数学课程教学基本要求为纲，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并总结我校多年来的教学改革与实践而编写的工科数学分析课程教材．本书在第 2 版的基础上增减和修改了一些内容，并调整了部分内容的顺序，加强了数学思想的前后连贯性，提高了教材的可读性．

《工科数学分析教程》上册（第 3 版）共 9 章：实数，数列的极限，函数的极限与连续性，导数及其应用，不定积分，定积分，广义积分，定积分的应用，常微分方程．《工科数学分析教程》下册（第 3 版）共 7 章：多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，数项级数，幂级数，傅里叶级数，含参变量的积分．每章都配有大量的例题与典型计算题，书后附有计算题答案，便于读者自学．

本书可作为工科大学本科生的数学课教材，也可供准备报考工科硕士研究生的考生与工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析教程．下册 / 孙振绮，金承日，（乌克兰）包依丘克主编．—3 版．—北京：机械工业出版社，2015.11

普通高等教育“十一五”国家级规划教材　高等工科数学系列课程教材

ISBN 978-7-111-52071-9

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①孙…②金…③包…　Ⅲ．①数学分析－高等学校－教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 259719 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　陈崇昱　任正一
责任校对：肖　琳　封面设计：张　静
责任印制：李　洋
北京振兴源印务有限公司印刷
2016 年 1 月第 3 版・第 1 次印刷
169mm × 239mm・21.75 印张・421 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-52071-9
定价：48.00 元

第 3 版前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，这次修订在基本保持原教材（第 2 版）风貌的基础上增减和修改了部分内容，并调整了部分内容的前后顺序，增减了部分习题，加强了数学思想的前后连贯性，提高了教材的可读性.

编者认为，当今时代是科学、技术、经济与管理数学化的时代，这就确定了数学在高等教育中的重要地位. 现代科学工作者和工程师不仅应当知道数学原理，而且还应当掌握最新的数学研究方法，并把它们应用到自己的实践中去.

随着我国高等教育的改革与发展，各高校也在不断地修订本科培养方案. 为了适应当前教育改革的形势，编者对原教材（第 2 版）进行了修订，改动比较大的部分如下：第 3 章增加了极坐标系的概念，对函数极限的定义顺序加以调整——修订后，先由数列极限引出 x 趋于 ∞ 时函数的极限，然后给出在有限点处的极限，最后给出其他类型的极限，突出了无穷小的比较及利用等价无穷小计算极限. 第 4 章将泰勒公式改为微分的形式，以便向多元函数的泰勒公式过渡，向量函数和曲线部分只保留了曲线的曲率. 第 9 章删除了大纲不做要求的一些内容，对线性微分方程及其解的结构做了全新的修订，对二阶线性微分方程（齐次与非齐次）做了完全的修改，减少了节数与典型计算题数量. 第 10 章修改了二重极限的定义，将多元函数微分的定义、可微的必要条件和充分条件改为二元函数的形式，增加了一些关于几何应用和极值的练习题，将与复合函数和隐函数的微分法有关的典型计算题分开，删掉了变量代换一节，略去一些复杂定理的证明，删掉多元函数泰勒公式中的一些例题，并将向量函数与曲线、多元函数泰勒公式、多元函数的极值纳入本章. 第 11 章重新定义了重积分的概念，增加了对称奇偶性的内容. 第 12 章重新定义了曲线积分与曲面积分的概念，增加了第一型曲线(曲面)积分的对称奇偶性的内容，对高斯公式、斯托克斯公式以及场论部分做了较大改动，删除了场论部分中超出大纲要求的较多内容. 第 13 章删除了复数项级数部分，压缩了习题，增加了一些简单的考研题. 第 14 章删除了复数域理论，将级数全部改为在实数域背景下进行讨论，删除了函

数序列的一致收敛性及相关例题，将级数的一致收敛性作为附加内容，节前加了＊号，泰勒级数部分只介绍拉格朗日余项型，将积分型余项删除，并将幂级数在近似计算中的应用作为附加内容供学生自学．第15章删除了大纲不做要求的一些内容，对教学内容和课后习题做了调整，更加便于教学．第16章作为选学内容加了＊号，并删除了一些例题．对于书后的附录也做了压缩与精简．

