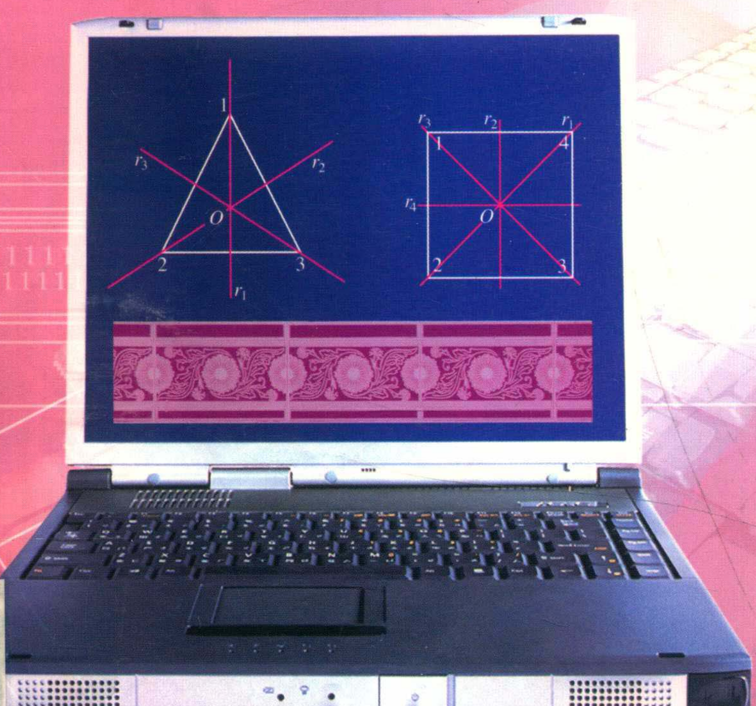
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–4

对称与群

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

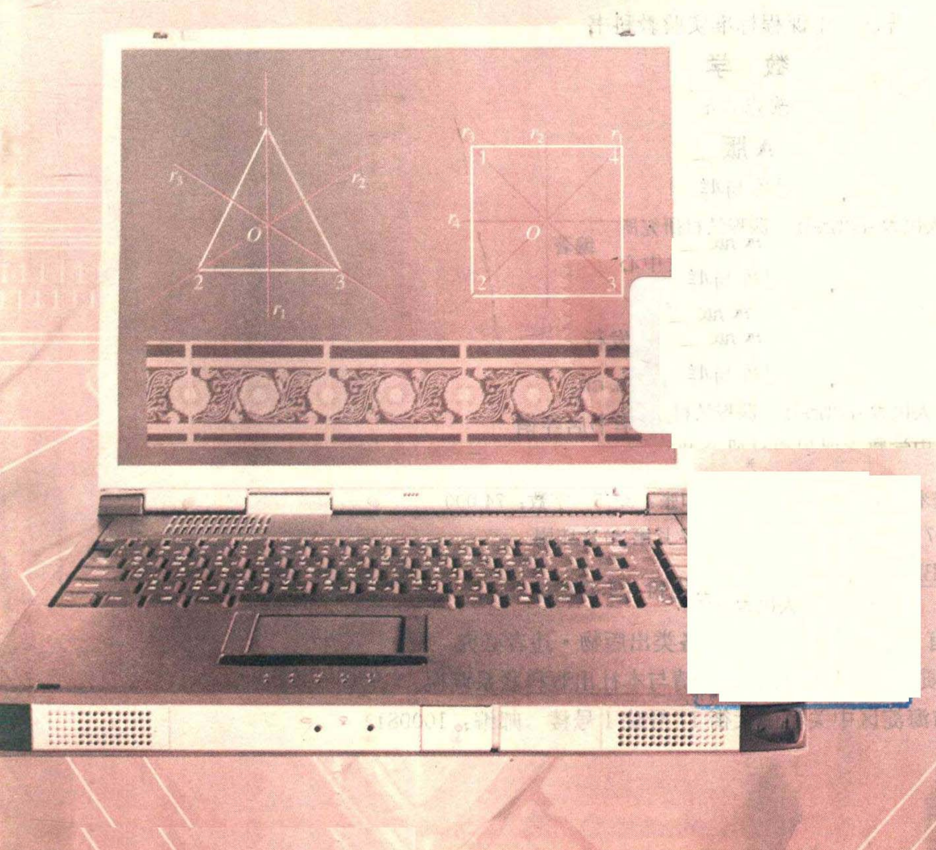
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–4

