应用型本科（中职本科）数学规划教材

下册

高等数学

Advanced Mathematics

主　编　杨俊平

东北大学出版社
Northeastern University Press

应用型本科(中职本科)数学规划教材

高等数学

(下册)

主　编　杨俊平

副主编　刘连福　王秀艳　石业娇

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 杨俊平主编. —沈阳：东北大学出版社，2015.2
ISBN 978-7-5517-0911-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ① 杨…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第035941号

内容简介

本教材分上、下两册，上册主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，Mathematica使用简介（一）。下册主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、Mathematica使用简介（二）等几部分。教材中还编排了数学建模、应用与实践以及数学史话等阅读材料。教材配有预备知识模块，涵盖学习《高等数学》课程应必备的数学基础知识。每节内容分基础模块和扩展模块，配有A、B两组习题，书中例题习题选题覆盖面广，难度层次清晰。章后附有本章知识结构图及复习题，并配有习题参考答案。为方便教师和学生复习巩固，还编写了与之配套的《高等数学教学课件》、《高等数学同步训练》，同步发行。

本教材以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，充分体现了以应用为目的的教学原则。在保证数学知识系统性和严密性的基础上，合理安排内容，做到由浅入深、循序渐进、通俗易懂。部分节目标注星号，供不同专业学生选学。

本教材可作为各类应用型本科院校理工类、经济管理类大学生的《高等数学》教材，可供各类成人教育和自学考试人员使用，也可作为工程技术人员高等数学方面的参考书。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编：110819
电话：024—83680267（社务部）　83687331（市场部）
传真：024—83680265（办公室）　83680178（出版部）
网址：http：//www.neupress.com
E-mail:neuph@neupress.com
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：13.75
字　　数：326千字
出版时间：2015年2月第1版
印刷时间：2015年2月第1次印刷
组稿编辑：刘宗玉
责任编辑：刘乃义　　　责任校对：文　浩
封面设计：刘江旸　　　责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0911-8　　　定　价：35.00元

前言

进入21世纪以来，高等教育迅猛发展、科学技术日新月异，加之计算机的广泛应用及数学软件的普及，对基础课特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求。特别是最近几年，国家对应用型人才的培养尤其重视，提出了发展应用型本科教育的新理念。正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索应用型本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这套适于应用型本科理工、经管各专业使用的数学教材。

这套“应用型本科（中职本科）数学规划教材”是根据国家中长期教育改革和发展规划纲要要求，专门针对应用型本科（中职本科）学生，并兼顾专升本学生而编写的一套数学教材。教材内容充分考虑了学生的数学基础和实际水平，并结合数学课程教学内容体系改革，以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，充分体现了以应用为目的的人才培养目标，兼顾了不同专业后续课程教学对数学知识的要求，是对后续教学和学生可持续发展（继续教育）的一个恰到好处的基础支撑。

《高等数学》分为上、下两册，是这套教材中的两个分册，其特色如下。

1. 突出以应用为目的的教学原则，加强对学生应用意识的培养。

2. 打破传统教材的单一模式，构建高等数学内容体系三维模块结构。即预备知识模块、基础模块、扩展模块。其中，预备知识模块是针对学生数学基础参差不齐这一基本事实而设置的，目的是使每个学生通过预备知识的学习顺利过渡到基础模块的学习；基础模块面向全体学生，为必修模块；扩展模块面向有余力的学生，为选修模块。三大模块自成一体，又统为一体，可根据学生实际情况选取教学内容。