本书的上册由孙振绮、丁效华、О. Ф. 包依丘克（乌克兰）任主编，邹巾英、吴开宁任副主编，下册由孙振绮、金承日、包依丘克任主编，王雪臣、王黎明任副主编．参加本书修订工作的教师及他们承担的工作如下：孙振绮（第1章、第2章）、史磊（第3章）、丁效华（第4章、第8章）、邹巾英（第5章）、马强（第4章、第5章、第6章、第7章）、吴开宁（第9章）、王雪臣（第10章）、金承日（第11章、第12章）、王黎明（第13章、第14章）、李文学（第15章）、于佳佳（第16章）、郭宇潇（下册附录）．全书由孙振绮策划，上册由邹巾英统稿，下册由金承日统稿．崔明根、刘铁夫、文松龙、伊晓东四位教授分别审阅了教材的各章内容，并提出了许多宝贵意见．

由于编者水平有限，不妥及错漏之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

第 2 版前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，这次修订在基本保持原教材（第 1 版）风貌的基础上补充了部分内容，并调整了某些内容的顺序.

编者认为，当今的时代是科学、技术、经济与管理数学化的时代，这就确定了数学在高等教育中的地位. 现代科学工作者和工程师不仅应当知道数学原理，而且应当掌握最新的数学研究方法，并把它们应用到自己的实践中去，特别是电子计算机技术的飞速发展，使得某些被认为是最纯粹的数学理论在工程实际中也得到了应用. 数学的广泛应用是科技进步与发展的条件，所以编者编写了这本在传统的数学分析的内容框架下增加了现代数学观点与内容的教材，提高了理论知识平台，以适应培养高素质、创新型人才的需要.

修订后的教材增加了下述内容：

1. 在第 1 章实数中加强了实数理论的内容，引入了确定实数概念的公理化定义.

2. 在第 4 章一元函数微分学中，增加了①高阶微分；②向量函数的拉格朗日中值定理与有限泰勒公式的证明；③空间曲线理论初步(含简单曲线、光滑曲线、曲线的切线、曲线的弧长、平面的曲线与曲线的主法线、曲线的曲率，均用向量函数表示).

3. 在第 5 章多元函数微分学中，①增加了度量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的直线、射线与线段；②给出了对应 m 个方程的隐函数存在定理.

4. 在第 13 章重积分中增加了 $\mathbf{R}^n$ 中的网格理论.

5. 在第 14 章曲线积分与曲面积分、场论中，增加了①曲面理论初步(包括简单曲面、曲面上的曲线坐标、曲面的切平面与法线、分片光滑曲面、可定向的曲面)；②把高斯公式、斯托克斯公式与场论内容综合编写.

6. 在第 16 章傅里叶级数中增加了①傅里叶级数的逐项微分法与逐项积分法；②傅里叶级数的一致收敛性；③傅里叶级数的求和法；④傅里叶级数在均方意义下的收敛性（包括酉空间、赋范空间、收敛性、完备空间、盖里别尔托夫空间、酉空间的完备化、傅里叶系数的极小性质、贝塞尔不等式. 在酉空间

元素组（基）$\{e_i\}$的完备性，三角函数系在$\mathbf{L}_2(a, b)$上的完备性，在盖里别尔托夫空间中的正交系的完备性）.

7. 在第 17 章含参变量的积分中增加了①含参变量的普通积分；②含参变量的广义积分及其一致收敛性；③欧拉积分；④傅里叶积分；⑤傅里叶变换.

8. 在附录 A 中，介绍了在数学分析教程中的微分流形理论：①代数流形；②积分流形；③微分流形的积分，空间 $\mathbf{R}^n$ 的定向；④斯托克斯公式与高斯公式的微分流形形式.

从内容体系上，除了内容顺序的变动并补充上述内容外，本次修订还突出以下几个特点：

1. 加强线性代数与解析几何、微积分学内容的相互渗透、相互交叉，并把这些内容与实用的工程数学方法看作一个整体，对其内容体系进行优化组合.

2. 采用归纳法，由浅入深地叙述教材内容. 譬如，极限的概念是按下列顺序叙述的：数列极限，一元函数极限，在欧氏空间中关于集合的极限，积分和极限等；对于泰勒公式，首先研究区间上实函数，然后研究 $\mathbf{R}^n$ 空间中的映射的泰勒公式；对于柯西极限存在准则，首先研究了各类柯西极限准则，最后研究了在 $\mathbf{R}^n$ 空间中映射的极限存在的柯西准则；叙述傅里叶级数是从古典的三角函数开始，最后叙述在盖里别尔托夫空间中关于正交组的傅里叶级数等.

3. 证明的定理并不总是具有普遍意义，由于教学时数有限，同时考虑要更好阐明所研究问题的实质和证明的思路，只考虑足够光滑的函数.

除上述特点外，本次修订还保留了第 1 版注重教学法，知识由浅入深、循序渐进、便于自学，以及理论联系实际，加强数学建模训练等特点.