对称与群

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 3-4

A 版

对称与群

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张：3.75 字数：74 000

2007 年 1 月第 2 版 2010 年 7 月第 30 次印刷

ISBN 978-7-107-18021-7
G·11110（课） 定价：4.00 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：张英伯
主要编者：张英伯　宋莉莉
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，"数量关系与空间形式"，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究"数量关系与空间形式"的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，它是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而"数量关系与空间形式"、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

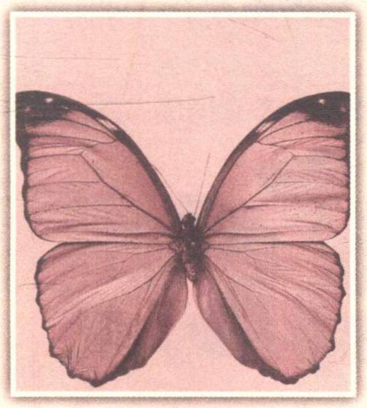
的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

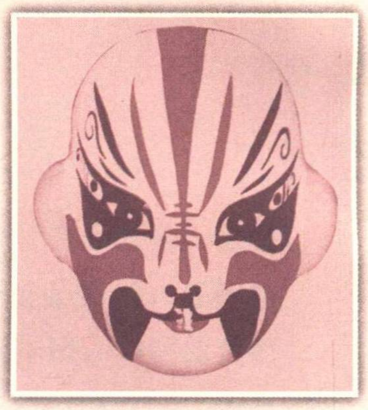
在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

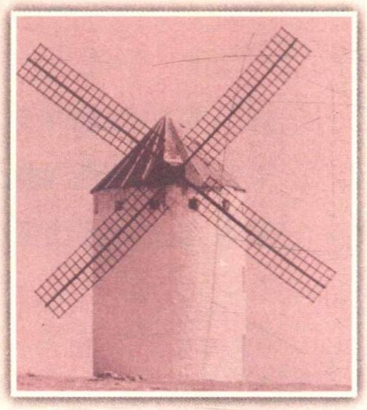
学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

学数学趁年轻. 同学们，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

目录







引言

观察我们身边的事物，可以发现，对称是现实世界和日常生活中大量存在的现象. 如图 0-1 中，人体具有轴对称性；蝴蝶的翅膀、昆虫的触角都有轴对称性；飞机、天平、剪纸图案等也具有轴对称性.

