

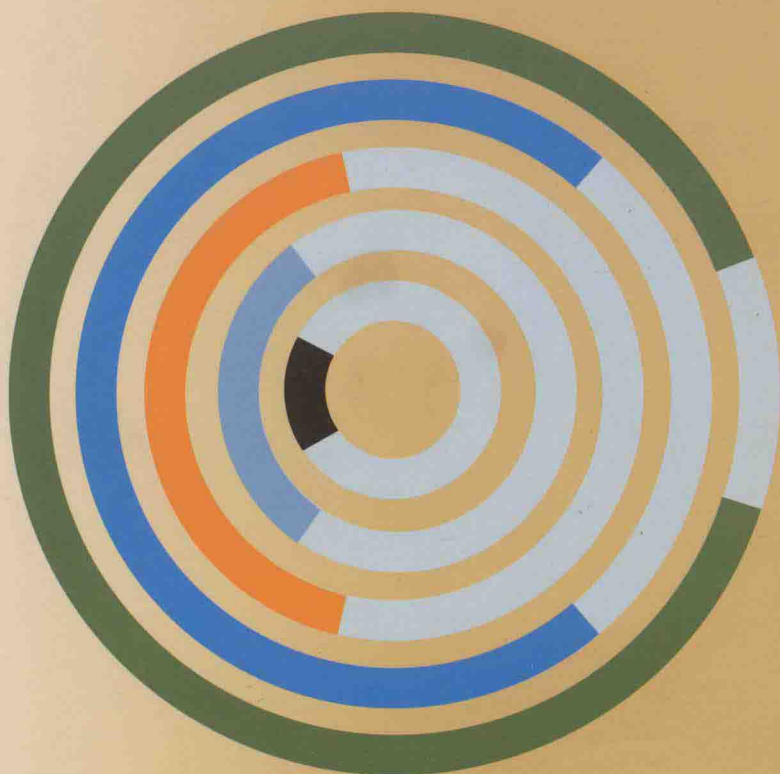
21^{世纪}高等院校公共基础系列规划教材

普通高等教育优秀教材·公共基础系列

概率论 与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

主编 杜宇静



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21^{世纪} 高等院校公共基础系列规划教材
普通高等教育优秀教材·公共基础系列

概率论 与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

主 编 杜宇静

副主编 国 冰 侯方博

参 编 (排名不分先后)

杜凤娥 孙晓祥 吴艳华 陈晓弟

高云峰 张志国 马 辉 姜丽萍



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书分 10 章,内容包括随机事件与概率、随机变量及概率分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。

本书增加了 SPSS 软件的操作内容,易学易懂,旨在培养学生的应用能力;习题分习题 A 和习题 B,习题 B 为考研题。

本书适合应用型本科院校学生使用,也可作为成人教育、网络教育本科院校《概率论与数理统计》课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杜宇静主编. —上海:上海交通大学出版社,2015
ISBN 978-7-313-12705-1

I. ①概… II. ①杜… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
IV. ①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 041524 号

概率论与数理统计

主 编:杜宇静

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

出 版 人:韩建民

印 制:北京市龙展印刷有限责任公司

开 本:787×1092mm 1/16

字 数:296 千字

版 次:2015 年 3 月第 1 版

书 号:ISBN 978-7-313-12705-1/0

定 价:30.00 元

地 址:上海市番禺路 951 号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:13.5

印 次:2015 年 3 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:010-88774639

前 言

为适应普通高等学校《概率论与数理统计》课程的教学需要,根据本科《概率论与数理统计》课程教学大纲的要求,以突出“应用性、实用性”为原则,以让学生在浓厚的兴趣中学习和掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本理论为目的,组织从事《概率论与数理统计》课程的一线教师共同编写了这本适合应用型本科院校学生学习的《概率论与数理统计》教材。

本书的主要特色是:理论体系完整,内容精炼简明;以典型题例来呈现解题方法;教材内容、由浅入深、循序渐进,增加了学生感兴趣的问题及 SPSS 软件的操作内容,易学易懂,旨在培养学生的应用能力。

本书共 10 章。第 1 章,随机事件与概率;第 2 章,随机变量及概率分布;第 3 章,多维随机变量及其分布;第 4 章,随机变量的数字特征;第 5 章,大数定律与中心极限定理;第 6 章,数理统计的基本概念;第 7 章,参数估计;第 8 章,假设检验;第 9 章,方差分析;第 10 章,回归分析。附录 1,习题答案;附录 2,常用数表。