3. 对传统《高等数学》教材的内容进行重新整合，按探究、合作学习模式对教学内容进行合理安排，做到由浅入深、循序渐进、通俗易懂，淡化理论推导，强化应用实效。

4. 增加数学史话，以提高学生的数学修养。

5. 从实例引入问题，以问题为引线，在数学的应用、概念及其实际意义、数学思想方法等方面进行介绍。

6. 适度淡化深奥的数学理论，强化几何直观说明；适度淡化计算和计算技巧的训练，突出等式含义结果的解释。

7. 增加了应用与实践内容，引进了数学建模思想，使学生有能力根据生活和工作

中的实际问题所提供的条件，选择和应用有关数学模型或建立简单的数学模型。

8. 引入现代计算技术。

9. 为了方便教师教学和学生学习，同时制作了与本书相配套的多媒体教学课件，教学课件的设置符合学生的认识规律和思维过程，易于师生互动。

10. 另外，还出版了与本书相配套的《高等数学同步训练》，非常有利于学生的复习巩固。

《高等数学》上册包括预备知识模块，函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，Mathematica使用简介（一）等内容，预备知识模块涵盖了学习高等数学课程应必备的数学基础知识；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、拉普拉斯变换、Mathematica使用简介（二）等内容。每节内容分基础模块和扩展模块，大部分配有A、B两组习题，章末附有数学史话、应用与实践、知识结构图和复习题，书末附有积分表、习题答案等。带*号的内容供部分专业学生选学。

《高等数学》可作为各类应用型本科院校理工类、经济管理类大学生的高等数学课教材，亦可供各类成人教育和自学考试人员使用，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。教学基本学时按不少于120学时设计。

《高等数学》由杨俊平担任主编，刘连福、王秀艳、石业娇担任副主编。

参加《高等数学（下册）》编写工作的有：刘连福（第八章）、石业娇（第九章、第十三章）、冯丽（第十章）、王秀艳（第十一章）、康铁仁（第十二章）、杨俊平（第十四章、部分习题参考答案）。

尽管我们做出了许多努力，但由于水平所限，书中仍难免有不妥之处，希望使用院校和读者不吝赐教，并将意见及时反馈给我们，以便修订时改进。

所有意见、建议请发往：yjpdyx@163.com

编　者

2014年10月

目录

第八章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门数学学科，它在其他学科特别是工程技术上的应用比较广泛. 此外，在讨论多元函数微积分时，空间解析几何也能给多元函数提供直观的几何解释. 因此在学习多元函数微积分之前，先介绍空间解析几何的知识.

向量代数在后继课程和工程技术中有着广泛的应用. 本章首先建立空间直角坐标系，然后引进向量及其代数运算，最后以向量为工具来研究空间解析几何.

第一节　空间直角坐标系与向量代数

★　基础模块

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，人们曾经用了平面直角坐标系，现在为了确定空间一点的位置，就要引进空间直角坐标系. 过空间某一定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，并且通常取相同的长度单位. 这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴. 一般规定各轴正向要遵循右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向是 z 轴的正向. 如图 8-1 所示.

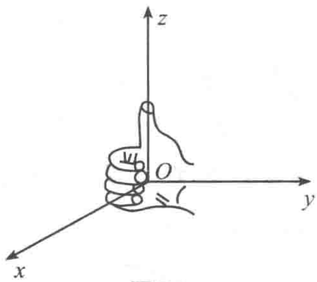

图 8-1

由任意两条坐标轴确定的平面称为坐标面. 由 x 轴和 y 轴，y 轴和 z 轴，z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别叫作 xOy 面，yOz 面和 zOx 面. 这些坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限，然后按 z 轴正逆时针看，依次为Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，对于分别位于Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ下面的四个卦限，依次为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，如图 8-2 所示.

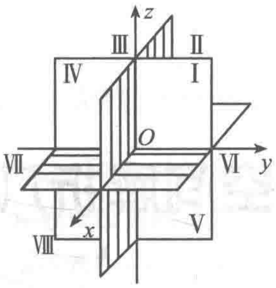

图8-2

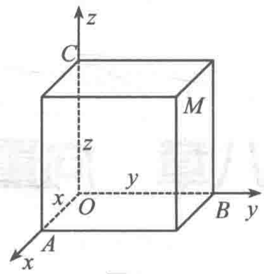

图8-3

设 M 为空间的一点，若过点 M 分别作垂直于三坐标轴的平面，与三坐标轴分别相交于 A，B，C 三点，且这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y、z，则点 M 唯一地确定了一组有序数组 x、y、z．反之，设给定一组有序数组 x、y、z，且它们分别在 x 轴，y 轴和 z 轴上依次对应于点 A，B 和 C，若过点 A，B 和 C 分别作平面垂直于所在的坐标轴，则这三张平面确定了唯一的交点 M．这样，空间的点就与一组有序数组 x、y、z 之间建立了一一对应关系. 有序数组 x、y、z 就称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，它们分别称为 x 坐标、y 坐标和 z 坐标. 如图8-3所示.

