

TO MASTER TECHNIQUES

〔日〕 矢野健太郎 著

数学解题技巧

上

解法のテクニック

数 学 解 题 技 巧

(第一卷上册)

〔日〕 矢野健太郎 著

马宝珊 李俊杓 安永德 译

黑龙江人民出版社

1986年·哈尔滨

责任编辑：田兆民 孙怀川

封面设计：蒋 明

数 学 解 题 技 巧

（第一卷 上册）

〔日〕 矢野健太郎 著

马宝珊 李俊杓 安永德 译

黑 龙 江 人 民 出 版 社 出 版

（哈尔滨市道里森林街42号）

黑龙江新华印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32·印张18·字数353,000

1985年12月第1版

1986年2月第2次印刷

印数18,401—22,760

统一书号：13093·59

定价：2.70元

译 者 的 话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著《解法のテクニック》一书 1979 年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分 3 卷（数学 I、数学 II B、数学 III）28 章 127 节，共精选出 782 个典型问题及约 2000 道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识、提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每一节中都安排了如下内容：

首先介绍基础知识(Fundamentals)，简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的，对其它问题也有普遍应用价值的常用技巧，冠以“关键”(Technique)字样；对于解题时要用到的，有普遍意义的公式、定理等，

冠以“理论”(Theory)字样。凡“关键”和“理论”部分，一律用简洁的语言或公式表示出来，以便于读者复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上，给出问题的完整的解答过程。其中对于容易出错的地方，冠以“当心”(Remark)字样，以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等，通过反向箭头“ $\leftarrow$ ”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干与该问题属同类型的习题，供复习与练习用。对于个别较难的习题，标上“*”号，以示区别，初读时可以略过。这些习题的解题技巧和解题过程附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的，所以有个别章节（如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等）超出我国现行中学数学教学大纲范围。但是，考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲，有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值，因此，中译本将原书全部内容译出，以保持其完整性和系统性。

原书中，冠有“关键”、“理论”、“当心”字样的部分，都是以醒目的红蓝套色印刷的，中译本则一律改为黑体字排出。对原书中数字和符号上的印刷错误，我们已作纠正，不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册(每卷分上、下两册)出版。译者分工如下：第一卷上册由马宝珊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝珊、李俊杓译，

下册由安永德、马宝珊译。李涌权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生以及黑龙江人民出版社致谢。

由于译者水平有限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系 颜秉海

1981年11月

目 录

第一章 式的运算

§ 1 整式的乘除	1
1. 整式的乘法	3
2. 整式的除法	4
3. 综合除法	6
§ 2 式子展开	8
4. 按公式展开	9
5. 展开的应用	10
§ 3 集合	11
6. 集合的表示法	13
7. 包含关系	15
8. 并集、交集	17
9. 文氏图的应用	18
10. 辗转相除法 (集合的相等)	20
§ 4 因式分解	22
11. 应用公式	23
12. 按某字母的一次 式整理	24
13. 按某字母的二次 式整理	25
14. $A^2 - B^2$ 型	27
15. 分组分解	29
16. 换元	31
17. 轮环型	32

§ 5 分式与比	34
18. 最高公因式和 最低公倍式	36
19. 分式的乘除	37
20. 分式的加减	37
21. $x \pm \frac{1}{x}$ 型的值	39
22. 比	41
§ 6 无理式	43
23. 基本计算与分母 的有理化	45
24. 双重根号	47
25. 共轭无理数	48
26. 根式规定	50
§ 7 恒等式和余数定理	52
27. 恒等式	54
28. 待定系数法	56
29. 因式定理	57
30. 余数定理	59
§ 8 等式的证明	61
31. 简单变形法	61
32. 代入法与消元法	63
33. 因式分解法与 平方和法	64
34. 设 $=K$	66
35. $f(x)$ 型的证明	68

第二章 数的理论

§ 9 整数70

- 36. 质数71
- 37. 倍数与约数73
- 38. 余数系(1)75
- 39. 余数系(2)76
- 40. 9 除法79
- 41. 连续整数的积80
- 42. 整根82
- 43. p 进制84
- 44. 高斯记号86

§ 10 有理数与无理数88

- 45. 有理数化成小数90
- 46. p 进制的小数91
- 47. 不是有理数
 的证明93
- 48. 无理数的性质95

§ 11 数集97

- 49. 可数集合99
- 50. 集合的封闭性100
- 51. 群102

第三章 方 程

§ 12 二次方程105

- 52. 二次方程的解法107
- 53. 含有 $|$ 和 $[\]$
 记号的方程108
- 54. 复数计算(1)110
- 55. 复数计算(2)112
- 56. 复数的相等113
- 57. 共轭复数115