本书具体编写分工如下:陈晓弟编写第 1 章;杜凤娥编写第 2 章;国冰编写第 3 章;侯方博编写第 4 章;高云峰编写第 5 章;马辉编写第 6 章;吴艳华编写第 7 章;杜宇静编写第 8 章;张志国编写第 9 章;孙晓祥编写第 10 章;姜丽萍负责附录的编写和校对工作。

本书可作为应用型本科院校的学生使用,也可作为成人教育、网络教育本科院校《概率论与数理统计》课程的教材或教学参考书。

由于编者水平有限,书中存在的疏漏、不妥或错误之处,敬请读者批评指正。

编 者
2014 年 11 月

目 录

第 1 章 随机事件与概率	1
1.1 基本概念	1
1.2 随机事件的概率	3
1.3 古典概率	5
1.4 条件概率	7
1.5 事件的独立性	10
第 2 章 随机变量及概率分布	15
2.1 随机变量的概念	15
2.2 离散型随机变量及其分布律	16
2.3 随机变量的分布函数	20
2.4 连续型随机变量及其概率密度	23
2.5 随机变量函数的分布	31
第 3 章 多维随机变量及其分布	41
3.1 二维随机变量及其分布	41
3.2 边缘分布	46
3.3 条件分布	50
3.4 随机变量的独立性	54
3.5 两个随机变量函数的分布	56
第 4 章 随机变量的数字特征	67
4.1 随机变量的数学期望	67
4.2 随机变量的方差	75
4.3 协方差与相关系数	80
第 5 章 大数定律与中心极限定理	89
5.1 大数定律	89
5.2 中心极限定理	91

第 6 章 数理统计的基本概念	97
6.1 引言	97
6.2 随机样本	97
6.3 抽样分布	101
第 7 章 参数估计	109
7.1 参数的点估计	109
7.2 估计量的评选标准	113
7.3 正态总体参数的区间估计	115
7.4 两个正态总体均值差及方差比的区间估计	120
7.5 非正态总体参数的区间估计	122
7.6 单侧置信区间	122
第 8 章 假设检验	132
8.1 假设检验的基本概念	132
8.2 正态总体均值的假设检验	134
8.3 正态总体方差的假设检验	139
8.4 置信区间与假设检验的关系	142
8.5 分布拟合检验	143
8.6 假设检验的 p 值及 SPSS 软件操作	145
第 9 章 方差分析	151
9.1 单因素方差分析	151
9.2 双因素方差分析	157
第 10 章 回归分析	170
10.1 引言	170
10.2 一元线性回归模型	171
10.3 多元线性回归模型	176
附录 1 习题答案	181
附录 2 常用数表	194
附表 2-1 标准正态分布函数表	194
附表 2-2 泊松分布表	196
附表 2-3 t 分布表	199

附表 2-4 χ^2 分布表	201
附表 2-5 F 分布表	203
参考文献	208

第 1 章 随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科. 本章介绍概率论中的基本概念: 随机试验、样本空间、随机事件、随机事件之间的关系与运算、随机事件的概率及其初等计算.

1.1 基本概念

1.1.1 随机试验与随机事件

在自然界中存在着各种各样的现象. 例如, 每天清晨太阳一定从东方升起、抛起一枚硬币后必然会下落, 等等. 一类现象的共同点是在一定的条件下必然会出现唯一的一个结果, 这类现象称为**确定性现象**. 另一类现象则不然, 例如, 抛起一枚硬币后, 落下时可能正面朝上, 也可能是反面朝上, 在其落地之前结果是无法确定的; 一天中进入某超市的人数, 可能是任何一个非负整数, 在这一天结束前结果也是无法确定的, 等等. 但人们经过长期的实践和研究发现这类现象在大量重复的试验或观察下, 它的结果呈现出某种规律性. 例如多次重复抛起一枚硬币后, 正面朝上的次数几乎能占一半. 这种试验其结果呈现出不确定性, 在大量重复试验中其结果又呈现出固有规律性的现象称为**随机现象**.

随机现象是大量存在的, 我们通过随机试验来研究随机现象. **随机试验**是指在相同条件下可以重复进行的试验, 具体有以下 3 个特点:

- (1) 试验在相同条件下可以重复进行.
- (2) 试验前可以确定所有可能出现的结果.
- (3) 试验前不能确定出现哪一种结果.