根据点的坐标的规定，可知原点 O 的坐标为（0，0，0)，坐标轴上的点至少有两个坐标为0，坐标面上的点至少有一个坐标为0.

例如，点 $P(0, 0, c)$ 在 z 轴上，点 $Q(a, b, 0)$ 在 xOy 坐标面上，而点 $R(a, 0, c)$ 在 zOx 坐标面上.

二、向量的基本概念及线性运算

1. 向量的基本概念

在物理学中，已经遇到过既有大小又有方向的量，如力、位移、速度、加速度等. 这些量称为向量，或称为矢量. 一般地，用黑体小写字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等，有时为了书写方便，也用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等表示向量. 几何上，也常用有向线段来表示向量，起点为 A，终点为 B 的向量，记为 $\overline{AB}$ 或 $\boldsymbol{AB}$. 如图8-4所示.

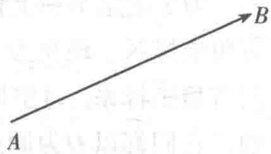

图8-4

向量的大小称为向量的模. 一般用 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|$，$|\overline{AB}|$ 等表示向量的模.

模等于1的向量称为单位向量.

模等于0的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 规定零向量的方向为任意方向.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

规定：两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不论起点是否相同，如果其方向相同且模相等，则称它们是相等向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经平行移动后，两向量能完全重合. 允许平行移动的向量称为自由向量，本书所讨论的向量均为自由向量. 因此两向量平行也叫共线.

2. 向量的线性运算

向量的加法、数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

在中学学习物理时已知道，两个不平行力的合力由平行四边形法则或三角形法则来确定. 向量的加法也是用同样的方法规定的.

（1）加法：将向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的起点放在一起，并以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图8-5所示. 这就是向量加法的平行四边形法则.

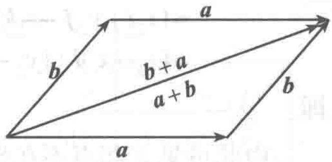

图8-5

由图8-5可以看出，若以向量$\boldsymbol{a}$的终点作为向量$\boldsymbol{b}$的起点，则由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量也是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量. 这就是向量加法的三角形法则.

由向量加法的定义可知，向量的加法满足：

交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

（2）数与向量的乘法：数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$是一个平行于$\boldsymbol{a}$的向量，它的模是向量$\boldsymbol{a}$的模的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 并规定，当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量.

容易验证，数乘向量满足：

结合律　$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$;

分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

其中，λ,μ都是数量.

三、向量的坐标表示

向量的运算仅靠几何方法研究有些不便. 为此需将向量的运算代数化. 下面先介绍向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴正向相同的单位向量称为基本单位向量，分别用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$表示.

设向量$\boldsymbol{a}$的起点在坐标原点O，终点为$P(x, y, z)$. 过$\boldsymbol{a}$的终点$P(x, y, z)$作三个平面分别垂直于三条坐标轴，设垂足依次为A，B，C，则向量$\boldsymbol{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{OC}=z\boldsymbol{k}$,由向量的加法法则（如图8-6所示）得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OQ}+\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

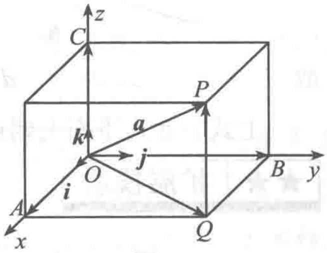

图8-6

称$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$为向量$\boldsymbol{a}$的坐标表示式，记作

$$\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}.$$

其中，x，y，z称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标.

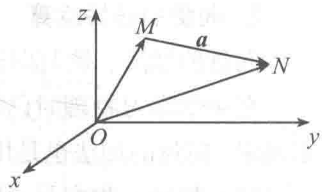

图 8-7

例 8.1 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{MN}$ 是以 $M(x_1, y_1, z_1)$为起点，$N(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，如图 8-7 所示，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{ON}-\boldsymbol{OM}$

$$\begin{aligned}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.$$

由此可见，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量相应的终点坐标与起点坐标之差.

