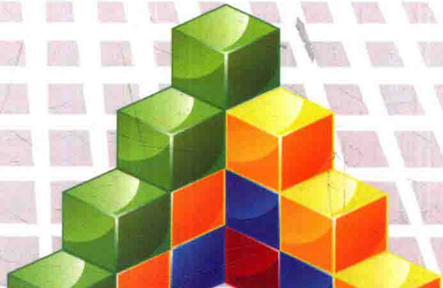
普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数与几何

（独立院校用）

XIANXINGDAISHU YU JIHE

郑丽芳　申思远　荣建华　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数与几何

（独立院校用）

主　编　郑莉芳　申思远　荣建华
副主编　安宏伟　梁　茜　张国强
主　审　李忠定

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为大学独立院校工科各专业公共课教材，共4册：《高等数学（独立院校用）》（上下册）、《线性代数与几何（独立院校用）》、《概率论与数理统计（独立院校用）》。本书是《线性代数与几何（独立院校用）》。

本书是根据编者在独立学院的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并结合“线性代数与几何课程教学基本要求”编写的。内容包括：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、空间解析几何。

本书内容简洁，选材适当，重点放在加强基本理论与基本方法上，叙述严谨，并力求做到深入浅出、通俗易懂。与同类教材比较，本书中虽然删掉了“线性变换”一章，但并不影响知识结构的完整性。各章末均附有适量的习题，可供读者掌握基本知识、基本计算方法和拓宽知识面使用。

本书适合作为普通高等学校独立学院类各专业教材，也可作为专科类、成人高校各专业教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与几何/郑莉芳，申思远，荣建华主编．—北京：中国铁道出版社，2016.1
普通高等学校“十三五”规划教材．独立院校用
ISBN 978-7-113-21188-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郑… ②申… ③荣… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第317054号

书　　名：线性代数与几何（独立院校用）
作　　者：郑莉芳　申思远　荣建华　主编

策　　划：李小军　　**读者热线：**（010）63550836
责任编辑：李小军
编辑助理：曾露平
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任校对：汤淑梅
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址：http：//www.51eds.com
印　　刷：三河市兴达印务有限公司
版　　次：2016年1月第1版　　2016年1月第1次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张：**10.75　**字数：**213千
书　　号：ISBN 978-7-113-21188-2
定　　价：25.00元

前　言

本书是在参照广大同行、读者的建议和编者在教学中的实践经验的基础上进行编写的. 在编写中，本书遵循以下几条原则：

1. 本书在结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点的基础上，吸收当前教材改革中一些成功的改革精华，使得本书能符合改革精神、适应时代要求，更适应当前独立学院教学的需要.

2. 在完全符合“独立学院数学基础课程教学基本要求”的基础上，拓展教材的深度和广度. 在编写过程中，增加了一些与实际应用相结合的例题，力求理论联系实际；教材在注重基础的同时兼顾深入，如第 3 章增加了过渡矩阵的知识等，以适应当前我国独立学院各专业本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需求.

3. 教材的习题配置是实现教学要求，提高教学质量的重要环节. 编写时根据教学的基本要求并借鉴全国硕士研究生入学统一考试的试题，对每章习题进行了优化，以满足不同层次学生对习题的需求.

4. 注重教材的完整性和实用性. 在每章后增加本章小结，以更好帮助读者深入理解各章知识体系.

5. 对于教学大纲基本要求之外的内容和某些理论性较强的章节，我们用 * 号标出，各校可以根据具体的教学要求和学时进行取舍.

本书由郑莉芳、申思远、荣建华担任主编，安宏伟、梁茜、张国强担任副主编，李忠定教授担任主审. 与此同时，在本书的编写过程中，得到了石家庄铁道大学四方学院各级领导的大力支持和基础部广大教师的热情帮助，在此谨向他们表示诚挚的感谢.

由于编者能力、水平有限，书中难免有不足之处，殷切希望使用本书的广大读者批评指正，以使本书不断完善.