随机试验在概率论中又简称**试验**, 记为 E .

例 1.1.1 随机试验的例子.

E_1 : 抛一枚硬币, 观察硬币正面 H , 反面 T 出现的次数.

E_2 : 将一枚硬币连续抛掷两次, 观察硬币正面 H , 反面 T 出现的次数.

E_3 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察反面 T 出现的次数.

E_4 : 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.

E_5 : 观察一天内进入某大型超市的顾客的人数.

要研究一个随机试验 E , 首先要确定这个试验所有可能出现的结果. 每一个可能出现的结果称为**样本点**, 记作 ω . 试验所有可能出现的结果组成的集合称为**样本空间**, 记作 S . 即样

本空间的元素就是样本点.

下面写出例 1.1.1 中的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$ 的样本空间.

$$S_1 = \{H, T\};$$

$$S_2 = \{HH, HT, TH, TT\};$$

$$S_3 = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$S_5 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

随机试验 E 的若干个样本点组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写字母 A, B, C 等表示.即随机事件实际上是样本空间 S 的一个子集.只包含一个样本点的随机事件称为**基本事件**.如例 1.1.1 的 E_4 中, $A = \text{“出现偶数点”}$ 就是一个随机事件,表示为 $A = \{2, 4, 6\}$;基本事件有 6 个: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$.

在每次试验中,当且仅当随机事件中的一个样本点出现时,称事件发生,否则就称事件不发生.如例 1.1.1 的 E_4 中,若一次掷骰子出现了 6 点,则称事件 $A = \text{“出现偶数点”}$ 发生,若一次掷骰子出现了 3 点,则称事件 A 不发生.

特别地,样本空间 S 包含所有的样本点, S 也是自身的一个子集,是一个随机事件,并且在每次试验中它总是发生的, S 称为**必然事件**.空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,是任何样本空间 S 的子集,也是一个随机事件,并且在每次试验中都不发生, $\emptyset$ 称为**不可能事件**.

例 1.1.2 对一箱产品进行随意抽查检验,如果查出两个次品就停止检查,最多检查 3 个产品.试写出该试验的样本空间 S ,并表示下列事件:

$$A = \{\text{有两个产品是次品}\}, B = \{\text{至少有两个正品}\}.$$

解 检查时有次序的逐个进行抽查,至少检查 2 个,最多检查 3 个.

设“0”表示检查出次品,“1”表示检查出正品.则,

$$\text{样本空间 } S = \{00, 010, 011, 100, 101, 110, 111\},$$

$$\text{所以,事件 } A = \{00, 010, 100\};$$

$$\text{事件 } B = \{011, 101, 110, 111\}.$$

1.1.2 事件之间的关系与运算

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 S 中进行.由上述内容可知事件是一个集合,所以事件间的关系与事件的运算和集合间的关系与运算相同.下面给出这些关系和运算在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S .而 $A, B, A_k(k=1,2,\dots,n)$ 是 S 的子集.

(1)若 $A \subset B$,则称事件 B **包含** 事件 A ,表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 即 $A = B$,则称事件 A 与事件 B **相等**.

如掷一颗骰子,事件 $A = \{\text{出现 3 点}\}$ 的发生必然导致事件 $B = \{\text{出现奇数点}\}$ 的发生,故 $A \subset B$.

(2)**和事件**:事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**.当且仅当事件 A 与事件 B 至少有一个发生时,和事件 $A \cup B$ 发生.

类似的,称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.

(3) **积事件**: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件;当事件 A 与事件 B 都发生时,积事件 $A \cap B$ 发生, $A \cap B$ 也记作 AB .

类似的,称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件.

(4) **对立事件**:若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件,或称事件 A 与事件 B 互为逆事件,记为 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$.

(5) **差事件**: $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件;当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时,差事件 $A - B$ 发生.显然, $A - B = A - AB = A \cap \bar{B}$.

(6) **互斥事件**:若 $A \cap B = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 是互斥的,或互不相容的.表示事件 A 与事件 B 不能同时发生.样本空间的基本事件都是两两互斥的.

下面给出事件的运算法则.

设 A, B, C 为事件,则有

吸收律:若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, A \cap B = A$;

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$$

分配律:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

对偶律(德摩根律): $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

例 1.1.3 设 A, B, C 为某个随机试验的三个事件,则

(1) 事件“ A, B, C 同时发生”可表示为 $A \cap B \cap C = ABC$.