本书是编者在哈尔滨工业大学与乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）多年讲授工科数学分析课程与习题课经验的基础上，吸取国内外知名大学的先进教学经验编写的，为了巩固所叙述的理论知识，举有足够数量的例题与典型计算题，帮助读者掌握教程的基本思想与深入研究、解决应用问题的方法，特别重视对那些学生学习较困难的概念的阐述，在教学中取得了较好的效果.

为了适应现代科技的飞速发展，编者大胆改革传统的数学分析教材，注意渗透、增加现代数学观点与方法，试图为大学生提供阅读与查阅现代科技文献、进行科研的有力的数学工具，编者认为这是一项十分困难的工作，希望这套教

材的出版能为推动这项工作做出贡献.

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意，特别要感谢机械工业出版社的领导及同志们为该书的早日出版所做出的重大贡献.

本书由孙振绮、О. Ф. 包依丘克（乌克兰）任主编，丁效华、金承日、伊晓东任副主编并参加教材的修订工作. 参加本书习题部分修订的还有哈尔滨工业大学（威海）数学系邹巾英、孙建邵、李福梅、杨毅、范德军、吴开宇、王雪臣、王黎明、曲荣宁、史磊、宁静、李晓芳、于战华、吕敬亮等. 崔明根、刘铁夫、王克、文松龙四位教授分别审阅了教材的各章内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正!

编　者

第 1 版前言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法．为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等数学教学过程的优化设计”课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖．本套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括《工科数学分析教程》（上、下册）、《空间解析几何与线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数论与运算微积》、《数学物理方程》、《最优化方法》、《计算技术与程序设计》等．

本套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识的起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养．具体体现在：①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与相互交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别．

此外，我们认为，必须把教师与学生、内容与方法、教学活动看作是教学过程中三个有机联系的整体，教学必须实现传授知识与培养学习能力、发挥教师主导作用与调动学习积极性的结合．为此，教材的编写上注意运用启发式教学，有利于教师组织教学过程，充分调动学生学习的积极性，不断地引导学生进行深人思维．

本书可供工科大学自动化、计算机科学与技术、机械电子工程、工程物理、通信工程、电子科学与技术等对数学知识要求较高的专业的本科生使用．按大

纲讲授需要 198 学时，全讲需要 230 学时.

本书是根据哈尔滨工业大学与乌克兰人民科技大学的合作协议确定的合作项目而编写的，并得到了教育部哈尔滨工业大学工科数学教学基地的资助.

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意.

本套教材由孙振绮任总主编. 本书由孙振绮、О. Ф. 包依丘克（乌克兰）任主编，丁效华、金承日任副主编. 参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）数学系邹巾英、孙建邵、李福梅、杨毅、伊晓东、林迎珍、李宝家、于淑兰等. 崔明根、刘铁夫、文松龙三位教授分别审阅了教材的各章内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

记号与逻辑符号

符　号	表示的意义
$\vee$	或
$\wedge$	和
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
:	使得
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A\to B$	由 A 得到 B
$f: A\to B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{N}^+$	正整数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x\in A$	x 是集合 A 的元素
$A\subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$\sup\limits_{x\in X}\{x\}$	集合 X 的上确界
$\inf\limits_{x\in X}\{x\}$	集合 X 的下确界
$C=A\cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C=A\cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x\in A\cup B$	或 $x\in A$ 或 $x\in B$
$x\in A\cap B$	$x\in A$ 且 $x\in B$
$C=A\setminus B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x\in A\setminus B$	$x\in A$，但 $x\notin B$（x 不属于 B）
$f\in C([a, b])$	f 属于在区间 $[a, b]$ 上连续的函数类
$f\in C^1([a, b])$	f 属于在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数的函数类
$f\in R([a, b])$	f 属于在区间 $[a, b]$ 上黎曼可积的函数类

