金融随机分析 修订版

第一卷 二叉树资产定价模型

[美] 史蒂文・E.施里夫（Steven E. Shreve）著
陈启宏 陈迪华 译

汉译经济学文库
Translated Economics Library

STOCHASTIC
CALCULUS
FOR FINANCE

上海财经大学出版社

汉译经济学文库

金融随机分析 第一卷

——二叉树资产定价模型

（修订版）

[美] 史蒂文·E.施里夫（Steven E. Shreve） 著

陈启宏 陈迪华 译

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金融随机分析/(美)施里夫(Shreve,S. E.)著;陈启宏,陈迪华译.
—修订版. —上海:上海财经大学出版社,2015.6
(汉译经济学文库)
书名原文:Stochastic Calculus for Finance
ISBN 978-7-5642-2155-3/F·2155

Ⅰ.①金… Ⅱ.①施… ②陈… ③陈… Ⅲ.①随机分析-应用-金融学 Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 086375 号

□策　　划　张美芳
□责任编辑　张美芳
□封面设计　钱宇辰

JINRONG SUIJI FENXI
金 融 随 机 分 析(第一卷)
——二叉树资产定价模型
(修订版)

[美] 史蒂文·E.施里夫 (Steven E. Shreve) 著
陈启宏　陈迪华　译

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海华教印务有限公司印刷装订
2015 年 6 月修订版　2015 年 6 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　40 印张(插页:1)　835 千字
印数:7 901—11 900　定价:88.00(两卷)

图字:09-2007-420 号

Preface to Chinese Edition

It is a joy to have these two volumes on the subject of *Stochastic Calculus for Finance* become more accessible to Chinese students and practitioners. At Carnegie Mellon University it has been my good fortune to come to know many Chinese students. More than a few of these students intend to return to their homeland in order to be part of the exciting developments in financial markets that are taking place there. It is my hope that these students and these books from which they have learned will contribute to the efficiency of financial markets in China and thereby make more and better investment opportunities available.

Steven E. Shreve
Pittsburgh, Pennyslvania, USA
May 2008

中文版序

《金融随机分析》(第一卷和第二卷)中文版问世,将使本书更易为中国学生及实务工作者接受,十分可喜。在卡耐基·梅隆大学,我有幸认识了许多中国学生。这些学生中的绝大多数都打算回到他们的祖国,为中国金融市场正在发生的振奋人心的发展效力。衷心希望这些学生以及他们所学过的这些书籍能够有助于中国金融市场增强有效性,从而具备更多、更好的投资机遇。

史蒂文·E. 施里夫

美国宾夕法尼亚州匹兹堡市

2008年5月

英文版序

本书的起源

这本书起初作为卡耐基·梅隆大学（Carnegie Mellon University）计算金融理学硕士项目（Master of Science in Computational Finance，MSCF）的数学课程。本书已成功地被那些数学背景只有微积分和基于微积分的概率论的学生作为教材。书中结果都有准确的陈述、合理的论证，也给出了一些证明；然而更重要的是，通过本书的课堂教学，可以得到一些直觉性解释。每一章结束都有习题，其中有些是理论的扩展，有些来自于数量金融的实际问题。

第一卷中的前三章曾被用作 MSCF 项目的半学期课程，整个的第一卷一直作为卡耐基·梅隆大学计算金融学士项目一个学期的教学内容。第二卷已被用作 MSCF 项目的三个半学期课程。

MSCF 学生对本书的贡献

自 1994 年起，卡耐基·梅隆大学计算金融硕士项目已经毕业了好几百名学生。能够有幸教导这些来自不同教育和职业背景的学生，是一件非常愉快的事情。这些学生热爱学习，提出许多激发思考的问题，并努力从理论上和实践上理解书中的材料，还经常要求增加一些额外的主题。许多学生来自金融领域，他们乐于同大家分享他们的知识，这也丰富了课堂教学。

本书以及我自己都从与 MSCF 学生的交流中受益匪浅，现在也继续从 MSCF 的毕业生中获得许多有益的知识。值此机会，谨以此书献给历届 MSCF 学生，以表谢忱。