(2) 事件“ A, B, C 至少发生一个”可表示为 $A \cup B \cup C$.

(3) 事件“ A, B, C 都不发生”可表示为 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{ABC}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$.

(4) 事件“ A, B, C 恰好有两个发生”可表示为 $\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$.

(5) 事件“ A, B, C 不都发生”等价于事件“ A, B, C 至少有一个不发生”可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

1.2 随机事件的概率

一个随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生.我们常常很关心它在一次试验中发生的可能性的,这种可能性大小的度量就是概率.

确定概率的频率的方法是一种常用的方法.

1.2.1 事件的频率

定义 1.2.1 设 E 是某个随机试验, A 是 E 的某个事件, 将试验 E 进行 n 次, 引入记号:

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \quad (1.2.1)$$

其中 n_A 表示事件 A 的频数, 则称 $f_n(A)$ 为 n 次试验中事件 A 发生的频率.

由频率的定义可知, 显然频率具有下列基本性质:

- (1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$.
- (2) $f_n(S) = 1$.
- (3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互斥的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

由频率的定义可以看出, 事件 A 的频率是它发生的次数与试验的总次数之比, 其大小表示的是事件 A 发生的频繁程度. 频率大, 事件 A 发生就频繁, 从而事件 A 在一次试验中发生的可能性就大; 频率小, 事件 A 发生就稀疏, 从而事件 A 在一次试验中发生的可能性就小. 那么, 频率能否准确的表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的的大小呢?

在很长一段时间内, 人们都是用频率来衡量事件 A 在一次试验中发生的可能性的的大小的. 例如, 人们曾经做过的抛硬币试验: 将一枚硬币抛掷 n 次, 观察正面向上的次数 n_A 及正面向上的频率 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$, 表 1-1 列出了几位著名的数学家的试验记录.

表 1-1

试验者	抛硬币的次数	正面朝上的频数	频率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

通过以上试验结果, 我们会发现随着试验次数 n 的不同, 频率 $f_n(A)$ 也是不同的. 但是, 随着试验重复次数 n 的增加, 频率 $f_n(A)$ 会稳定在常数 0.5 附近, 我们称这个常数为频率的稳定值. 这个频率的稳定值就是我们所求的概率.

由频率的稳定性和频率的性质, 我们给出表示事件发生可能性概率的公理化定义.

1.2.2 事件概率的公理化定义及性质

定义 1.2.2 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

- (1) 非负性, $P(A) \geq 0$.
- (2) 规范性, $P(S) = 1$.

(3)可列可加性,设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互斥的事件,即对于 $A_i A_j = \emptyset; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$; 有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$.

由概率的非负性、规范性,可列可加性可以得到概率的下列基本性质.

性质 1.2.1 $P(\Phi) = 0, 0 \leq P(A) \leq 1$.

性质 1.2.2 有限可加性:设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互斥的事件,即对于有 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (1.2.2)$$

性质 1.2.3 设 A, B 是两个事件,若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A); P(A) \leq P(B). \quad (1.2.3)$$

性质 1.2.4 对立事件概率公式:对于任一事件 A , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.2.4)$$

性质 1.2.5 加法公式:(1)对于任意两事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.2.5)$$

(2)对于任意三事件 A, B, C , 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (1.2.6)$$

例 1.2.1 (1)已知 $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.9$, 求 $P(\overline{AB})$.

(2)已知 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A - B) = 0.2$, 求 $P(B - A)$.

解 (1)因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

且 $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.9$,

从而有

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.8 + 0.5 - 0.9 = 0.4,$$

所以

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

(2)因为 $AB \subset A$,

$$P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB),$$

且 $P(A) = 0.4, P(A - B) = 0.2$, 从而有

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.4 - 0.2 = 0.2,$$

所以有

$$P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$$

1.3 古典概率

本节介绍确定随机事件概率的一种比较简单,而又直观的方法——古典概率.

若某一随机试验具有下面两个特征:

- (1) 试验的样本空间的元素(基本事件)只有有限个.
- (2) 试验的每个基本事件出现的可能性相等.

则对于任意事件 A , 对应的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数 } k}{\text{样本空间中基本事件总数 } n} = \frac{k}{n} \quad (1.3.1)$$

并把这样的试验称为古典概型又称为等可能概型.

在计算古典概型的概率时, 主要求事件 A 包含的基本事件数 k 及样本空间 S 中包含的基本事件总数 n , 因此常常要用到排列组合的知识.