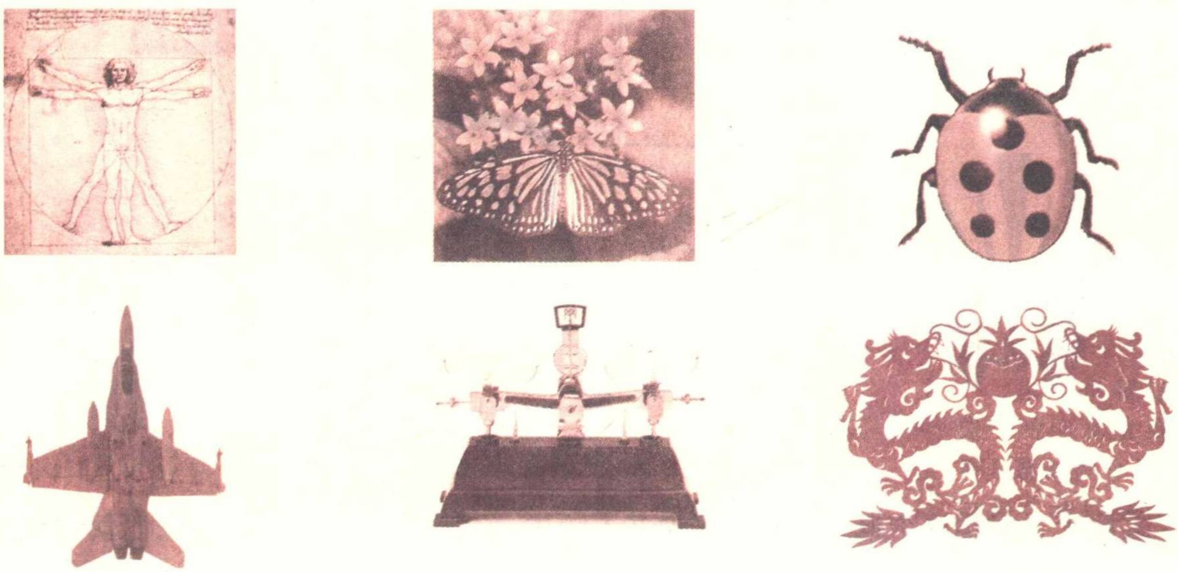


图 0-1

如图 0-2 中，花朵、时钟、雪花、风车、齿轮等具有中心对称性.

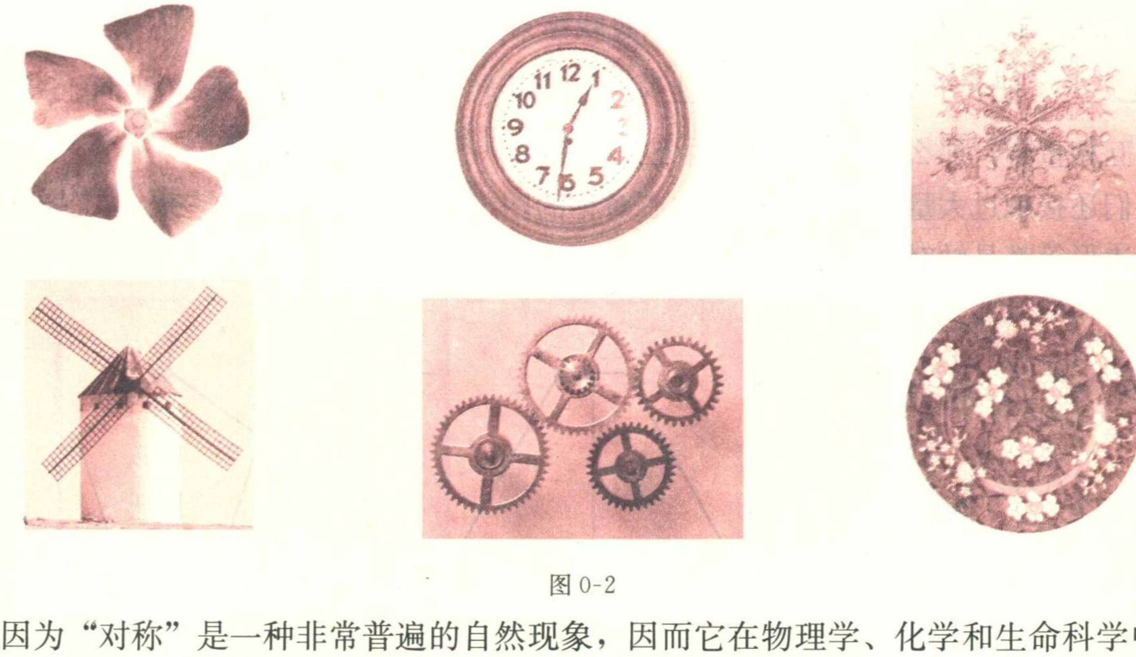
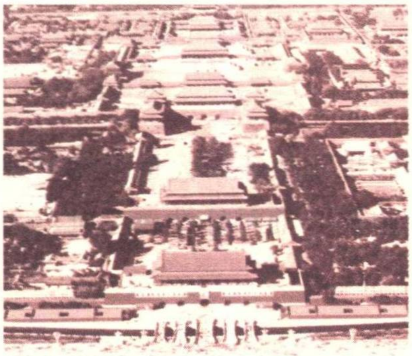