编　者

2015 年 10 月

目 录

第 1 章

行 列 式

行列式是研究线性方程组的一个重要的工具.历史上正是为了解线性方程组,表达方程组求解的有关问题而引进行列式的,并且行列式在其他领域(如物理学、力学、工程技术)也经常用到.

本章主要讨论了行列式的定义;行列式的计算;给出了计算方程个数和未知数个数相等的线性方程组的一种方法——克莱姆法则.

1.1 二、三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases},\tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时,此方程组有唯一解,即

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

我们引入记号 $$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}.$$

称 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**.其中 $a_{11},a_{22},a_{12},a_{21}$ 称为行列式的**元素**,这四个元素排成两行两列,横排称**行**,竖排称**列**.元素 a_{ij} 的右下角有两个下标 i 和 j,第一个下标 i 称为**行标**,它表示元素所在的行,第二个下标 j 称为**列标**,它表示元素所在的列,如 a_{21} 是位于第二行第一列上的元素.从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的**主对角线**,从行列式的右上角到左下角的连线称为行列式的**次对角线**.

于是上述解可以用二阶行列式叙述为:

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.1)的解可记为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,

则

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注 (1) 二阶行列式的计算方法:

二阶行列式是两项的代数和,一项是主对角线上两个元素的乘积,取正号;另一项是次对角线上两个元素的乘积,取负号.这种计算方法称作**对角线法则**.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times3=-2.$

(2) 行列式 D 中的元素正好是方程组(1.1)中未知数的系数按照原来的相对位置不变构成的,因此一般将行列式 D 称为方程组(1.1)的**系数行列式**,而行列式 D_1 和 D_2 是由常数项 b_1 和 b_2 排成的列分别取代 D 中的第一列和第二列得到的.

1.1.2 三阶行列式

利用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

得 $x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$

(x_2, x_3 的表达式略)

将代数式 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 用符号表示为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**.

当三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,与二元线性方程组类似,上述三元线性方程组有唯一解,解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

注 (1) 三阶行列式的计算方法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

三阶行列式是六项的代数和,沿主对角线方向(实线)三个元素相乘取正号,沿次对角线方向(虚线)三个元素相乘取负号,这种方法也称作**对角线法则**,如图 1.1 所示.

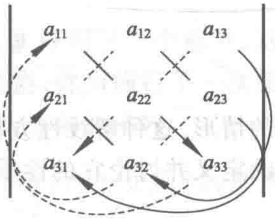


图 1.1

(2) 二、三阶行列式的对角线法则并不能推广到更高阶行列式.

例 1 用对角线法则计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned} D&=2\times3\times6+(-5)\times(-3)\times4+0\times1\times(-1) \\ &\quad -0\times3\times4-(-5)\times1\times6-2\times(-3)\times(-1)=120. \end{aligned}$$

例 2 用对角线法则计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

解
$$D=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a).$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+4x_3=0\\ 3x_1-7x_2+5x_3=5\end{cases}.$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & -7 & 5\end{vmatrix}=-10+12-7-3-56-5=-69\neq 0,$$

因此有解,再计算 D_1,D_2,D_3:

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -7 & 5\end{vmatrix}=-51,\quad D_2=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 3 & 5 & 5\end{vmatrix}=31,\quad D_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -7 & 5\end{vmatrix}=5,$$

代入公式得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{17}{23},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{31}{69},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{5}{69}.$$

在这一章我们要把这个结果推广到 n 个方程的 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的情形.这种解线性方程组的方法将在 1.6 节中提到.为此,首先给出 n 阶行列式的定义并讨论它的性质,进而计算 n 阶行列式.

1.2 排 列

1.2.1 排列的概念

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个不同的数码组成的一个有序组称为一个 **n 级排列**.

显然,$1,2,\cdots,n$ 也是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,即按递增的顺序排列,其他的排列或多或少地破坏自然顺序.

例如,12345,14532,13452 都是由 1,2,3,4,5 组成的一个 5 级排列.