§ 13 二次方程根的性质117

58. 根的判别119

59. 等根和完全平方式 的条件120

60. 实根和虚根的条件 122

61. 实根和虚根的证明 123

62. 根与系数的 关系(1)125

63. 根与系数的 关系(2)127

64. 方程的建立129

65. 方程的根和因式 分解130

66. 共同根(1)132

67. 共同根(2)133

68. 不定方程的实根 和整根135

69. 二次方程的整根137

§ 14 方程组139

70. 一次方程和 二次方程140

71. 二次方程和 二次方程(1)141

72. 二次方程和 二次方程(2)142

73. 对称型和交换型144

74. 不定解和无解的 条件145

§ 15 高次方程147

75. ω 及其计算148

76. 利用因式分解的 解法(1)149

77. 利用因式分解的

解法(2)	150
78. 换元法的解法	152
79. 三次方程的根 与系数的关系	154
§ 16 各种方程	156
80. 简单的分式方程	156
81. 简单的无理方程	157
§ 17 应用问题	159
82. 比例和混合问题	159
83. 速度问题	161
84. 做工问题	162

第四章 不等式

§ 18 一次不等式	165
85. 一次不等式	166
86. 一次不等式组	168
§ 19 二次不等式	170
87. $D > 0$ 的二次 不等式	172
88. $D \leq 0$ 的二次 不等式	174
89. 含有绝对值符号 $ $ 的二次不等式	176
90. 不等式系数的确定	178
91. 二次方程根的符号	179
§ 20 各种不等式	181
92. 高次不等式(1)	182
93. 高次不等式(2)	183
94. 分式不等式	184
§ 21. 不等式的应用问题	186
95. 应用问题(1)	186

96. 应用问题(2)	188
§ 22 不等式的证明	189
97. $A^2 + B^2 + C^2$ 型	191
98. 定符号的二次式 的应用	193
99. 算术平均与几何 平均定理	196
100. (算术平均) $\geq$ (几 何平均) 和最大 值与最小值	198
101. 平方后比较大小	199
102. 含有 $ $ 记号的 不等式的证明	201
103. 带条件式的 不等式(1)	203
104. 带条件式的 不等式(2)	205
105. 带条件式的 不等式(3)	206
106. 三个以上数的 大小问题	208
107. 分别情况的 大小问题	210

第五章 函数与图象

§ 23 二次函数	212
108. $y = ax^2$ 图象的 平移	214
109. 二次函数的图象、 顶点和轴	215
110. 求二次函数的问题	217

111. 含有符号 $ $ 和 $[\]$ 的函数的 图象(1)	218
112. 含有符号 $ $ 和 $[\]$ 的函数的 图象(2)	220
113. 分别情况的图象...	222
114. 系数与图象的关系	224
115. 二次函数与二次 方程根的关系...	226
116. 抛物线和直线.....	227
117. 实根的个数.....	229
118. 方程的根与某数 之间的大小关 系(1)	230
119. 方程的根与某数 之间的大小关 系(2)	232
120. 恒为正的条件.....	234
§ 24 二次函数的最大值 与最小值	236
121. 二次函数的最大 值和最小值.....	237
122. 二次函数最大值、 最小值和系数 的确定.....	239
123. 限制定义域内的最 大值和最小值 (1)	241
124. 限制定义域内的最 大值和最小值 (2)	243
125. 二元二次函数的最	

..... 最大值和最小值...	244
126. 带条件式的最大值 和最小值.....	246
127. 判别式的应用.....	247
128. 绝对不等式的应用	249
129. 应用问题 (最大值 和最小值) (1) ...	251
130. 应用问题 (最大值 和最小值) (2) ...	252
131. 应用问题 (最大值 和最小值) (3) ...	254
§ 25 各种函数和图象	256
132. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的图象	258
133. 分数函数的值域...	260
134. 分数函数的最大 值和最小值.....	262
135. 无理函数的图象...	263
136. 无理函数的最大 值和最小值.....	265
137. 图象的公共点个数	267

第六章 指数函数和 对数函数

§ 26 指数函数	269
138. 指数的扩展(1) ...	270
139. 指数的扩展(2) ...	272
140. 指数大小的比较	274
141. 指数函数的图象...	275
§ 27 对数函数	277

