初中

ZhuChengJie ZhuBian

ChuZhongShuXueJieTiNengLiXunLian

全书分为:
知识要点
例题精讲
方法点拨
应用举例
自我测试
反馈练习

数学解题

全书分为:
知识要点
例题精讲
方法点拨
应用举例
自我测试
反馈练习

能力训练

朱成杰 主编

文匯出版社

ZhuChengJie ZhuBian

ChuZhongShuXueJieTiNengLiXunLian

初中数学解题能力训练

（上）

朱成杰 主编

文匯出版社

《初中数学解题能力训练》
编写人员名单

主　　编　朱成杰
副 主 编　姚志严　何若华
编写人员　（按姓氏笔划排列）
王维嘉　孔秀英　朱成杰
朱廷枚　李世廷　何若华
汪文英　张舜发　姚志严
赵　伟　赵华毅　谈小芳
戴和平

前　　言

本书以新教材为依据，从最新《全日制中学数学教学大纲》和有关考纲出发，配合数学教学改革，按课本内容分章同步进行学习指导，全书溶进了编者数十年的教学经验和最新教学研究成果。

每章内容包括：(一)知识要点。列出全章重点和关键，并对难点加以辅导；(二)例题精讲。精选典型例题详细剖析，使学生能举一反三、触类旁通；(三)方法点拨。对学习方法和数学思想方法进行指导，让学生能在较高层次上掌握知识；(四)应用举例。应用所学知识解决实际问题，这已成为当今教学改革和考试改革的一个重要方面；(五)自我测试。自我检查掌握知识的情况，分 A、B 卷供程度不同学生选用；(六)反馈练习。根据自测结果，按表中提示针对性选做适量练习，既能切实提高解题能力，又使学生负担减轻，免遭题海之苦。书中所有练习均附答案。

本书内容最新，基础扎实，辅导性强，注重能力训练，“方法点拨”、“应用举例”、“反馈练习”尤具特色。本书是初中生学好数学的好帮手，对广大教师亦有参考作用。

限于水平，疏漏之处难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

1997 年 10 月

目　录

（上册）

代数部分

代数部分

第一章　有理数

一、有理数的意义

【知识要点】

1. 有理数的意义

在引进负数概念以后，自然数也叫做正整数；分数也有正分数和负分数之分.

正整数、零、负整数，统称为整数.

整数和分数统称为有理数.

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

2. 数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线称为数轴. 原点、方向、长度单位称为数轴三要素.

3. 相反数

有理数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数，零的相反数是零. 互为相反数的两个数它们的绝对值相等，而符号相反，它们的和为零. 数轴上，表示互为相反数的两个有理数的点位于原点两

侧，且与原点的距离相等. 应注意相反数与倒数的区别：a、b 互为相反数，有而且只有 $a+b=0$；而 a、b 互为倒数，有而且只有 $a \cdot b=1$.

4. 绝对值

一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零. 一个数的绝对值的几何意义，是数轴上表示这个数的点到原点的距离.

5. 比较有理数的大小

关于有理数大小的比较有：正数都大于零，负数都小于零，正数大于所有负数；两个负数，绝对值大的数反而小.

【例题精讲】

例 1　下列说法是否正确？为什么？

(1) 0 是最小的有理数.

(2) 一个有理数，如果不是负数，就是正数.

(3) 一个有理数，如果不是分数，就一定是整数.

解　(1) 不正确. 由有理数的定义可知，正整数、正分数、零、负整数、负分数都是有理数，其中零小于任何正数，而大于任何负数，例如 $0>-1$，所以 0 不是有理数中最小的一个数.

(2) 不正确. 由有理数定义可知，0 是有理数，但既不是正数，又不是负数.

(3) 正确. 因为这个说法是符合有理数的定义的，即整数和分数统称为有理数.

说明　要判断一种说法是否正确，只要根据有关概念的定义来判定. 对于一个不正确的说法，也可以举出一个不正确的例子来说明. 这种例子常称为“反例”. 举反例也是说明错误结论的一种方法.

