

offcn 中公·教师考试 严格依据最新国家教师资格考试大纲编写

2015 最新版

国家教师资格考试 专用教材

数学学科知识与教学能力 高分通关题库

【适用于全国统考省市】

高 级 中 学

中公教育教师资格考试研究院◎编著

考点最全 预测最准 专项特训 快速提分

购书
立享

中公教师资格课程优惠,凭此书报班立减

50 元

offcn中公·教师考试 | 严格依据最新国家教师资格考试大纲编写

2015 最新版

国家教师资格考试专用教材

数学学科知识与教学能力

高分通关题库(高级中学)

中公教育教师资格考试研究院◎编著

兴界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力高分通关题库. 高级中学 / 中公教育教师资格考试研究院编著. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2014.11

国家教师资格考试专用教材

ISBN 978-7-5100-8963-3

I. ①数… II. ①中… III. ①中学数学课-教学法-高中-中学教师-资格考试-习题集
IV. ①G633.602-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 270254 号

国家教师资格考试专用教材·数学学科知识与教学能力高分通关题库(高级中学)

编 著: 中公教育教师资格考试研究院

责任编辑: 夏 丹 王 磊

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

开 本: 889 mm×1194 mm 1/16

印 张: 14

字 数: 336 千

版 次: 2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-8963-3

定 价: 39.00 元

如有质量或印装问题, 请拨打售后服务电话 010-82838515

目录

第一篇 单项选择题

专题一 数学分析	(1)
考点归纳	(1)
考试重点	(1)
考试难点	(1)
历年真题回放	(1)
考题分析与预测	(4)
预测试题	(4)
参考答案及解析	(9)
专题二 高等代数	(13)
考点归纳	(13)
考试重点	(13)
考试难点	(13)
历年真题回放	(13)
考题分析与预测	(15)
预测试题	(15)
参考答案及解析	(18)
专题三 空间解析几何	(21)
考点归纳	(21)
考试重点	(21)
考试难点	(21)
历年真题回放	(21)
考题分析与预测	(22)
预测试题	(23)
参考答案及解析	(23)
专题四 概率论与数理统计	(24)
考点归纳	(24)
考试重点	(24)
考试难点	(24)
历年真题回放	(24)
考题分析与预测	(24)

预测试题	(24)
参考答案及解析	(27)
专题五 中学数学学科知识	(29)
考点归纳	(29)
考试重点	(29)
考试难点	(29)
历年真题回放	(29)
考题分析与预测	(31)
预测试题	(31)
参考答案及解析	(37)
专题六 课程知识与教学知识	(42)
考点归纳	(42)
考试重点	(42)
考试难点	(42)
历年真题回放	(42)
考题分析与预测	(43)
预测试题	(43)
参考答案及解析	(46)

第二篇 简答题

专题一 数学分析	(48)
考点归纳	(48)
考试重点	(48)
考试难点	(48)
历年真题回放	(48)
考题分析与预测	(49)
预测试题	(49)
参考答案及解析	(53)
专题二 高等代数	(58)
考试重点	(58)
考点归纳	(58)
考试难点	(58)
历年真题回放	(58)
考题分析与预测	(59)
预测试题	(59)
参考答案及解析	(62)
专题三 空间解析几何	(66)
考点归纳	(66)

考试重点	(66)
考试难点	(66)
历年真题回放	(66)
考题分析与预测	(67)
预测试题	(67)
参考答案及解析	(70)
专题四 概率论与数理统计	(75)
考点归纳	(75)
考试重点	(75)
考试难点	(75)
历年真题回放	(75)
考题分析与预测	(76)
预测试题	(77)
参考答案及解析	(79)
专题五 中学数学学科知识	(82)
考点归纳	(82)
考试重点	(82)
考试难点	(82)
历年真题回放	(82)
考题分析与预测	(83)
预测试题	(83)
参考答案及解析	(88)
专题六 课程知识与教学知识	(96)
考点归纳	(96)
考试重点	(96)
考试难点	(96)
历年真题回放	(96)
考题分析与预测	(100)
预测试题	(100)
参考答案及解析	(106)