定义 2 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么就称它们构成一个**逆序(反序)**,一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

例如上面的第一个排列的逆序数 $\tau(12345)=0$，因为不存在较大的数字排在较小的数字前面，都是按自然顺序排列的，所以没有逆序，逆序数为 0.

一般地，将 $1,2,\cdots,n$ 这种按照从小到大的自然顺序排成的排列称为**标准排列**.

例 计算排列 14532 的逆序数.

解 第一个位置是 1，1 小于后面的所有数字，所以这里有 0 个逆序；

第二个位置是 4，后面比 4 小的数有 3，2，所以这里有 2 个逆序；

第三个位置是 5，后面比 5 小的数有 3，2，所以这里有 2 个逆序；

第四个位置是 3，后面比 3 小的数有 2，所以这里有 1 个逆序；

第五个位置是 2，2 后面没有数字，所以这里有 0 个逆序；

得，这个排列的逆序数 $\tau(14532)=0+2+2+1+0=5$.

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

第一个排列 12345 是偶排列，第二个排列 14532 是奇排列.

应该指出，同样可以考虑由任意 n 个不同的自然数所组成的排列，一般也称为 n 级排列，对这样一般的 n 级排列，同样可以类似地定义上面这些概念.

1.2.2 对换

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**（如果对相邻位置的两个数进行对换，称为施行了一次**相邻对换**）. 显然，如果连续施行相同的对换，那么排列就还原为原来的排列.

例如，一次相邻对换 $456231 \xrightarrow{\text{5与6相邻对换}} 465231$，逆序数由 11 变成 12，奇排列变成偶排列；

一次不相邻对换 $416235 \xrightarrow{\text{5与1不相邻对换}} 456231$，逆序数由 6 变成 11，偶排列变成奇排列.

结果表明，经过一次对换（相邻或不相邻），都会改变排列的奇偶性. 此结果具有一般性.

定理 1 每一次对换改变排列的奇偶性.

证明 (1)首先考虑一个特殊情形，就是被对换的两个数是相邻的. 设给定的排列为 $\cdots,i,j,\cdots.$

对 i,j 施行相邻对换变成 $\cdots,j,i,\cdots.$

比较这两个排列的逆序数. 除 i,j 这两个数码外，其他数码的位置没有改变，因此这些数码所构成的逆序数没有改变. 同时 i,j 这两个数码和其他数码构成的

逆序数也没有改变.若给定的排列$\cdots,i,j,\cdots$中,$i<j$,那么经过一次相邻对换后i和j就构成一个逆序,因而后一个排列$\cdots,j,i,\cdots$的逆序数就比前一个排列$\cdots,i,j,\cdots$增多了一个.若给定的排列$\cdots,i,j,\cdots$中,$i>j$,那么经过一次相邻对换后,i和j就构成一个逆序,因而后一个排列$\cdots,j,i,\cdots$的逆序数就比前一个排列$\cdots,i,j,\cdots$减少了一个.无论哪一种情形,排列的奇偶性都发生改变.

(2)对于一般情形,假定i和j之间有s个数码,我们用$k_1,k_2,\cdots,k_s$来代表,这时给定的排列为

$$\cdots,i,k_1,k_2,\cdots,k_s,j,\cdots. \tag{1.2}$$

先让i向右移动,依次与$k_1,k_2,\cdots,k_s$交换.这样,经过s次相邻对换以后,排列(1.2)变为

$$\cdots,k_1,k_2,\cdots,k_s,i,j,\cdots. \tag{1.3}$$

再让j向左移动,依次与$i,k_s,\cdots,k_2,k_1$交换.经过$s+1$次相邻对换以后,排列(1.3)变为

$$\cdots,j,k_1,k_2,\cdots,k_s,i,\cdots. \tag{1.4}$$

(1.4)正是由(1.2)施行一次对换i和j数码而得到的排列.因此,对(1.2)中的数码i和j施行对换相当于连续施行$2s+1$次相邻对换.由第一种情形,施行一次相邻对换排列的奇偶性改变,由于$2s+1$是一个奇数,所以(1.2)和(1.4)的奇偶性相反.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

定理 2 $n\geqslant 2$时,n个数码的奇排列与偶排列的个数相等,均等于$\frac{n!}{2}$个.