例 2　填空：

(1) 一个数的相反数是正数，那么这个数一定是________数.

(2) 数轴上有一点到原点的距离为 4，那么这点表示的数是________.

(3) 绝对值等于 5 的数是________.

(4) 大于 -5 而小于 3 的整数是________________.

(5) 绝对值最小的数是________；写出绝对值小于 1 的两个正数是________.

解 (1) 负数.

(2) $+4$ 或 -4.

(3) $+5$ 或 -5.

(4) -4、-3、-2、-1、0、1、2.

(5) 零；$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$.

例 3 写出下列各数的相反数、倒数、绝对值：

(1) -5；(2) $0.\dot{3}\dot{7}$；(3) $a-1$.

解 (1) -5 的相反数、倒数、绝对值分别是 5，$-\frac{1}{5}$，5.

(2) 先将 $0.\dot{3}\dot{7}$ 化为分数 $0.\dot{3}\dot{7}=\frac{37}{99}$，由此，$0.\dot{3}\dot{7}$ 的相反数、倒数、绝对值分别是 $-\frac{37}{99}$，$\frac{99}{37}$，$\frac{37}{99}$.

(3) $a-1$ 的相反数是 $1-a$.

如果 $a\neq1$ 时，那么 $a-1$ 的倒数是 $\frac{1}{a-1}$.

$a-1$ 的绝对值是 $|a-1|=\begin{cases}a-1 & (\text{当 } a\geqslant1 \text{ 时})\\1-a & (\text{当 } a<1 \text{ 时})\end{cases}$

例 4 比较下列各组数的大小：

(1) 0 和 -1.2；　　(2) $\frac{1}{4}$ 和 -4；

(3) $-\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{5}{7}$；　　(4) $2\frac{1}{4}$ 和 $\left|-2\frac{2}{3}\right|$；

(5) $-\left|-\frac{3}{5}\right|$ 和 $-\frac{3}{5}$.

解　(1) ∵负数都小于零，∴$0>-1.2$.

(2) ∵正数大于所有负数，∴$\frac{1}{4}>-4$.

(3) ∵$\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$，$\left|-\frac{5}{7}\right|=\frac{5}{7}$，而 $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}$，$\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$，

∴$\frac{5}{7}>\frac{2}{3}$，∴$-\frac{2}{3}>-\frac{5}{7}$.

(4) ∵$\left|-2\frac{2}{3}\right|=2\frac{2}{3}$，　而 $2\frac{1}{4}<2\frac{2}{3}$，

∴$2\frac{1}{4}<\left|-2\frac{2}{3}\right|$.

(5) ∵$\left|-\left|-\frac{3}{5}\right|\right|=\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$，$\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$，

∴ $-\left|-\frac{3}{5}\right|=-\frac{3}{5}$.

例 5　选择题：

根据图 1—1 指出下列说法中正确的是　(　　).

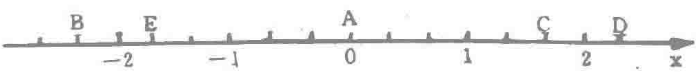

图 1—1

(A) 点 A 表示的数没有相反数

(B) 点 B 与点 C 表示的数是一对相反数

(C) 点 E 表示的数是 $-2\frac{1}{3}$

(D) 点 B 与点 D 表示的数的绝对值相等

解　对于(A)，点 A 表示的数是零，零的相反数是零，而不是没有相反数，所以(A)的说法不正确.

对于(B)，点 B 表示的数是 $-2\frac{1}{3}$，点 C 表示的数是 $1\frac{2}{3}$，符号相反，而 $\left|-2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3}$ 与 $\left|1\frac{2}{3}\right|=1\frac{2}{3}$ 不相等，所以点 B 与点 C 表示的数不是一对相反数，(B)的说法不正确.

对于(C)，由数轴上直观得出 E 点表示数为 $-1\frac{2}{3}$ 而不是 $-2\frac{1}{3}$，所以(C)说法不正确.