图 0-2

因为“对称”是一种非常普遍的自然现象，因而它在物理学、化学和生命科学中得到广泛的研究和应用；同样地，在数量关系、空间形式中“对称”现象也大量存在，因而它

也是数学中重要的对象，不但得到深入研究，而且形成了系统的数学理论；对称的和谐形态总是给人以强烈的美感，因此被大量应用于建筑、造型艺术、绘画和工艺美术中，我们从许多著名的中、外建筑，古、今的艺术珍品中都能找到具有对称性的事物（图 0-3）.

你能再举出一些具有轴对称、中心对称的事物吗？



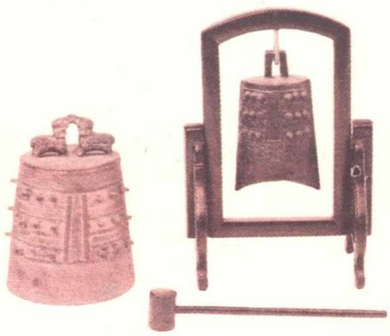


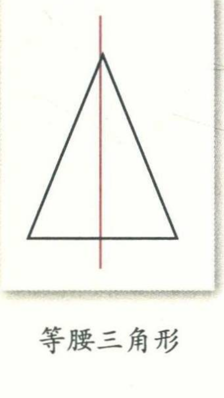
图 0-3

实际上，对称这个概念对我们来说并不陌生，在初中平面几何中，我们就学过下面两个关于对称图形的定义.

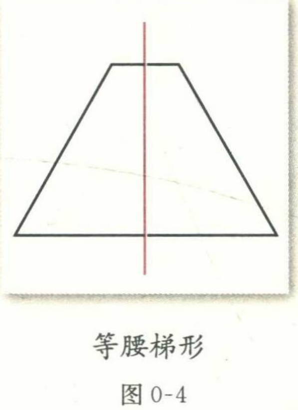
定义 1 如果一个平面图形沿着平面上一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做**轴对称图形**，这条直线称为它的**对称轴**.

定义 2 把一个平面图形绕平面上某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够和原来的图形互相重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**，这个点称为它的**对称中心**.

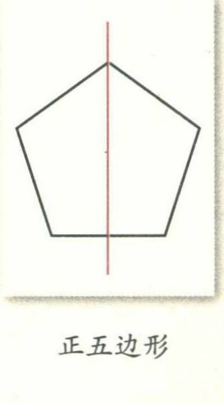
我们还接触过大量具有轴对称和中心对称的图形. 如图 0-4，等腰三角形、等腰梯形和正五边形等都是轴对称图形.



等腰三角形



等腰梯形



正五边形

图 0-4

如图 0-5，平行四边形、正六边形等都是中心对称图形.

平行四边形　　　　正六边形

图 0-5

如图 0-6，圆、正方形等既是轴对称图形，又是中心对称图形.

圆　　　　正方形

图 0-6

探究

1. 试找出上述 7 个图形的对称轴或对称中心.

2. 将正五边形绕它的中心至少旋转多少度才能与原来的图形重合？正六边形呢？

3. 圆的对称轴有多少条？把圆绕它的圆心旋转多少度就能够与原来的圆重合？

正是根据过圆心的任意直线都是圆的对称轴，绕圆心旋转任意角度都与原来的圆重合，古希腊毕达哥拉斯学派认为，圆是平面上最完美的图形.

对“对称性”的研究常常可以使我们加深对物体性质的认识. 在本专题中，我们将借助数学工具来研究各种各样的“对称性”，介绍关于“对称”的数学理论.