致 谢

与包括同事大卫·赫斯(David Heath)和德米特里·克拉姆科夫(Dmitry Kramkov)在内的一些人的交流对本书有所影响。卢卡什·克鲁克(Lukasz Kruk)阅读了初稿的很多内容,并提出了许多评论与更正。另外还有一些学生和教师指出了错误,并对本书的早期版本提出了改进建议。其中包括乔纳森·安德森(Jonathan Anderson),纳塔涅尔·卡特(Nathaniel Carter),波格丹·道伊钦诺夫(Bogdan Doytchinov),大卫·加曼(David German),斯蒂文·吉利斯皮(Steven Gillispie),卡笛尔·亚内切克(Karel Janeček),肖恩·琼斯(Sean Jones),阿纳托利·卡罗利克(Anatoli Karolik),大卫·科皮(David Korpi),安杰伊·克劳瑟(Andrzej Krause),赖尔·林比特科(Rael Limbitco),皮垂·卢卡三(Petr Lukasan),谢尔盖·米亚格切洛夫(Sergey Myagchilov),尼基·拉斯穆森(Nicki Rasmussen),伊萨克·索宁(Isaac Sonin),马西莫·塔桑-索莱(Massimo Tassan-Solet),大卫·惠特克(David Whitaker)和乌韦·威斯图普(Uwe Wystup)。在某些场合,本书早期版本的使用者对习题与例子提出了建议,本书在相应的地方对这些使用者的贡献表示了感谢。在此,谨向有助于本书进一步完善的所有读者致谢。

在本书的创作过程中,作者得到了国家自然科学基金 DMS－9802464、DMS－0103814 和 DMS－0139911 的部分资助。但本书中任何观点、发现、结论或者建议都由作者负责,并不反映国家自然科学基金的观点。

史蒂文·E. 施里夫
(Steven E. Shreve)
美国宾夕法尼亚州匹兹堡市
2004 年 4 月

导 言

背 景

诺贝尔奖委员会在1990年授予哈里·马科维茨(Harry Markowitz)、威廉·夏普(William Sharpe)和默顿·米勒(Merton Miller)诺贝尔经济学奖，使整个世界注意到过去四十年来正在兴起的一门新学科——金融学。这一理论试图理解金融市场如何运作、如何使金融市场更有效率，以及如何进行调节。它解释并增强了金融市场在配置资本和减少风险以促进经济活动方面所起的重要作用。金融学日趋数学化，甚至金融的问题正在推动数学研究，但金融学并未减少其在市场交易与调节中的实际应用。

1952年，哈里·马科维茨的博士论文《投资组合选择》奠定了金融学的数学理论基础。马科维茨给出了股票的均值回报和协方差的理论，以便量化市场中“差异性”的概念。他证明了对给定的投资组合，如何计算均值回报和方差；认为对于给定的均值回报，投资者应持有具有最小方差的资产组合。尽管现在金融学中涉及随机(伊藤，Itô)分析，但定量化风险管理一直是现代金融理论以及数量金融实践的基本主题。

1969年，罗伯特·默顿(Robert Merton)把随机分析引入到金融研究。他切望了解在金融市场中如何定价(这是经济学中经典的“均衡”问题)，并在随后的论文中运用随机分析原理开创了这方面的研究。

在默顿进行研究的同时，费雪·布莱克(Fischer Black)与迈伦·斯科尔斯(Myron Scholes)在默顿的协助下，得到了著名的期权定价公式。这项成果赢得了1997年的诺贝尔经济学奖。它对于一个重要的实际问题提供了令人满意的答案，即为欧式看涨期权(即在规定的时间以规定的价格购买给定股票的权利)寻求公平的价格。1979～1983年期间，哈里森(Harrison)、克雷普斯(Kreps)和普利斯卡(Pliska)运用连续时间随机过程的一般理论为布

莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)期权定价公式提供了坚实的理论基础,并且给出了各种各样其他衍生证券的定价方法。