对于(D)，点 B 表示的数是 $-2\frac{1}{3}$，并且 $\left|-2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3}$；点 D 表示的数是 $2\frac{1}{3}$，并且 $\left|2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3}$，所以点 B 与点 D 表示的数绝对值相等，(D)的说法正确.

因此，应选择(D).

例 6　已知 $|a|=8$，$|b|=2$，$|a-b|=b-a$，求　$a+b$ 的值.

解　$\because |a|=8$，$\therefore a=\pm 8$；$\because |b|=2$，$\therefore b=\pm 2$；

又 $\because |a-b|=b-a$，$\therefore b\geqslant a$.

因此，b 取 $+2$，a 取 -8，或 b 取 -2，a 取 -8.

当 $b=2$，$a=-8$ 时，$a+b=2+(-8)=-6$；

当 $b=-2$，$a=-8$ 时，$a+b=-8+(-2)=-10$.

说明　这里应注意绝对值定义的正确应用，如果 $|a|=3$，那么 $a=\pm 3$，不要漏掉 -3；还应注意 $|a-b|=b-a$ 这个条件即 $b\geqslant a$.

二、有理数的运算

【知识要点】

在有理数范围内，可以进行有理数的加、减、乘、除、乘方等运算，这就是说，这些运算的结果仍旧是有理数.

有理数的运算必须按照运算顺序、运算律和运算法则进行.

1. 有理数的运算顺序

(1) 先进行第三级运算即乘方或开方，再进行第二级运算即乘或除，最后进行一级运算即加或减；

(2) 对于同一级运算，则从左到右依次运算；

(3) 如果有括号，一般就先进行括号里的运算，先小括号，后中括号、大括号.

2. 有理数的运算律

(1) 加法或乘法的交换律：

$$a+b=b+a; \quad a\cdot b=b\cdot a.$$

(2) 加法或乘法的结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c); \quad (ab)\cdot c=a(bc).$$

(3) 乘法对加法的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

3. 有理数的运算法则

(1) 加法法则：两数相加，同号的取原来的符号，并把绝对值相加；异号的取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；两个相反数相加得零；一个数同零相加仍得这个数.

(2) 减法法则：减去一个数等于加上这个数的相反数.

(3) 乘法法则：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对

值相乘;任何数同零相乘都得零.

(4) 除法法则:两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除;零除以任何一个不等于零的数都得零.

或者一个数除以另一个数,等于被除数乘以除数的倒数.应注意在除法中,零不能作除数.

(5) 有理数的乘方

求几个相同因数的积的运算叫做乘方.乘方的结果叫做幂.在 a^n 中,a 叫做底数,n 叫做指数,a^n 读作 a 的 n 次方.在 a^n 看作 a 的 n 次方的结果时,a^n 也可读作 a 的 n 次幂.

【例题精讲】

例 1 判断下列说法是否正确?为什么?

(1) 如果两个数的和与这两个数的积都是正数.那么这两个数符号相同.

(2) 互为相反数的两数,它们的商一定等于-1.

(3) 如果 a、b 是有理数,那么 a^2+b^2 一定是正数.

(4) 较小的数减去较大的数所得的差一定是负数.

解 (1)正确.由两数积是正数可得两数同号,又根据两数和为正数可知两数都是正数,因此两数符号相同.

(2) 不正确.因为零是不能做除数的.

(3) 不正确.因为 a、b 如果均为零,那么 $0^2+0^2=0$,而不是正数.

(4) 正确.从数轴直观得出,当两数的对应点在原点两侧,较小数为负数,较大数为正数,所得的差一定是负数;当两数对应点在原点右侧,均为正数,较小数减去较大数所得的差显然为负数;当两数对应点在原点左侧,较小数的绝对值大于较大数的绝对值,所得的差也是负数.

例 2 选择题:

下列各种说法，正确的个数有（　　）.

(1) 任何一个有理数的平方都是正数

(2) 没有一个有理数的平方是负数

(3) 任何有理数的偶次幂都是正数

(4) 任何负有理数的奇次幂都是负数

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

解　对于(1)，因为 0 是有理数，且 $0^2=0$，而 0 不是正数，所以不正确.