第一讲　平面图形的对称群

一　平面刚体运动

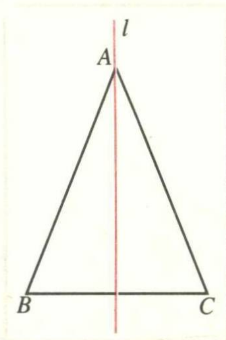


图 1-1

1. 平面刚体运动的定义

现在我们换一个角度来考察引言中的定义 1 和定义 2.

按照定义 1，等腰三角形是一个轴对称图形. 如图 1-1，把一个等腰$\triangle ABC$沿它的对称轴 l 折叠，则直线 l 两旁的部分完全重合.

观察

如图 1-2 所示，在一张纸（平面）上画一个等腰$\triangle ABC$，在它的底边的垂直平分线 AD 处放一面“双面镜”，并使镜面与纸面垂直. 在镜面的反射下，$\triangle ABC$ 被映成了什么图形？这个图形与$\triangle ABC$ 有什么关系？

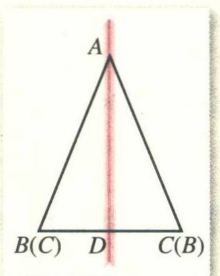


图 1-2

从“双面镜”中可以看到，点 B 被映到了点 C，点 C 被映到了点 B，$\triangle ABC$ 被映到了$\triangle ACB$，而且$\triangle ACB$ 与$\triangle ABC$ 是全等的.

由于镜面垂直于纸面，因此上述$\triangle ABC$ 关于镜面的反射可以看成是$\triangle ABC$ 关于它的底边垂直平分线 AD 的反射.

探究

如图 1-3，任意作一个等腰三角形 ABC，任取$\triangle ABC$ 上一点 P，作点 P 关于$\triangle ABC$ 底边垂直平分线 AD 的对称点 P'. 那么，A，B，C 关于直线 AD 的对称点分别是什么？$\triangle ABC$ 变成了什么图形？这个图形与$\triangle ABC$ 有什么关系？

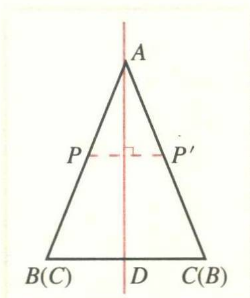


图 1-3

可以发现，A，B，C 的对应点分别是 A，C，B，即 A 保持不动，B 的对应点是 C，C 的对应点是 B. $\triangle ABC$ 被映成了与它全等的 $\triangle ACB$.

现在，代替等腰三角形，我们考察整个平面关于“双面镜”的反射.

我们知道，一个平面可以看成是点的集合，就像我们把直线看成点的集合一样. 设 α 是一个由平面内的所有点组成的集合，l 是这个平面内的一条直线，定义点集（平面）α 到其自身的一个映射

$$r: P \to P',$$

r 把平面 α 内的任意一点 P 映到点 P 关于直线 l 的对称点 P'（图 1-4）. 我们把这个映射称为**平面 α 关于直线 l 的反射**（reflection）. 数学上，把这样定义的反射称为平面 α 的一个**反射变换**.

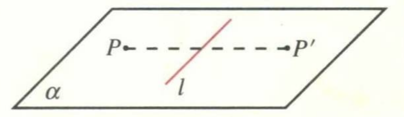


图 1-4

> 我们把平面看成一个点集，那么平面内的图形就是由它的边界上的点构成的集合.

可以知道，在反射变换 r 的作用下，平面 α 内的点被映到点，平面 α 内的图形被映到了与它全等的图形（图 1-5）.

这时，如果一个平面图形（如等腰三角形）在映射 r 的作用下仍与原来的图形重合，我们就称这个平面图形是一个**轴对称图形**.