第三篇 解答题

考点归纳	(114)
考试重点	(114)
考试难点	(114)
历年真题回放	(114)
考题分析与预测	(116)
预测试题	(116)

138 参考答案及解析 (121)

第四篇 论述题

考点归纳 (130)
考试重点 (130)
考试难点 (130)
历年真题回放 (130)
考题分析与预测 (133)
预测试题 (133)
参考答案及解析 (137)

第五篇 案例分析题

考点归纳 (151)
考试重点 (151)
考试难点 (151)
历年真题回放 (151)
考题分析与预测 (157)
预测试题 (157)
参考答案及解析 (172)

第六篇 教学设计题

考点归纳 (178)
考试重点 (178)
考试难点 (178)
历年真题回放 (178)
考题分析与预测 (185)
预测试题 (185)
参考答案及解析 (191)

2015 年全国教师资格证统考笔试面授辅导课程 (212)
2015 年全国教师资格证统考面试面授辅导课程 (213)
中公教育·全国分校一览表 (216)

第一篇

单项选择题

专题一 数学分析

考点归纳

数列极限、函数极限的含义和运算;函数连续性的概念性质和判断方法,函数的一致连续;导数的概念及应用,微分的概念;微分中值定理;积分的定义,定积分和不定积分的计算;函数列的一致收敛的定义及判定。

考试重点

数列极限、函数极限的计算;函数连续性的判定,函数连续性的性质;微分中值定理。

考试难点

函数极限和函数连续的综合考查,微分中值定理。

历年真题回放

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x > 1, \\ 1, & x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处()。(2012 年下半年真题)

- A. 不连续
B. 连续,但不可导
C. 连续,且有一阶导数
D. 有任意阶导数

【答案】C。解析:由 $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 2) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = f(1-0)$,可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续;又 $f'(1+0) = (2x-2)|_{x=1} = 0 = f'(1-0)$,且 $f''(1+0) = 2 \neq 0 = f''(1-0)$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有一阶导数。故选 C。

2. 设 $\{a_n\}$ 为数列, A 为定数。对于“对任意 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N ,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - A| < \varepsilon$ ”的否定(即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq A$)是()。(2012 年下半年真题)

- A. 存在 $\varepsilon > 0$,对任意正整数 N ,存在 $n > N$,使得 $|a_n - A| \geq \varepsilon$
B. 对任意 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N ,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - A| \geq \varepsilon$
C. 对任意 $\varepsilon > 0$,以及任意正整数 N ,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - A| \geq \varepsilon$
D. 存在 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N ,存在 $n > N$,有 $|a_n - A| \geq \varepsilon$

【答案】A。解析:若存在 $\varepsilon > 0$,对任意正整数 N ,存在 $n > N$,使得 $|a_n - A| \geq \varepsilon$,则称数列 $\{a_n\}$ 的极限不是 A ,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq A$,故选 A。

3. 函数 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 的图象与 x 轴交点的个数是()。(2012 年下半年真题)

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

5. 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的图象是连续的, 且方程 $f(x)=0$ 在 $(0, 4)$ 内仅有一个实数根, 则 $f(0) \cdot f(4)$ 的值()。

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 无法判断

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1}$ 的值是()。

- A. -1 B. $-\frac{2}{3}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$ 的值是()。

- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x}$ 的值为()。

- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. 0 D. -1

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ 的值为()。

- A. 4 B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

10. 对方程 $e^x = ax^2 + ex$ (其中 e 是自然对数的底数, $e \approx 2.71828$) 的根的描述正确的是()。

- A. 对任意的实数 a , 方程 $e^x = ax^2 + ex$ 必有根
 B. 对任意的实数 a , 方程 $e^x = ax^2 + ex$ 均无根
 C. 必存在正数 a , 使方程 $e^x = ax^2 + ex$ 有 3 个根
 D. 必存在负数 a , 使方程 $e^x = ax^2 + ex$ 有 3 个根

11. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f'(0)=0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = -1$, 则 $f(0)$ ()。

- A. 可能不是 $f(x)$ 的极值 B. 一定是 $f(x)$ 的极值
 C. 一定是 $f(x)$ 的极小值 D. 等于 0

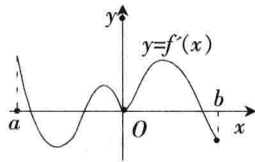
12. $f(x) = x(1-x)^2$ 有()个极值点。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

13. 函数 $y = e^{\alpha} + 3x$, $x \in \mathbf{R}$, 有大于零的极值点, 则()。

- A. $a > -3$ B. $a < -3$ C. $a > -\frac{1}{3}$ D. $a < -\frac{1}{3}$

14. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) , 导函数在 (a, b) 内的图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内极值点有()。

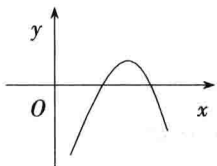


- A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个

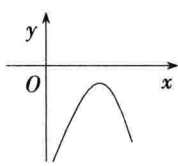
34. 已知曲线 $y=x^3-2x$ 和其上一点, 这点的横坐标为 2, 求曲线过这点的切线方程()。

- A. $y=x-2$
- B. $y=10x-16$
- C. $y=10x-16$ 或 $y=x+2$
- D. $y=10x-2$

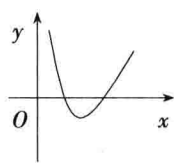
35. 函数 $f(x)=4\ln x-x^2$ 的大致图象是()。



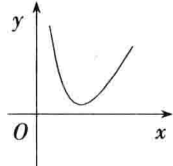
A



B



C



D

36. 若 $\int_1^a (2x + \frac{1}{x}) dx = 3 + \ln 2$, 则 a 的值是()。

- A. 6
- B. 4
- C. 3
- D. 2

37. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$ 的值为()。

- A. 0
- B. $\frac{\pi}{4}$
- C. 2
- D. 4

38. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \end{cases}$ 则 $\int_0^2 f(x) dx$ 等于()。

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $\frac{4}{5}$
- C. $\frac{5}{6}$
- D. 不存在

39. $\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx = ()$ 。

- A. 1
- B. $\frac{\pi}{4}$
- C. $\frac{\pi}{2}$
- D. π

40. 根据定积分的定义, $\int_0^2 x^2 dx = ()$ 。

- A. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$
- B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$
- C. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{2}$
- D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$

【参考答案及解析】

1.【答案】B。解析：易知 $\lambda > 0$ ，故可排除 C、D，再取特殊值 $x=1$ ，结合图象可得： $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ ，故选 B。

2.【答案】A。解析：若 $\{a_n\}$ 为常数列，可知(1)为假命题；而由极限存在的唯一性，可知(2)也为假命题；对于(3)满足极限定义可知是正确的；对于(4)，由于 $n \rightarrow 10^{10}$ 与极限定义矛盾，应该趋于该数时不为 0，故(4)也为假命题。故选 A。

3.【答案】D。解析： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{4}$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值，又 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 可得 $x_0 = 4$ 。

4.【答案】D。解析： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ ，因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ，所以，当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限不存在。

5.【答案】D。

6.【答案】B。解析： $\because x \rightarrow 0$ 时， $(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$ ， $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 因此原式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}$ 。

7.【答案】B。解析： $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x \cos x)(x + \sin x \cos x)}{x^4}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x \cos x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3}$ ，

由洛必达法则有：上式 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{4}{3}$

8.【答案】D。解析：由洛必达法则有： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -1$ 。

9.【答案】D。解析：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{2}$ 。

10.【答案】C。

11.【答案】B。解析：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = -1$ ，故存在含有 0 的区间 (a, b) ，使当 $x \in (a, b)$ 且 $x \neq 0$ 时， $\frac{f'(x)}{x} < 0$ ，于是当 $x \in (a, 0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x \in (0, b)$ 时， $f'(x) < 0$ ，这样 $f(x)$ 在 $(a, 0)$ 上单调递增，在 $(0, b)$ 上单调递减。