利用向量的坐标表示式、向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，可以将上述关于向量的运算转化为普通的代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\pm(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\pm b_1)\boldsymbol{i}+(a_2\pm b_2)\boldsymbol{j}+(a_3\pm b_3)\boldsymbol{k}\\&=\{a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}\quad(\lambda\text{为数量}).\end{aligned}$$

例 8.2 已知向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的模.

解 任给一向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，都可以将其视为以原点 O 为起点，$P(a_1, a_2, a_3)$为终点的向量 $\boldsymbol{OP}$，如图 8-6 所示. 由图 8-6 不难看出

$$|\boldsymbol{OP}|^2=|\boldsymbol{OA}|^2+|\boldsymbol{OB}|^2+|\boldsymbol{OC}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}.$$

例 8.3 求空间两点 $M(x_1, y_1, z_1)$和 $N(x_2, y_2, z_2)$间的距离 d.

解 由空间两点 $M(x_1, y_1, z_1)$和 $N(x_2, y_2, z_2)$组成向量 $\boldsymbol{MN}$，该两点间的距离即为向量 $\boldsymbol{MN}$ 的模 $|\boldsymbol{MN}|$. 由于

$$\boldsymbol{MN}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

故

$$d=|\boldsymbol{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上式显然是平面上两点间距离公式的推广.

★★ 扩展模块

四、向量的方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角 α, β, γ（其中，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$,

$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$）或这三个角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 来表示. α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角；$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为方向余弦.

例8.4　如图8-8所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\{a_1, a_2, a_3\}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解　由图8-8知，$\triangle OAP$，$\triangle OBP$，$\triangle OCP$ 都是直角三角形，所以

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

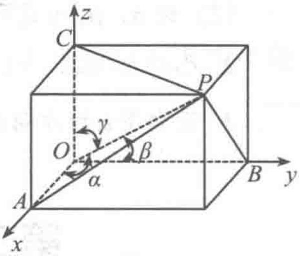

图8-8

显然　　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

即任一非零向量的方向余弦的平方和等于1.

习题8－1

A组

1. 填空题

（1）已知点 $A(2, -1, 1)$，则点 A 与 x 轴的距离是________，与 y 轴的距离是________，与 z 轴的距离是________；

（2）把空间直角坐标系分为八个卦限，点（-1，-1，2）在第________卦限；

（3）如果两个向量________________，则称它们是相等向量；

（4）$\boldsymbol{a}$ 为向量，λ 为常数，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为________；

（5）以 $M(-1, -2, 3)$ 为起点，$N(2, 3, 0)$ 为终点的向量的坐标表示为________；

（6）空间两点 $M(1, 2, 4)$ 和 $N(-1, 2, 3)$ 间的距离 $d=$________.

2. 在空间直角坐标系中，指出下列各点位置的特点.

$A(0, -3, 0)$；$B(3, -2, 0)$；$C(7, 0, 2)$；$D(4, 0, 0)$；$E(0, 5, -4)$；$F(0, 0, -6)$.

3. 设 A，B 两点为 $A(4, -7, 1)$，$B(6, 2, z)$，它们之间的距离为 $|AB|=11$，求点 B 的未知坐标.

4. 已知向量 $\boldsymbol{AB}=\{4, -4, 7\}$，它的终点坐标为 $B(2, -1, 7)$，求它的起点 A 的坐标.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3, 5, -1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2, 2, 2\}$，$\boldsymbol{c}=\{4, -1, -3\}$. 求：

（1）$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$；（2）$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$（$m$，$n$ 为常数）.

B组

1. 填空题

（1）向量 $\boldsymbol{a}=\{-2, 6, -3\}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=$______，方向余弦为 $\cos\alpha=$______，$\cos\beta=$______，$\cos\gamma=$______，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量是______；

（2）设 α，β，γ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$______.

2. 已知点 $A(2, -1, 3)$ 和 $B(3, 0, 1)$，求向量 $\boldsymbol{AB}$ 的模、方向余弦.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$，γ 为锐角，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

第二节 向量的数量积和向量积

★ 基础模块

一、向量的数量积

数量积是从物理、力学问题中抽象出来的一个数学概念. 先看一个例子. 设有一个物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线运动，产生了位移 $\boldsymbol{s}$. 实验证明，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中，θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角，如图8-9所示. 上式可以看成两个向量进行某种运算的结果，这种运算就是两个向量的数量积.