142. 对数的性质.....	279
143. 换底公式.....	281
144. 对数函数的图象...	282
145. 对数大小的 比较(1)	284
146. 对数大小的 比较(2)	286
§ 28 指数和对数方程	287
147. 解指数方程 (换元型)	288
148. 指数方程.....	289
149. 对数方程.....	290
150. 等式的证明.....	292
§ 29 指数和对数不等式 ...	294
151. 指数不等式(1) ...	295
152. 指数不等式(2) ...	296
153. 对数不等式(1) ...	298
154. 对数不等式(2) ...	299
155. 不等式的证明.....	301
156. 对数的最大值和 最小值.....	303
157. 系数为对数的方程	305
158. 对数方程、 不等式和图象...	306

第七章 三角函数

§ 30 三角比	309
159. 正弦, 余弦, 正切	310
160. 特殊角的三角比值	310
161. 三角比的相互关	

系.....	312
162. 测量问题.....	314
§ 31 一般角的三角函数 ...	316
163. 弧度法与扇形.....	318
164. 扇形和弓形.....	320
165. 一般角和动径.....	322
§ 32 三角函数的计算	324
166. 三角函数的值.....	326
167. 三角函数式的值...	328
168. 等式的证明.....	330
169. 消去问题.....	331
170. 三角方程(1)	333
171. 三角方程(2)	335
172. 三角不等式.....	336
173. 三角函数的最大 值与最小值.....	338
§ 33 三角函数的图象	340
174. 三角函数的图象 和周期.....	341
175. 周期函数.....	343
176. 周期运动.....	345
177. 图象的合成.....	346
178. 各类函数的性质...	348
§ 34 在三角形上的应用 ...	352
179. 正弦定理.....	354
180. 余弦定理.....	355
181. 正弦定理和余弦 定理的应用.....	357
182. 三角形的解法.....	359
183. 三角形的面积.....	361
184. 各种图形的面积...	363
185. 三角形的形状.....	364
186. 图形的性质.....	366
习题解答	369

第一章 式的运算

§ 1 整式的乘除

基础知识

1. 整式

对所着眼的字母进行加、减、乘范围内计算的式子叫做整式。

$\frac{1}{2}x^2y - 3x + 4y + \frac{2}{5}$ 对于 x 是二次整式, 对于 y 是一次整式, 对于 x, y 是三次整式。

2. 同类项

对所着眼的字母形式相同的单项式, 如 $2x^2y$ 和 $-3x^2y$, 叫做同类项。同类项的和可以合并为一个项。

3. 基本运算法则

$$a + b = b + a \quad (\text{加法交换律})$$

$$ab = ba \quad (\text{乘法交换律})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{加法结合律})$$

$$(ab)c = a(bc) \quad (\text{乘法结合律})$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (\text{分配律})$$

4. 指数律

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m > n),$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

5 括弧的用法

$$a + (b - c) = a + b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c$$

6 展开

$$(a+b)(c+d-e) = ac + ad - ae + bc + bd - be$$

7. 除法与余式

整式 A 除以整式 B , 就是求如 $A = BQ + R$ 这样的整式中的商 Q 和次数低于 B 的余式 R .

除法运算时, 整式 A 、 B 应从次数高的项开始按顺序降低 (降幂顺序) 排列。

8. 整式的整理

(1) 按某字母降幂排列: $ax^2 + bx + c$

(2) 按罗马字母排列: $ab + ac + bc$

(3) 轮环型: $bc + ca + ab$

(4) 集中同形项型: $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$

含有关于所着眼字母的除法运算的式子是分式, 含有根号的式子是无理式。整数 A 除以 B , 就是求解 $A = BQ + R$ 这样的整数的商 Q 和小于 B 的余数 R 。

此时, 所谓“小于 B ”, 在整式除法中, 相当于“次数低于 B ”。



图 1.1

1. 整式的乘法

问 题 试计算下列各式：

$$(1) 2x^3y \times (-3xy^2)^2 \quad (2) (x^3+3-2x)(2+x^2-3x)$$

【技巧】 (1) 数与数、 x 与 x 、 y 与 y 各自相乘时，应准确地遵循下述指数法则。

理论： $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$.

(2) 如果开始就按降幂排列整理好，则往后的运算会更容易，例如：

$$\begin{aligned} & (x^3 - 2x + 3)(x^2 - 3x + 2) \\ &= x^3(x^2 - 3x + 2) - 2x(x^2 - 3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 2) \\ &= x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 3x^2 - 9x + 6 \\ &= x^5 - 3x^4 + 9x^2 - 13x + 6 \end{aligned}$$