教材中出现的著名科学家

柯西（Cauchy，1789—1857）法国数学家
伯努利（Bernoulli，1654—1705）瑞士数学家
欧拉（Euler，1707—1783）瑞士数学家、自然科学家
维尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）德国数学家
康托尔（Cantor，1845—1918）德国数学家
莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）德国数学家
费尔玛（Fermat，1601—1665）法国数学家
罗尔（Rolle，1652—1719）法国数学家
拉格朗日（Lagrange，1735—1813）法国数学家、物理学家
泰勒（Taylor，1685—1731）英国数学家
马克劳林（Maclaurin，1698—1746）英国数学家
皮亚诺（Peano，1858—1932）意大利数学家
洛必达（L'Hospital，1661—1704）法国数学家
笛卡儿（Descartes，1596—1650）法国哲学家、数学家、物理学家
黎曼（Riemann，1826—1866）德国数学家、物理学家
牛顿（Newton，1642—1727）英国数学家、物理学家、天文学家
狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）德国数学家
达朗贝尔（d' Alembert，1717—1783）法国数学家、力学家
雅可比（Jacobi，1804—1851）德国数学家
格林（Green，1793—1841）英国数学家
默比乌斯（Möbius，1790—1868）德国数学家、天文学家
高斯（Gauss，1777—1855）德国数学家、物理学家、天文学家
斯托克斯（Stokes，1819—1903）英国数学家、物理学家
傅里叶（Fourier，1768—1830）法国数学家

目　　录

第 10 章 多元函数微分学及其应用

10.1 $\mathbf{R}^n$ 空间

10.1.1 度量空间

定义 10-1 如果对于集合 X 的每一对元素 x 与 y，都有一个非负实数与之相对应，记为 $\rho(x,y)$，且对于 X 的任意元素 x，y，z 都满足下列条件：

(1) $\rho(x, y)\geqslant 0$，而且 $\rho(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$（非负性）

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$（对称性）

(3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$（三角不等式）

则称 $\rho(x, y)$是元素 x 与 y 之间的**距离**，而 X 称为**度量空间**（或者距离空间）.

我们称度量空间的元素为点，称定义在度量空间 X 中的点对集合上的非负函数 $\rho(x, y)$为度量，条件（1）~(3) 为距离三公理.

如果在实数集合 $\mathbf{R}$ 内定义 $\rho(x, y)$：设 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$，定义 $\rho(x, y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$，从而得到度量空间 $\mathbf{R}$.

在二维平面点集 $\mathbf{R}^2$ 中，对于 $x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)$，若定义

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

则得到度量空间 $\mathbf{R}^2$.

需指出，在同一个集合上可以定义不同的距离，从而得到不同的度量空间，如在集合 $X=\{(x_1, x_2)\mid x_1, x_2\in\mathbf{R}\}$ 上可以定义

$$\tilde{\rho}(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

作为两点间的距离，且易证满足距离三公理，从而得到与 $\mathbf{R}^2$ 不同的度量空间 $(X, \tilde{\rho})$.

同样，在度量空间 $\mathbf{R}^3$ 中，可定义

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

其中，$x=(x_1, x_2, x_3)$，$y=(y_1, y_2, y_3)$.

更一般地，在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=$

$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

此外，还可定义

$$\tilde{\rho}(x,y) = \max_{i=1,2,\cdots,n} |x_i - y_i| \text{ 或者 } \hat{\rho}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

最后举一个与欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 不同的度量空间，$C([0,1]) = \{$所有在$[0,1]$上连续的函数$\}$，设 $x(t)$，$y(t) \in C([0,1])$，定义

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|$$

可以证明它满足距离三公理，这样集合 $C([0,1])$ 就构成了度量空间.

10.1.2　度量空间中点列的收敛性

定义 10-2　设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的点列，若存在 $a \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, a) = 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 a（有极限 a）且记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定义 10-3　如果存在 $C \in \mathbf{R}$ 且存在 $a \in X$，使得对任何 $n \in \mathbf{N}_+$，有 $\rho(x_n, a) \leqslant C$，则称点列 $\{x_n\}$ 是有界的.

下面证明几个收敛点列的简单性质.

引理 1　如果点列 $\{x_n\}$ 有极限，则它必有界.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, a) = 0$，所以数列 $\rho(x_n, a)$ 有界，即存在 $C \in \mathbf{R}$，对任何 $n \in \mathbf{N}_+$，都有 $\rho(x_n, a) \leqslant C$.

引理 2　如果点列 $\{x_n\}$ 收敛，则极限唯一.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，根据三角不等式和

$$0 \leqslant \rho(a,b) \leqslant \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b)$$

因为 $\rho(a, x_n)$ 和 $\rho(x_n, b)$ 均为无穷小量，所以 $\rho(a, b) = 0$，即 $a = b$.

引理 3　设 $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})$ 是度量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，则 $\{x_m\}$ 收敛于 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{m\to\infty} x_{mi} = a_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

证　设对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mi} = a_i$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} |x_{mi} - a_i| = 0$，因此有

$$\rho(x_m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{mi} - a_i)^2} \to 0, \ m \to \infty$$

反之，若 $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$，则 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m, a) = 0$，所以对任何 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有