金融中的许多理论进展可以直接应用于金融市场。为了理解金融理论如何应用,我们暂时偏离一下主题来关注金融机构的角色。一个国家金融机构的主要功能就是在从事生产过程的客户中,扮演减少风险的中介角色。例如,保险行业收取许多客户的保险费,但只需要赔付给少数实际遭受损失的客户。如果客户无法获得这样的保险,就会面临风险。假如,为了对冲较高的燃油成本,航空公司就想购买一些当石油价格上升时价格也会上升的证券。但是谁会销售这样的证券呢?金融机构的角色就是设计这样的证券,并确定一个"公平"的价格,销售给航空公司。这样的证券通常称为"衍生产品"(其价值基于其他证券的价值)。石油价格一旦上升,金融机构就需要履行由于销售衍生产品所产生的支付义务。为此,金融机构会交易一些其他与油价相关的证券,进行风险对冲。在此意义上,衍生产品的"公平"价格是指:金融机构利用销售衍生产品所获得的收益从事其他相关的证券交易恰好能够对冲衍生产品的支付义务。对于一个"有效"市场,这种用来对冲风险的证券总能以"公平"的价格获得。

布莱克—斯科尔斯期权定价公式,首次为风险对冲证券的公平定价提供了理论方法。如果一个投资银行提供的衍生产品价格高于"公平"价格,那么这些产品出价会较低。如果投资银行提供的衍生产品价格低于"公平"的价格,那么将有遭受很大损失的风险。这使得银行不太情愿提供这些有助于提高市场效率的衍生产品。仅当衍生产品的"公平"价格能够预先确定时,银行才愿意提供该衍生产品。进而,销售衍生产品的银行还必须考虑对冲的问题:应该如何管理新的头寸所带来的风险。由布莱克—斯科尔斯期权定价公式发展而来的数学理论同时解决了定价和对冲问题。于是,大量特定的衍生证券便应运而生。这一数学理论正是本书的主题。

第一卷与第二卷之间的联系

第二卷主要讨论与金融应用有关的连续时间随机分析理论。关于随机分析需要的概率论(包括布朗运动及其性质),第二卷以独立自足的形式给出。

第一卷利用较简单的离散时间二叉树模型来处理同样的一些金融应用问题。第一卷介绍的一些基本概念,包括鞅、马尔可夫(Markov)过程、测度变换和风险中性定价,为读者阅读第二卷提供了准备。然而,关于这些概念,第二卷的内容也是独立自足的,在阅读第二卷之前并不一定需要阅读第一卷。当然,通过阅读第一卷中相对较为简单的内容,将有助于对第二卷的理解。

在卡耐基·梅隆大学计算金融硕士项目中,基于第一卷的课程是基于第二卷的课程的预修条件。但计算机科学、金融、数学、物理及统计专业的研究生经常直接修读基于第二卷的课程,而不需要预先修读基于第一卷的课程。

直接修读第二卷的学生可以利用第一卷作为参考。一些概念在第二卷中出现时参引了第一卷中类似的概念。读者可以直接阅读第二卷,也可以参考第一卷,以对一些概念进行更透彻的讨论。

第一卷提要

第一卷介绍二叉树资产定价模型。尽管模型本身是很有趣的,也经常作为实际应用范例,但是这里主要作为一个工具,以较为简单的形式引进一些在第二卷的连续时间理论中将会用到的概念。

第一章**"二叉树无套利定价模型"**利用二叉树模型给出无套利期权定价方法。用到的数学是简单的,但是这里引进的风险中性定价的概念却十分深刻。第二章**"抛掷硬币空间上的概率论"**利用鞅以及马尔可夫过程的概念来表述第一章的结果。至为精妙的是关于欧式衍生证券的风险中性定价公式。推导风险中性定价公式的工具对于二叉树模型中的推导并非必需,由于在第二卷中要用到,因此,在第一卷中较简单的离散时间情形就对此有所展开。第三章**"状态价格"**讨论了与欧式衍生证券的风险中性定价相联系的测度变换,作为连续时间模型中测度变换的一个热身练习。这里,一个有趣的应用是利用二叉树模型求解(期望效用最大化意义下的)最优投资问题。前三章中的思想是理解现代数量金融的基础,在第二卷的第四章与第五章中还将进一步展开。