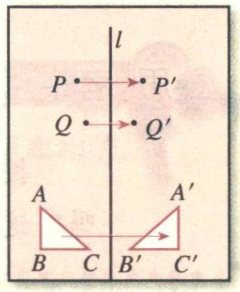


图 1-5

思考

按照这个定义，引言中的等腰梯形、正五边形都是轴对称图形吗？这个定义与引言中的定义 1 是等价的吗？

按照引言中的定义 2，正方形是一个中心对称图形.

如图 1-6，正方形 $ABCD$ 绕它的中心 O 逆时针旋转 $180°$后，得到的图形与原来的图形重合，其中，A，B，C，D 分别被转到了 C，D，A，B 的位置.

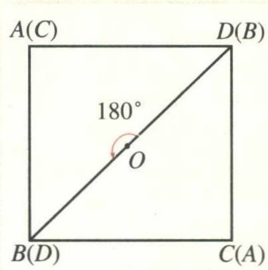


图 1-6

现在，代替正方形，我们考虑整个平面绕平面内一个固定点逆时针转 $180°$的旋转. 准确地说，设 α 是一个平面内所有点构成的集合，O 是平面 α 内的一个固定点，定义点集（平面）α 到其自身的一个映射

$$\rho: P \to P',$$

ρ 把平面 α 内的任意一点 P 绕点 O 旋转 $180°$后映到点 P'（图 1-7），这个映射称为以**点 O 为中心转 $180°$的旋转**（rotation）.

再看一下正方形的旋转. 如图 1-8，取正方形 $ABCD$ 的中心 O 为固定点，设 ρ 是以点 O 为中心转 $180°$的旋转. 那么，在 ρ 的作用下，正方形上任意一点 P 被映到了正方形上另一点 P'，正方形的顶点 A，B，C，D 依次被映到点 C，D，A，B，正方形 $ABCD$ 被映到

正方形 $CDAB$，显然这两个正方形重合.

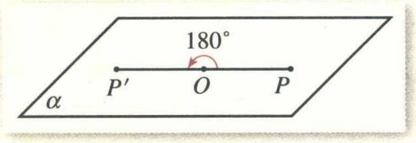


图 1-7

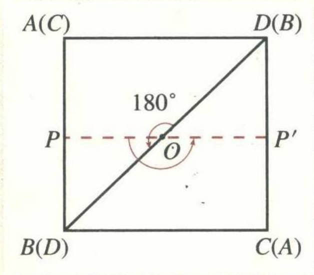


图 1-8

若没有特别说明，旋转的方向都是指逆时针方向.

一般地，如果一个平面图形在映射 ρ（以点 O 为中心转 180°的旋转）的作用下仍与原来的图形重合，我们就称这个平面图形是一个中心对称图形.

思考

按照这个定义，引言中的平行四边形、正六边形、圆都是中心对称图形吗？这个定义与引言中的定义 2 是等价的吗？

我们可以对以点 O 为中心转 180°的旋转进行推广. 请同学们自己定义一个映射，表示平面以一个固定点 P 为中心转任意给定角度的旋转. 这样定义的映射在数学上称为旋转变换.

旋转角度为 0°的旋转变换把平面上的所有点映到它自身. 这个映射使整个平面上的每个点都保持不动，所以称为恒等变换（identity transformation）.

探究

设 P，Q 是平面内的任意两点，在旋转（或反射）变换的作用下，它们的对应点分别是 P'，Q'. P'到 Q'的距离与 P 到 Q 的距离有什么关系？

可以发现，反射变换和旋转变换有一个共同的特点，即所谓“保距性”. 也就是说，对于平面内的任意两点 P 和 Q，在反射（或旋转）变换的作用下的对应点是 P'和 Q'，那么 P'到 Q'的距离等于 P 到 Q 的距离. 借用物理学中的一个名词，我们把这类“保持距离不变”的映射称为平面刚体运动.

探索在某种变换下的不变量或不变关系，是数学研究的重要问题.

为了方便，今后我们将不再区分平面 α 和其内的所有点组成的集合 α，即 α 既是一个平面的符号，又是一个平面内所有点组成的集合的符号.