证明 设n个数码的奇排列共有p个,而n个数码的偶排列共有q个,对这p个奇排列施行同一个对换(交换第i和第j个位置的数码),得到p个偶排列,有$p\leqslant q$.同理,对这q个偶排列施行同一个对换(交换第i和第j个位置的数码),得到q个奇排列,有$q\leqslant p$.因而有$p=q$.

1.3 n阶行列式

在给出n阶行列式的定义之前,先来回忆一下二阶和三阶行列式的定义.有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

以三阶行列式为研究对象：

从形式上看，三阶行列式是上述特定符号表示的一个数，这个数由一些项的和而得：

(1) 项的构成：取自不同行和不同列的元素的乘积；

(2) 项数：三阶行列式是 3！项的代数和，每项的一般形式可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 j_1,j_2,j_3 为 1,2,3 这三个数做成的某一个排列；

(3) 项的符号：取 j_1,j_2,j_3 的全排列给出全部项，$a_1j_1a_2j_2a_3j_3$ 项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$，即当行标按照标准排列排定以后，符号由列标排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定.

由三阶行列式验证有：

带正号的 3 项列标排列是：123，231，312，均为偶排列；

带负号的 3 项列标排列是：132，213，321，均为奇排列.

由以上分析，三阶行列式可以简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 1　用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

表示的 n 阶行列式指的是 n！项的代数和，这些项是一切可能取自(1.8)的不同行不同列上的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{j_1j_2\cdots j_n}$，也就是说，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，这一项的符号为正；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，这一项的符号为负. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.9}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

定义表明，为了计算 n 阶行列式，首先作所有可能位于不同行不同列元素构成的乘积，把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序，由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号.

下面给出另一形式的 n 阶行列式定义.

在行列式的定义中,为了决定每一项的正负号,把每一项元素按行标排成自然顺序.事实上,数的乘法运算是满足交换律的,因而这个元素的次序是可以任意写的,一般地,n 级行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.10}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$是两个 n 级排列.利用排列的性质,(1.10)式的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \tag{1.11}$$

按(1.11)式来决定行列式中每一项的符号的好处在于,行标与列标的地位是对称的,因而为了决定每一项的符号,同样可以把每一项按列标排起来,于是定义 3.1 又可以写成:

定义 2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码做成的某一个排列.

例 1 计算对角行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的定义易得 $D=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由定义 1,和式中仅当 $j_1=n,j_2=n-1,\cdots,j_{n-1}=2,j_n=1$ 时,

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq 0.$$

所以$D=(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1]}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}1\cdot 2\cdots n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

一般地,次对角行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

例 3　计算上三角行列式(主对角线以下的元素全为 0).

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由定义 1,行列式中仅当 $i_1=1,i_2=2,\cdots,i_{n-1}=n-1,i_n=n$ 时,

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\neq 0.$$

所以
$$D=(-1)^{\tau[1\cdot 2\cdots(n-1)n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4　类似上三角形行列式的计算方法,计算**下三角行列式**(主对角线以下的元素全为 0).

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　类似上三角形行列式的计算方法,$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

以上三种行列式,对角行列式(例 1)、上三角行列式(例 3)、下三角行列式(例 4)都等于主对角线上元素的乘积.

容易看出,行列式是一个数,这是行列式的本质.

1.4　行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题,也是一个很复杂的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项的和,计算它就需做 $n!(n-1)$个乘法. 当 n 较大时,$n!$ 是一个相当大的数字,直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事,因此有必要进一步讨论行列式的性质,利用这些性质可以化简行列式的计算.

定义　将行列式 D 的所有行依次变成相同序号的列,所得到行列式称为行列式 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}或 D'. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

实际书写时,使用"**横着看,竖着写**"口诀,便可得到转置行列式.

性质 1　行列式转置后,其值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明　记