第一卷的后三章介绍了一些更为专业的概念。第四章**"美式衍生证券"**考虑持有者能够选择行权时刻的衍生证券。在第二卷第八章的连续时间情形还将考虑这一问题。第五章**"随机游动"**解释了关于随机游动的反射原理。类似的关于布朗运动的反射原理,在第二卷第七章关于奇异期权定价公式的推导中,有着至关重要的作用。最后,第六章**"依赖利率的资产"**考虑了随机利率模型,考察了远期和期货价格的差异,并且介绍了远期测度的概念。在第二卷第五章的结尾还将再次出现远期和期货价格。连续时间模型中的远期测度将在第二卷第九章中展开,并在第二卷第十章中用于创建关于利率变动的远期 LIBOR(伦敦同业拆借利率)模型。

第二卷提要

第二卷第一章**"一般概率论"**与第二章**"信息和条件期望"**,为连续时间

模型所需要的概率论提供了测度论基础。第一章介绍了概率空间、勒贝格(Lebesgue)积分和测度变换。第二章中介绍了独立性、条件期望以及条件期望的性质。这两章内容在全书中都要用到,对概率论知识有所了解的读者,开始时可以跳过这部分,必要时再参考。

第三章**"布朗运动"**介绍了布朗运动及其性质。对于随机分析最重要的是 3.4 节中的二次变差。除了 3.6 节和 3.7 节仅用于第七章**"奇异期权"**,以及第八章**"美式衍生证券"**,本章所有内容都是必需的。

第二卷的核心是第四章**"随机分析"**。这一章中构建了伊藤(Itô)积分并且推导了伊藤公式[本书中称为伊藤—德布林公式(Itô-Doeblin)],还给出了伊藤—德布林公式的一些推论。其中之一是用二次变差刻划布朗运动[列维(Lévy)定理],另一个是关于欧式看涨期权价格的布莱克—斯科尔斯方程(本书中称为布莱克—斯科尔斯—默顿方程)。读者唯一可以忽略的内容是 4.7 节**"布朗桥"**。本书涉及布朗桥是因为其在蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟中的重要性,但在本书其他部分没有用到。

第五章**"风险中性定价"**叙述并证明了哥萨诺夫(Girsanov)定理,这是测度变换的基础。这样就能够系统地讨论风险中性定价以及资产定价基本定理(5.4 节)。5.5 节**"支付红利的股票"**在本书其他部分没有用到。[1] 5.6 节**"远期和期货"**还将出现在后面 9.4 节以及部分习题中。

第六章**"与偏微分方程的关系"**揭示了随机分析与偏微分方程之间的联系。这在后面的章节中经常会用到。

除了上面所提到的一些以外,第一章~第六章是数量金融的基本内容,也是阅读后面章节的基础。第六章之后,读者可以选择性阅读。

第七章**"奇异期权"**以及第八章**"美式衍生证券"**,在随后的章节中并不用到。第九章**"计价单位变换"**在 10.4 节**"远期 LIBOR 模型"**中具有重要的作用,但在其他部分中没有用到。第十章**"期限结构模型"**以及第十一章**"跳过程引论"**,在本书其他部分中也没有用到。

〔1〕 事实上,在第二卷第 8.5 节中要用到第二卷第 5.5 节中的部分内容。——译者注

目　录

CONTENTS

1 二叉树无套利定价模型

1.1 单时段二叉树模型

二叉树资产定价模型为理解**套利定价理论**和概率提供了一个有力的工具。本章中，我们为理解套利定价理论而引进这一工具；在第二章中，我们借助这一工具讨论概率。这一节中，我们考虑最简单的二叉树模型——单时段二叉树模型；下一节中，我们将推广到更为现实的多时段二叉树模型。

一般的单时段模型如图 1.1.1 所示，我们称该时段的起点与终点分别为**时刻 0** 与**时刻 1**。在时刻 0，我们持有 1 份股票，记 S_0 为每份股票的价格，设其为正。在时刻 1，该股票每份价格将为两个正值 $S_1(H)$ 和 $S_1(T)$ 之一，其中 H 与 T 分别表示一枚硬币的**正面**与**背面**。于是，我们可以想象时刻 1 的股票价格取决于抛掷一枚硬币的结果。我们并不特别假设抛掷硬币时出现正面与背面的概率各半。我们只假设出现正面的概率 p 为正值，并且出现背面的概率 $q=1-p$ 也为正值。