定义 设 α 是一个平面，映射

$$m:\text{平面}\ \alpha\to\text{平面}\ \alpha$$

是一个一一映射❶，若 m 保持平面 α 内任意两点间的距离不变，则称 m 是一个平面刚体运动（the rigid motions of the plane）.

❶ 如果映射 $f: A\to B$ 满足：(1) A 中不同的元素在 B 中有不同的象；(2) B 中任意一个元素，在 A 中有一个原象，那么这个映射就叫做一一映射.

下面我们对上述定义作一个简单的解释. 任意一个平面刚体运动 m：平面 $\alpha\to$平面 α，都满足下面四条：

(1) 对于平面 α 内的任意一点 P，在平面 α 内存在唯一的一点 P' 与之对应，记作 $P'=m(P)$，P' 叫做 P 在 m 作用下的象；

(2) 任取平面 α 内的一点 P'，存在平面 α 内的点 P，使得 P' 是 P 在变换 m 作用下的象；

(3) 任取平面 α 内的两点 P_1，P_2，如果 $P_1\neq P_2$，那么它们的象也是不同的，即 $m(P_1)\neq m(P_2)$；

(4) 任取平面 α 内的两点 P，Q，它们在 m 下的象是 P'，Q'，即 $P'=m(P)$，$Q'=m(Q)$，那么 $|P'Q'|=|PQ|$，即点 P'，Q' 之间的距离与点 P，Q 之间的距离相等.

实际上，我们在过去的学习中碰到过许多平面刚体运动. 例如，我们熟悉的平移（translation）就是一类平面刚体运动.

你能举出一些平面刚体运动的例子吗？

设 α 是一个平面，点 O 是 α 内的一个定点，$\boldsymbol{v}$ 是一个以 O 为起点的定向量，平移是指平面内一个点到点的映射

$$t: P\to P',$$

t 把平面内的任意一点 P 映到点 P'，且满足 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\boldsymbol{v}$（图 1-9）.

这个映射在数学上称为平移变换. 在平移变换 t 的作用下，平面内的所有点沿定向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，移动了距离 $|\boldsymbol{v}|$.

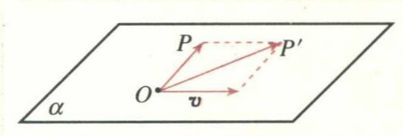


图 1-9

2. 平面刚体运动的性质

平面刚体运动 m：平面 $\alpha\to$平面 α 有哪些性质呢？保持距离不变是 m 的一个很强的性质. 可以证明，只要知道不共线的 3 个点 A，B，C 在 m 下的象 A'，B'，C'，m 就完全确定下来了（参见附录一）.

下面我们再来证明：在平面刚体运动 m 的作用下，正 n 边形的大小和形状都保持不变. 为了证明这个结论，我们先来证明下面这个命题.

命题 平面刚体运动

$$m:\text{平面}\ \alpha\to\text{平面}\ \alpha$$

将平面 α 内的直线映成直线，射线映成射线，线段映成等长的线段.

证明： 令 l 是平面 α 内的任意一条直线，设 m 把 l 上所有的点映到点集 l'.

在 l 上任取两点 A，B，设 m 把它们分别映到 A'，B'. 下面我们来证明 l' 是过点 A'，B' 的直线.

在 AB 上任取一点 C，设 m 把点 C 映到点 C'.