12.【答案】C。

13.【答案】B。解析： $\because y' = ae^{\alpha x} + 3$ ，由题意方程 $ae^{\alpha x} + 3 = 0$ ，即 $ae^{\alpha x} = -\frac{3}{a}$ 有大于零的根， $\therefore \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{3}{a} < 1 \end{cases}$ ，解得 $a < -3$ 。

选 B。

14.【答案】C。解析：因为函数极值点满足导数为 0，且左右两侧导数一正一负，观察导函数图象，可得，满足条件的点为 3 个，故答案为 3。

15.【答案】C。解析：由已知得： $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -2$ ，可设 $f(x) = -2x + 8$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3f(x)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3(-2x + 8)}{x - 3} = 8$ 。

另解: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-3f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)+6-3f(x)}{x-3} = 2-3\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 2-3f'(3) = 8$ 。

16.【答案】B。解析:根据导函数图象可知当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) < 0$, 在 $x \in (-3, 1)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 。

\therefore 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减, 在 $(-3, 1)$ 上单调递增, 故④正确;

则-3是函数 $y=f(x)$ 的极小值点, 故①正确;

\therefore 在 $(-3, 1)$ 上单调递增, $\therefore -1$ 不是函数 $y=f(x)$ 的最小值点, 故②不正确;

\therefore 函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数大于0, \therefore 切线的斜率大于零, 故③不正确。

故答案为:①④, 选B。

17.【答案】A。解析: $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x+a) = f(1) = 1, \therefore -1+a=1, \therefore a=2$ 。

18.【答案】C。

19.【答案】D。解析:A选项:若 $f(x)$ 是连续的奇函数,

则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$, 所以正确;

B选项:若 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, 所以正确;

C选项:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且恒正, 则 $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b 0 dx = 0$, 所以正确;

D选项:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒正, 错误。

例如 $\int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{15}{4} > 0$, 但 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 不恒为正。

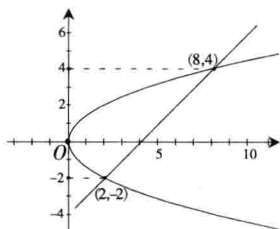
20.【答案】A。解析: $\int_0^1 |x^2-4| dx = \int_0^1 (4-x^2) dx = (4x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^1 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$ 。

21.【答案】D。解析: $F(x) = (2t-2t^{\frac{1}{2}}) \Big|_1^x = (2x-2x^{\frac{1}{2}}) - (2-2) = 2x-2x^{\frac{1}{2}}, \therefore F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 。

22.【答案】B。解析: $\int_0^1 (e^x+2x) dx = (e^x+x^2) \Big|_0^1 = (e+1) - (1+0) = e$ 。

23.【答案】D。解析:此题选取 y 为积分变量较容易。直线 $y=x-4$ 与抛物线 $y^2=2x$ 的交点为 $(2, -2)$,

$(8, 4)$ 。结合图象可知面积 $S = \frac{1}{2}(2+8) \times [4 - (-2)] - \int_{-2}^4 \frac{1}{2}y^2 dy = 30 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^4 = 30 - 12 = 18$ 。选D。



24.【答案】D。解析:令 $y = \int_0^1 (x^2+cx+c)^2 dx = \int_0^1 (x^4+2cx^3+c^2x^2+2cx^2+2c^2x+c^2) dx = \frac{1}{5} + \frac{7}{6}c + \frac{7}{3}c^2$, 令 $y' = 0$,

得 $c = -\frac{1}{4}$, 所以当 $c = -\frac{1}{4}$ 时, y 最小。

25.【答案】B。解析:令 $\sqrt{(x-a)(b-x)} = y (y \geq 0)$, 则 $(x-a)(b-x) = y^2$,