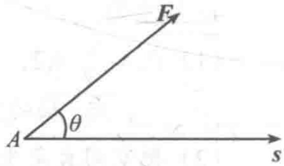

图8-9

1. 数量积的定义

定义8.1 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积或点积**. 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

依照定义8.1，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

定义8.2 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，如图8-10所示. 记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 类似地，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 所以，两向量的数量积也可用投影表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

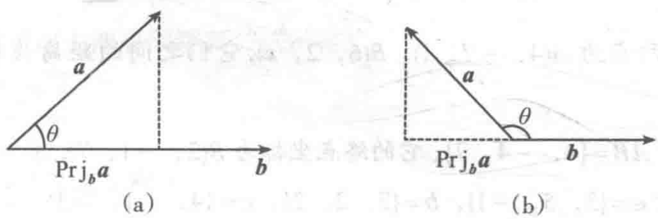

图8-10

2. 数量积的运算性质

（1） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$；

（2）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（3）结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

（4）分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

由数量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或其夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，这也是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件. 因此有以下定理.

定理8.1　向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

3. 数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，利用数量积的运算性质有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

因此，两向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

由上式又能得到两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦的坐标表示式：

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}.$$

例8.5　设向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

解　$\boldsymbol{a}=\{-1，1，0\}$，$\boldsymbol{b}=\{2，1，-2\}$，故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times2+1\times1+0\times(-2)=-1.$$

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，而 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$，所以

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}.$$

例8.6　求在xOy坐标面上与向量 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

解　因为所求向量$\boldsymbol{b}$在xOy坐标面上，故设 $\boldsymbol{b}=\{x，y，0\}$. 又因为$\boldsymbol{b}$是单位向量且与向量$\boldsymbol{a}$垂直，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\-4x+3y=0.\end{cases}$$

解得
$$x=\pm\frac{3}{5},\quad y=\pm\frac{4}{5},$$

故所求向量 $\boldsymbol{b}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\}$ 或 $\boldsymbol{b}=\{-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\}$.

二、向量的向量积

为了说明向量积的概念，先看一个例子. 设O为一杠杆的支点，有一力$\boldsymbol{F}$作用于杠杆的点A处，由力学知道，力$\boldsymbol{F}$对支点O的力矩是一个向量$\boldsymbol{M}$，如图8-11所示. 它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{OP}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{OA}|\sin\theta,$$

其中，$|\boldsymbol{OP}|=|\boldsymbol{OA}|\sin\theta$是力臂.

力矩$\boldsymbol{M}$的方向是这样规定的：$\boldsymbol{M}$同时垂直于$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{OA}$，且$\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{M}$符合右手法则，即当右手的四手指指向$\boldsymbol{OA}$的方向，握拳转向$\boldsymbol{F}$时，大拇指所指的方向为力矩$\boldsymbol{M}$的方向，如图8-12所示. 由两个已知向量按上述方法确定另一个向量，就是向量积.

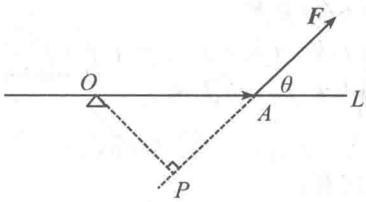

图8-11

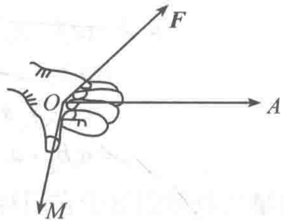

图8-12

1. 向量积的定义

设有两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，其夹角为θ，若向量$\boldsymbol{c}$满足：

（1）$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,

（2）$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所确定的平面，它的正方向由右手法则确定，

则称向量$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的向量积或叉积，记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

依照该定义，力矩$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{F}$. 几何上，向量积的模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积，如图8-13所示.