例 1.3.1 (1) 将一枚硬币抛掷一次, 设事件 $A = \{\text{恰好正面向上}\}$, 求 $P(A)$.

(2) 将一颗骰子掷一次, 设事件 $B = \{\text{出现的点数为奇数}\}$, 求 $P(B)$.

解 (1) 样本空间为 $S = \{H, T\}$, 因为硬币是均匀对称的, 从而每次抛掷时, 出现正面和反面的可能性是相同的, 从而 $P(A) = \frac{1}{2} = 0.5$.

(2) 样本空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 由骰子的对称性, 可知每个基本事件出现的可能性是相等的, 且 $B = \{\text{出现的点数为奇数}\} = \{1, 3, 5\}$, 所以 $P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$.

例 1.3.2 设袋中有 N 件产品, 其中有 M 件次品, 从中抽取产品 n 次, 每次随机取一件. 考虑两种抽取方式:

(1) 先取一件产品后, 观察它是否为正品, 然后放回袋中, 搅匀后再取一件, 直到取出 n 件为止, 这种抽取方式称为有放回抽样.

(2) 先取一件产品后, 观察它是否为正品, 然后从剩余的产品中再取一件, 直到取出 n 件为止, 这种抽取方式称为不放回抽样.

试分别就上面两种抽样方式, 求事件 $A = \{\text{取到 } m \text{ 件次品}\}$ 的概率.

解 (1) 有放回抽样. 先计算样本空间中基本事件总数: 抽取样本分为 n 次完成, 由于是有放回, 所以每一次都有 N 种取法, 由乘法原则基本事件总数为 N^n . 再计算事件 A 包含的基本事件数: 抽取样本分为 n 次完成, 其中有 m 次取到次品, 有 $n-m$ 次取到正品, 由于与次序无关, 所以事件 A 包含的基本事件数为 $C_n^m M^m (N-M)^{n-m}$. 所以有

$$P(A_1) = \frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}.$$

(2) 不放回抽样. 不放回抽样相当于一次从 N 个产品中任取 n 个, 因为与次序无关, 所以基本事件总数为 C_N^n . 事件 A 相当于取 n 个产品时, 先从 M 件次品中取 m 件, 再从 $N-M$ 件正品中取 $n-m$ 件, 所以事件 A 的基本事件数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. 所以有

$$P(A_2) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, m \leq \min(n, M).$$

(1) 中的分布称为二项分布, (2) 中的分布称为超几何分布.

例 1.3.3 一只袋中有 a 只红球, b 只白球, k 个人依次在袋中取一只球, 不放回抽样, 求第 i ($i=1, 2, \dots, k$) 个人取到红球的概率.

解 设 $A = \{\text{第 } i(i=1, 2, \dots, k) \text{ 个人取到红球}\}$, k 个人各取一球, 每种取法是一个基本事件, 共有 $C_{a+b}^k \cdot k!$ 个基本事件. 当事件 A 发生时, 第 i 个人取的一定是红球, 其有 a 种取法, 其余 $k-1$ 个人从剩余的 $a+b-1$ 个球中各取一球, 共有 $C_{a+b-1}^{k-1} \cdot (k-1)!$ 种取法, 于是事件 A 中包含 $a \cdot C_{a+b-1}^{k-1} \cdot (k-1)!$ 个基本事件, 所以

$$P(A) = \frac{a \cdot C_{a+b-1}^{k-1} \cdot (k-1)!}{C_{a+b}^k \cdot k!} = \frac{a}{a+b}.$$

值得注意的是 $P(A)$ 与 i 无关, 即 k 个人取到红球的概率都相同, 而与取球的先后次序无关. 从而在类似的抽签活动及购买彩票时, 每个人抽中及中奖的机会是相同的. 另外值得注意的是, 很容易验证有放回抽样的情况下 $P(A)$ 也是 $\frac{a}{a+b}$.

例 1.3.4 某班级有 60 个人, 问这个班级至少有两个人的生日在同一天概率是多少?