可以写成“长城式”，也可以写成便于合并同类项的纵向重叠的“高楼式”。计算中除应用上述指数法则外，还可以自如地运用分配律、交换律和结合律（参考本节基础知识）。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad 2x^3y \times (-3xy^2)^2 &= 2x^3y \times 9x^2y^4 \quad \leftarrow (abc)^n = a^n b^n c^n. \\ &= (2 \times 9)(x^3 \times x^2)(y \times y^4) = 18x^5y^5 \quad \leftarrow am a_n = a^{m+n}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^3 \quad - 2x + 3 \quad \leftarrow \text{因缺 } x^2 \text{ 项而空着.}$$

$$\begin{array}{r} \times) \quad x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^5 \quad - 2x^3 + 3x^2 \quad \leftarrow x^3(x^2 - 3x + 2), \text{按 } x^2 \text{ 下面写.} \\ - 3x^4 \quad + 6x^2 - 9x \quad \leftarrow -3x(x^2 - 3x + 2), \text{按 } -3x \text{ 下面写.} \\ \quad 2x^3 \quad - 4x + 6 \quad \leftarrow 2(x^2 - 3x + 2), \text{按 } 2 \text{ 下面写.} \\ \hline x^5 - 3x^4 \quad + 9x^2 - 13x + 6 \quad \leftarrow \text{合并同类项.} \end{array}$$

【研究】 (2)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & -2 & 3 \\
 \times) & 1 & -3 & 2
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & -2 & 3 \\
 & -3 & 0 & 6 & -9 \\
 & & 2 & 0 & -4 & 6
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & -3 & 0 & 9 & -13 & 6
 \end{array}
 \end{array}$$

积 $x^5 - 3x^4 + 9x^2 - 13x + 6$

【注意】 这种研究方法叫做分离系数法。积的最高次数变成 $x^3 \times x^2 = x^5$ ，以下按顺序降次。

习 题 1

1. 试计算下列各式：

(1) $(3x + x^3 - 2x^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)$

(2) $(a^3 + 2a^2b - 3b^3)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

2. 试证明下列等式成立：

(1) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(2) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

2. 整式的除法

问 题 试计算下列各式：

(1) $(-8x^5y^2z^3) \div (2xy^4z^3)$

(2) $(2x^3 + x + 7) \div (2x + x^2 - 1)$

【技巧】 (1) 数与数、 x 与 x 、 y 与 y 、 z 与 z 各自相除时，应遵循下述法则。

理论：若 $m > n$ ，则 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ，若 $m = n$ ，

则 $\frac{a^m}{a^n} = 1$ ，若 $m < n$ ，则 $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ 。

(2) 按降幂顺序排列，其形式与数的除法相同。除法各步的商由各首项相除而定（一开始 $2x^3 \div x^2$ 的商为 $2x$ ），因此比整数的除法还容易。

【解答】 (1)
$$\frac{-8x^5y^2z^3}{2xy^4z^3} = \frac{-8}{2} \cdot \frac{x^5}{x} \cdot \frac{y^2}{y^4} \cdot \frac{z^3}{z^3}$$

$$= -\frac{4x^4}{y^2}$$

←可以省略中间计算。

(2)
$$\begin{array}{r} 2x-4 \\ x^2+2x-1 \overline{) 2x^3 + x + 7} \\ \underline{2x^3+4x^2-2x} \\ -4x^2+3x+7 \\ \underline{-4x^2-8x+4} \\ 11x+3 \end{array}$$

←因无 x^2 项而空着。
 ←商为 $2x^3 \div x^2 = 2x$ ，写成 $2x(x^2+2x-1)$
 ←商为 $-4x^2 \div x^2 = -4$ ，写成 $-4(x^2+2x-1)$
 ←次数低于除式(二次)时为余式。

答 商为 $2x-4$ ，余式为 $11x+3$ 。

【研究】 (2) 用分离系数法时写为

$$\begin{array}{r} 2 \quad -4 \\ 1 \ 2 \ -1 \overline{) 2 \quad 0 \quad 1 \quad 7} \\ \underline{2 \quad 4 \quad -2} \\ -4 \quad 3 \quad 7 \\ \underline{-4 \quad -8 \quad 4} \\ 11 \quad 3 \end{array}$$

←因商为 $2x^3 \div x^2 = 2x$ ，故先从 x 的一次方写起。
 ←余式按从后往前的顺序先写常数项后写一次项。

商为 $2x-4$ ，余式为 $11x+3$

圖, $n < 10$ 時, S_n 與

$$-2x + x^2) \quad (2)$$

$$\div (a^2 - 2ab - 3b^2)$$

1) 根据已知条件，求出未知数。

(D) (審判)

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2) \quad \begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 2 & \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & \\ & -2 & -2 & \\ & -2 & -4 & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & & & -3 \end{array} \end{array}$$

答 商式为 $x^2 - 2x + 2$,
余数为 -3 .

法，但费时多，因为：

必须写成相同的数字，然

把相同的数在下面又写下