对于(2)，因为负有理数和正有理数的平方都是正数，零的平方是零，而正数和零都是非负数，所以正确.

对于(3)，因为 0 是有理数，且零的任何偶次幂都是零，而不是正数，所以不正确.

对于(4)，由乘方的意义和几个有理数相乘，积的符号法则可知是正确的. 故选(B).

例 3　填空：

(1) $0.25\times\left(-\frac{7}{8}\right)\times(-4)\times\left(1\frac{1}{7}\right)=0.25\times4\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{7}=1$，这个运算应用了________运算律.

(2) $64\times\frac{2}{5}-32\times\frac{4}{5}+78\times\frac{3}{10}-26\times\frac{7}{10}$

$=\frac{1}{5}\left(64\times2-32\times4+78\times\frac{3}{2}-26\times\frac{7}{2}\right)$

$=5\frac{1}{5}$，这个运算应用了________运算律.

(3) 当 n 为正整数时，$(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}=$________.

(4) 一个正整数是它的倒数的 9 倍，这个数是________.

(5) 在三个连续奇数中，如果中间的一个是 $2n+1$（n 为整数），那么其余的两个是________，________这三个连续奇数的和应是________.

解　(1) 乘法交换律.

(2) 乘法分配律.

(3) 0.

(4) 3.

(5) $2n-1, 2n+3, 6n+3$.

例 4　计算 $5\frac{1}{2}+1\frac{3}{5}+3\frac{3}{8}+2\frac{1}{6}+6\frac{2}{5}+4\frac{1}{3}+\frac{5}{8}$.

解　$$\begin{aligned}\text{原式}&=(5\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}+2\frac{1}{6})+(1\frac{3}{5}+6\frac{2}{5})+(3\frac{3}{8}+\frac{5}{8})\\&=12+8+4\\&=24.\end{aligned}$$

说明　本题如果先通分,后相加,计算很麻烦.我们根据分数单位$\frac{1}{n}$凑 n,利用加法的交换律和结合律,运用凑整的方法使 n 个分数之和凑成整数,就化繁为简方便多了.

例 5　计算　$3\frac{1}{4}-2\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}-48\times(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$.

解　$$\begin{aligned}\text{原式}&=(3-2+1-48\times\frac{1}{6}+48\times\frac{1}{8})+(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8})\\&=(3-2+1-8+6)+(\frac{2}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8})\\&=0+0\\&=0.\end{aligned}$$

说明　本题如果按照算式运算顺序计算较麻烦,巧用运算定律,把整数与分数分别结合起来计算,就简捷得多.

例 6　计算　$24\times98-1\frac{3}{8}\times644.6+588.8\times(-1\frac{3}{8})+233.4\times1\frac{3}{8}$.

解　原式 $=24\times(100-2)-1\frac{3}{8}\times(644.6+588.8-233.4)$.

$=2400-48-1\frac{3}{8}\times1000$

$=2400-48-1375$

$=977$.

说明　根据算式的具体情况，要善于应用运算律，特别是“乘法对于加法的分配律”的正向和逆向的应用.

例 7　计算 $(\frac{5}{4})^3\times(-3)\times(-8)^3-(-2)^4\times(-5)^3-(\frac{1}{2})^2\times(-293)-\frac{1}{2^2}\times53$.

解　原式 $=(\frac{5}{4}\times8)^3\times3+(2\times5)^3\times2+\frac{1}{4}\times293-\frac{1}{4}\times53$

$=10^3\times3+10^3\times2+\frac{1}{4}(293-53)$

$=5\times1000+\frac{1}{4}\times240$

$=5060$.

说明　本题利用 $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$，把 $(\frac{5}{4})^3\times(-8)^3$ 化为 $[\frac{5}{4}\times(-8)]^3$，把 $(-2)^4\times(-5)^3$ 化为 $[(-2)\times(-5)]^3\times(-2)$，再运用运算律就可使运算简化.

例 8　计算 $-3.5\div\frac{7}{8}\times(-\frac{8}{7})\div(-\frac{1}{2})$.