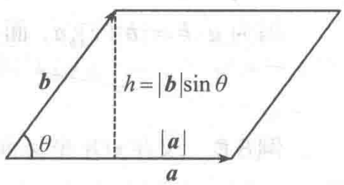

图8-13

2. 向量积的运算性质

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$;

（2）$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

（3）结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;

（4）分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

由向量积的定义可知

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

两个非零向量互相平行的充要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

3. 向量积的坐标表示式

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，利用向量积的运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+\\&\quad a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为了便于记忆，借用行列式记号，将上式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

由于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即有 $a_2b_3-a_3b_2=0$，$a_1b_3-a_3b_1=0$，$a_1b_2-a_2b_1=0$. 当 b_1，b_2，b_3 全不为零时，有 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$；当 b_1，b_2，b_3 中出现零时，仍可用上式表示，但约定相应的分子为零. 例如 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{0}=\frac{a_3}{b_3}$，应理解为 $a_2=0$，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3}$. 该式对判断两向量是否平行非常方便.

例8.7 设 $\boldsymbol{a}=\{1, -2, 3\}$，$\boldsymbol{b}=\{0, 1, -2\}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\0&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&3\\1&-2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&3\\0&-2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\{1, 2, 1\}$，

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=\{-1, -2, -1\}$.

★★ 扩展模块

例8.8 已知三点 $A(-1, 2, 3)$，$B(1, 1, 1)$，$C(0, 0, 5)$，求 $\angle ABC$.

解 作向量 $\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{BC}$，则 $\boldsymbol{BA}$ 与 $\boldsymbol{BC}$ 的夹角就是 $\angle ABC$. 因为

$$\boldsymbol{BA}=\{-1-1, 2-1, 3-1\}=\{-2, 1, 2\},$$

$$\boldsymbol{BC}=\{0-1, 0-1, 5-1\}=\{-1, -1, 4\},$$

所以

$$\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{BC}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+2\times4=9,$$

$$|\boldsymbol{BA}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3,$$

$$|\boldsymbol{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}=3\sqrt{2},$$

故

$$\cos\angle ABC=\frac{\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{BC}}{|\boldsymbol{BA}||\boldsymbol{BC}|}=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又因为 $0\leqslant\angle ABC\leqslant\pi$，所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$.

例8.9 求以 $A(2, -2, 0)$，$B(-1, 0, 1)$，$C(1, 1, 2)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积.

解 由向量积的定义知 $\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|.$$

因为 $$\boldsymbol{AB}=\{-3,\ 2,\ 1\},\ \boldsymbol{AC}=\{-1,\ 3,\ 2\},$$

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},$$

所以 $$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+5^2+(-7)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

习题8－2

A组

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，其夹角$\theta=\frac{\pi}{3}$. 求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；（3）其夹角的余弦$\cos\theta$.

3. 设$\boldsymbol{a}=\{1,\ 2,\ 3\}$，$\boldsymbol{b}=\{-2,\ m,\ 4\}$，试求数$m$，使得$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. 已知$\boldsymbol{a}=\{2,\ 3,\ 1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,\ 2,\ -1\}$. 求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=10$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\sqrt{15}\boldsymbol{k}$，又$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}$.

6. 已知$\boldsymbol{a}=\{2,\ 4,\ -1\}$，$\boldsymbol{b}=\{0,\ -2,\ 2\}$. 求同时垂直于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的单位向量.

B组

1. 已知点$A(1,\ -3,\ 4)$，$B(-2,\ 1,\ -1)$，$C(-3,\ -1,\ 1)$，求：（1）$\angle ABC$；（2）$\boldsymbol{AB}$在$\boldsymbol{AC}$上的投影.

2. 求以$A(3,\ 4,\ 1)$，$B(2,\ 3,\ 0)$，$C(3,\ 5,\ 1)$，$D(2,\ 4,\ 0)$为顶点的四边形的面积.

第三节　平面与直线

平面与直线是空间最简单的几何图形. 本节将以向量为工具讨论平面与直线的方程.

★ 基础模块

一、平面的方程

1. 平面的点法式方程

由中学立体几何可知，过空间一点作与已知直线垂直的平面是唯一的. 因此，如果已知平面上的一点及垂直于该平面的一个非零向量，那么这个平面的位置也就完全确定了. 现在根据这个结论来建立平面方程.

为了方便，称垂直于平面的非零向量为平面的法向量. 显然，平面的法向量有无穷多个，它们之间互相平行，而且平面上的任一向量都与该平面的法向量垂直.