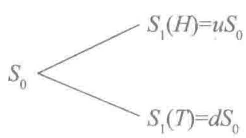

图 1.1.1 一般的单时段二叉树模型

抛掷硬币的结果及时刻 1 的股价，要到时刻 1 才知道。我们称任何在时刻 0 时未知的量为**随机**的，因为它依赖于抛掷硬币这一随机试验。

我们引入两个正值

$$u=\frac{S_1(H)}{S_0},\quad d=\frac{S_1(T)}{S_0} \tag{1.1.1}$$

假设 $d<u$；如果反之有 $d>u$，通过重新标记硬币的两面，我们可以得到 $d<u$；如果 $d=u$，那么时刻 1 的股票价格事实上不是随机的，因此该模型为平凡的。我们称 u 为**上升因子**，d 为**下降因子**。可以凭直觉把 u 当成大于 1 的

数,把 d 当成小于 1 的数。但我们的数学推导并不要求这些不等式成立。

同时,我们引入**利率** r。时刻 0 在货币市场投入 1 美元,在时刻 1 可以得到 $1+r$ 美元。相反,在时刻 0 从货币市场借得 1 美元,在时刻 1 的负债为 $1+r$ 美元。特别地,假定借款利率与投资的利率相同。一般恒有 $r\geqslant 0$,然而,我们的数学推导只要求 $r>-1$ 即可。

有效市场的实质在于:如果一个交易策略可以不劳而获,那么它必将承受风险,否则,便存在**套利**机会。更具体地说,所谓**套利**是这样一个交易策略:其赔钱的概率为零,而赚钱的概率为正值。允许套利存在的数学模型不能用于分析,因为这样的模型允许财富由零产生,从而会得到一些矛盾的结果。真实的市场有时会有套利机会,但这必然是稍纵即逝的;一旦有人发现,就会有旨在套利的交易发生,从而使之消失。

在单时段二叉树模型里,为了排除套利机会,我们必须假设:

$$0<d<1+r<u \tag{1.1.2}$$

我们已假设股票价格恒为正值,故必有 $d>0$。式(1.1.2)中的其他两个不等式是根据无套利得来的,我们对此解释如下:如果 $d\geqslant 1+r$,投资者可以零财富开始,在时刻 0 从银行借款买股票。即使遇到最差的情况,时刻 1 股票的价值也足以偿付银行的贷款,此外仍有余钱的概率为正,因为 $u>d\geqslant 1+r$,这就提供了一个套利机会。另一方面,如果 $u\leqslant 1+r$,投资者可卖空股票,将所得投资货币市场。即使在股票的最好情况下,时刻 1 股票的价值也不会超过在货币市场投资的价值,又因为 $d<u\leqslant 1+r$,时刻 1 股票的价值严格小于货币市场投资价值的概率为正,这也提供了一个套利机会。

以上我们已经论证了:如果含有股票和货币市场账户两种资产的市场无套利,则必有式(1.1.2)成立。反之亦然。如果式(1.1.2)成立,则市场无套利(见习题 1.1)。

通常令 $d=\frac{1}{u}$,在许多例子里也是如此。然而,为使二叉树资产定价模型有意义,我们只需要假定式(1.1.2)。

当然,股票价格的变动远比二叉树资产定价模型所表示的更为复杂。我们考虑这种简单的模型乃是基于以下三个原因:首先,此模型可以清楚地阐明套利定价的概念及其与风险中性定价的关系;其次,当时段数目足够多时,该模型提供了对连续时间模型的一个相当不错且便于计算处理的近似,因此相当实用;最后,由二叉树资产定价模型,可以给出条件期望和鞅的理论,这是连续时间模型的核心所在。

考虑一个**欧式看涨期权**,它赋予持有者在时刻 1 以**敲定价格** K 购买一份股票的权利(但非义务)。假定 $S_1(T)<K<S_1(H)$,如果时刻 1 的股票价格低于敲定价格 K,则期权无价值;如果时刻 1 的股票价格高于敲定价格 K,则期权被**实施**,由此获利为 $S_1(H)-K$。因此,期权在时刻 1 的价值为