解 假设一年 365 天, $A = \{\text{至少有两个人的生日相同}\}$, 事件 A 的情况比较复杂, 则首先考虑 A 的对立事件 $\bar{A} = \{\text{所有人的生日不在同一天}\}$ 的概率, 即不同的 60 个人的生日都不相同的概率, 因为

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{365}^{60} \cdot 60!}{365^{60}},$$

所以

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{365}^{60} \cdot 60!}{365^{60}} = 0.9922.$$

这个例子是历史上有名的“生日问题”. 由这个结果可知, “一个班级有 60 人时则至少有两个人的生日在同一天”的概率是 0.9922, 几乎接近于 1, 也就是如果做调查, 会有 99.22% 的 60 人的班级该事件都会发生. 这个事件发生的概率并不如多数人想象的那样小. 从而这个例子告诉我们许多时候“直觉”并不可靠, 同时也更有力地说明了研究随机现象统计规律的重要性.

1.4 条件概率

条件概率是概率论中一个既重要又实用的概念. 所谓条件概率就是指在已知某事件 A 发生的条件下, 求另一个事件 B 的概率, 记为 $P(B|A)$, 它与 $P(B)$ 是不同的两类概率.

例 1.4.1 考察有两个小孩的家庭, 其样本空间为 $E = \{\text{男男, 男女, 女男, 女女}\}$. 事件 $A = \{\text{家中至少有一个女孩}\}$, $B = \{\text{家中至少有一个男孩}\}$, 求 (1) 事件 B 的概率 $P(B)$; (2) 若已知事件 A 发生的情况下, 再求事件 B 发生的概率即 $P(B|A)$.

解 此题为古典概型, 所以

$$(1) P(B) = \frac{3}{4}.$$

(2) 因为事件 A 的发生, 排除了 $\{\text{男男}\}$ 发生的可能性, 则样本空间缩小为 $E = \{\text{男女, 女男, 女女}\}$, 而事件 B 只含有 2 个样本点, 所以 $P(B|A) = \frac{2}{3}$.

由这个例子,我们会发现条件概率 $P(B|A)$ 与无条件概率 $P(B)$ 是不同的两个概念.下面给出条件概率的定义.

1.4.1 条件概率

定义 设 A, B 是两个事件,且 $P(A) > 0$, 则称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.4.1)$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率,简称条件概率. $P(B)$ 称为无条件概率.

不难验证,条件概率 $P(\cdot|A)$ 符合概率定义中的三个条件,即

(1)非负性:对于每一个事件 B ,有 $P(B|A) \geq 0$;

(2)规范性:对于必然事件 S 有 $P(S|A) = 1$;

(3)可列可加性:设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是两两互斥的事件,有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$.

因此,由概率的公理化定义,条件概率也是概率.实际上,它是将原来的样本空间 S 缩小为 $S \cap A = A$, 对任一事件 B , 定义 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 而得到的概率.

例 1.4.2 设在 n 张彩票中有一张奖券,已知第一个人没抽到,求第二个人抽到奖券的概率是多少?

解 设 $A = \{\text{第一个人没抽到奖券}\}$, $B = \{\text{第二个人抽到奖券}\}$,

方法 1 因为 $P(A) = \frac{n-1}{n}$, $P(AB) = \frac{(n-1) \cdot 1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n}$, 由条件概率公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/n}{(n-1)/n} = \frac{1}{n-1}.$$

方法 2 因为已知第一个人没抽到奖券,则第二个人抽时样本空间缩小为 $n-1$ 张彩票,其中有一张奖券,所以 $P(B|A) = \frac{1}{n-1}$.

由这个例题可知,有些情况使用第二种方法更简单.

例 1.4.3 某种动物活到 20 岁的概率为 0.8,活到 25 岁的概率为 0.4. 问现在 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少?

解 设 $A = \{\text{该动物活到 20 岁}\}$; $B = \{\text{该动物活到 25 岁}\}$,

该问题是要求在这种动物已经活到 20 岁的条件下,活到 25 岁的条件概率,即 $P(B|A)$. 显然事件 B 发生时,事件 A 一定发生,即 $B \subset A$, 所以 $AB = B$.

则

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.4, P(AB) = P(B) = 0.4;$$

所以有

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5.$$

1.4.2 乘法公式

由条件概率的定义,可以得到下面的定理.

定理 1.4.1 (乘法定理) 设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \quad (1.4.2)$$

称为乘法公式.

由上式可以推广到多个事件的积事件公式. 一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geq 2$, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \quad (1.4.3)$$

特别地, 当 $n=3$ 时, 设 A, B, C 是三个事件, 则有

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB). \quad (1.4.4)$$

例 1.4.4 假设某校学生英语四级考试的及格率为 98%, 其中 70% 的学生通过了英语六级考试, 试求从该校随机选出一名学生通过英语六级考试的概率.