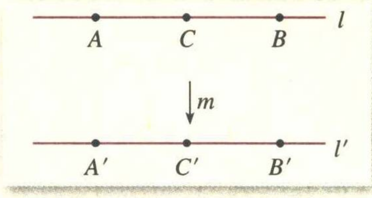


图 1-10

(1) 如图 1-10，当点 C 在 AB 之间时，由平面刚体运动的定义得

$$\begin{aligned}|A'C'|+|C'B'|&=|AC|+|CB|\\&=|AB|\\&=|A'B'|,\end{aligned}$$

所以点 C' 在线段 $A'B'$ 上.（为什么?）

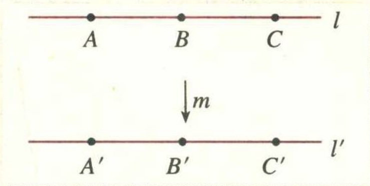


图 1-11

(2) 如图 1-11，当点 C 在 AB 的延长线上时，我们有

$$\begin{aligned}|A'B'|+|B'C'|&=|AB|+|BC|\\&=|AC|\\&=|A'C'|,\end{aligned}$$

所以 B' 在线段 $A'C'$ 上，即点 C' 在线段 $A'B'$ 的延长线上.

同理可证，当点 C 在 BA 的延长线上时，点 C' 在线段 $B'A'$ 的延长线上.

由点 A，B，C 的任意性可知，l' 是一条直线.

思考

如何证明平面刚体运动 m：平面 $\alpha\to$ 平面 α 将平面 α 上的射线映成射线，线段映成等长的线段?

下面，我们说明三角形在平面刚体运动的作用下，形状和大小都保持不变.

如图 1-12，设 $\triangle ABC$ 是平面 α 内的任意一个三角形，由已证命题可知，平面刚体运动

$$m：平面\ \alpha\to 平面\ \alpha$$

把线段 AB，BC，AC 依次映成线段 $A'B'$，$B'C'$，$A'C'$，

而且

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ AC=A'C'.$$

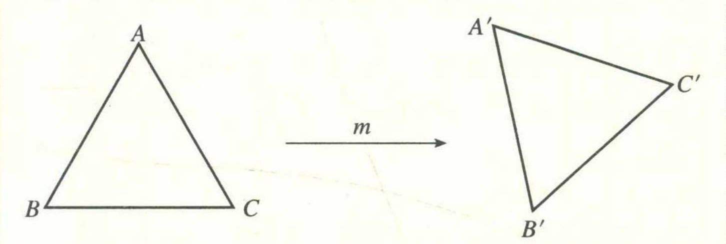


图 1-12

由于

$$AB+BC>AC,$$

故

$$A'B'+B'C'>A'C',$$

所以 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 构成了一个以 A'，B'，C' 为顶点的三角形，而且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是全等的.

探究

设正 n 边形 K 以 O 为中心，以点 A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant 3$）为顶点，说明在平面刚体运动的作用下，K 的大小和形状都保持不变，且顶点 A_1，A_2，…，A_n 的象仍是新的正 n 边形的顶点.

最后，我们讨论一类特殊的平面刚体运动. 设

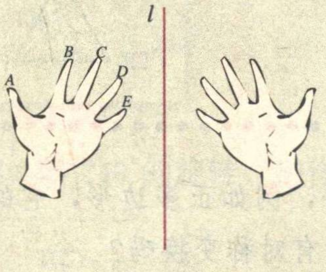
$$m\text{：平面 }\alpha\to\text{平面 }\alpha$$

是一个平面刚体运动，若在平面 α 内至少存在一个点 O，点 O 在 m 的作用下保持不动，即 $m(O)=O$，我们称 m 为有不动点的平面刚体运动.

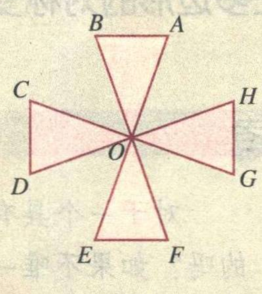
这类平面刚体运动在下面的学习中具有重要的地位. 我们知道，关于直线 l 的反射变换以 l 上所有的点为不动点；以点 O 为中心的旋转变换以点 O 为不动点. 有趣的是，有不动点的平面刚体运动只有旋转变换和反射变换（证明详见附录二）.

思考题

1. 标出下图中的点 A，B，C，D，E 在关于直线 l 的反射变换下的象.
2. 依次标出下图中的顶点 $A\sim H$ 在以点 O 为中心转 90°，180°，270° 的旋转变换下的象.



(1)



(2)