解 设 $A = \{\text{学生通过英语四级考试}\}$; $B = \{\text{学生通过英语六级考试}\}$.

因为 $P(A) = 98\%$, $P(B|A) = 70\%$, 所以由乘法公式:

$$P(B) = P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.98 \times 0.70 = 0.686.$$

1.4.3 全概率公式

全概率公式是概率论中的一个重要公式, 它提供了计算复杂事件概率的一条有效途径和方法, 将一个复杂事件的概率化为不同原因下发生的简单事件的概率的求和问题.

定理 1.4.2 设试验 E 的样本空间为 S , B 为 E 的事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 且 $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 S 的一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

上式称为全概率公式.

证明 因为 $B = BS = B(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (BA_i)$, 且 $BA_1, BA_2, \dots, BA_n$ 两两互斥, 所以由可加性得

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n) = \sum_{i=1}^n P(BA_i),$$

再将乘法公式 $P(BA_i) = P(A_i)P(B|A_i), (i=1, 2, \dots, n)$. 代入上式, 即得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned}$$

对于全概率公式最简单的形式是 $n=2$ 时, 即 $S = A \cup \bar{A}$, 有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}). \quad (1.4.6)$$

例 1.4.5 播种用的一等小麦种子中混有 2% 的二等种子, 1.5% 的三等种子, 1% 的四等种子. 使用一等、二等、三等、四等种子长出的穗含 50 颗以上的麦粒的概率分别是 0.5, 0.15, 0.1, 0.05, 求这批种子所结的穗含 50 颗以上麦粒的概率.

解 设 $A_i = \{\text{该种子为 } i \text{ 等种子}\}, i=1,2,3,4$. 则 A_1, A_2, A_3, A_4 为样本空间 S 的一个完备事件组, 再设 $B = \{\text{种子结的穗含 50 颗以上麦粒}\}$, 则由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) \\ &= (1 - 2\% - 1.5\% - 1\%) \times 0.5 + 2\% \times 0.15 + 1.5\% \times 0.1 + 1\% \times 0.05 \\ &= 0.4825. \end{aligned}$$

1.4.4 贝叶斯公式

由全概率公式和条件概率公式可以得到下面这个重要的公式——贝叶斯(Bayes)公式.

定理 1.4.3 设试验 E 的样本空间为 S , B 为 E 的事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 S 的一个完备事件组, 且 $P(B) > 0, P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.4.7)$$

上式称为贝叶斯公式.

贝叶斯公式是用来求一个条件概率 $P(A_i|B)$ 的, 如果称 $P(A_i)$ 为事件 A_i 的先验概率, 即没有任何信息(事件 B 是否发生)的情况下事件 A_i 发生的概率; 则 $P(A_i|B)$ 称为事件 A_i 的后验概率, 也就是通过事件 B 发生这个信息, 对 A_i 发生的概率做出修正.

当 $n=2$ 时, $S=A \cup \bar{A}$, 有 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}. \quad (1.4.8)$

例 1.4.6 设“孩子与狼”的故事中, 事件 $A = \{\text{小孩可信}\}$, 事件 $B = \{\text{小孩说谎}\}$, 且 $P(A) = 0.8, P(\bar{A}) = 0.2, P(B|A) = 0.1, P(B|\bar{A}) = 0.5$. (1)求第一次小孩说谎后, 农夫们相信小孩的概率; (2)第二次小孩说谎后, 农夫们相信小孩的概率.

解 (1)由贝叶斯公式可得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.8 \times 0.1}{0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.5} \approx 0.444.$$

由此可知, 当农夫们上了一次当后, 对这个小孩的可信度由原来的 0.8 下降为 0.444, 所以(2)中 $P(A) = 0.444, P(\bar{A}) = 0.556$, 由贝叶斯公式可得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.444 \times 0.1}{0.444 \times 0.1 + 0.556 \times 0.5} \approx 0.138.$$

可见, 当农夫们上了两次当后, 对小孩的可信度已经从 0.8 下降为 0.138, 如此低的可信度, 当小孩第三次呼救时还有谁会相信他呢?

1.5 事件的独立性

由上述内容我们知道事件 B 发生的条件概率 $P(B|A)$ 与无条件概率 $P(B)$ 是不同的, 也就说明事件 A 的发生影响着事件 B 发生的概率. 很多试验中, 事件 B 发生的概率不受事件 A