经全国中小学教材审定委员会
2007年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修3–3

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

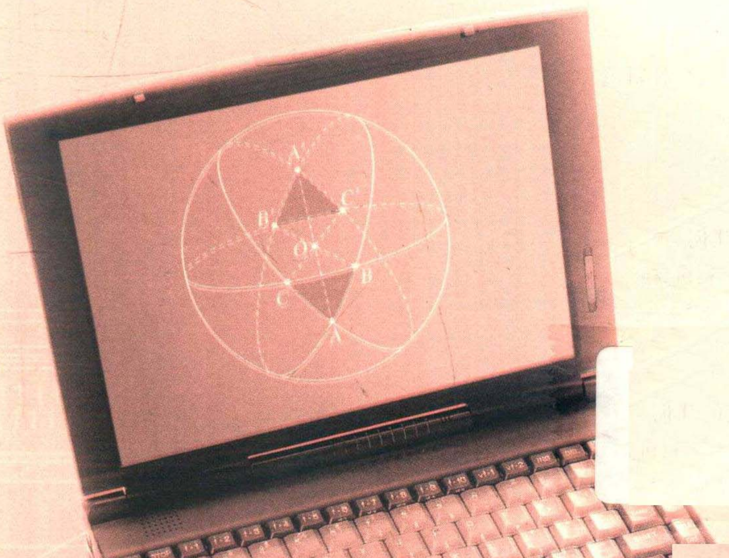
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 3－3

A 版

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：3.75　字数：75 000

2007 年 5 月第 1 版　2011 年 11 月第 8 次印刷

ISBN 978－7－107－20470－8
G·13520（课）　定价：4.05 元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：王申怀　张劲松　刘长明
责任编辑：张劲松
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

主　编　寄　语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，它是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

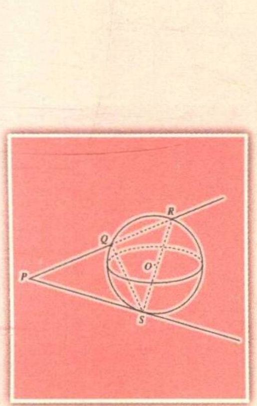
的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

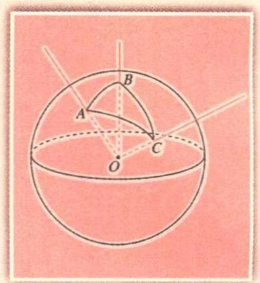
在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

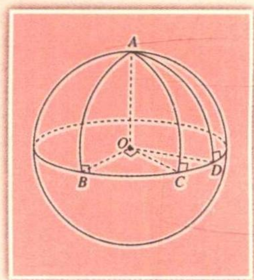
学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

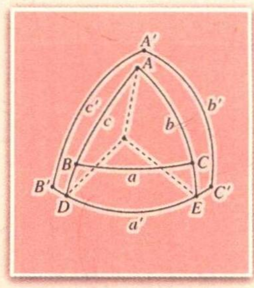
学数学趁年轻. 同学们，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

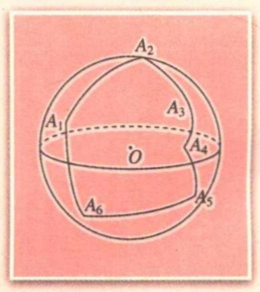
目 录

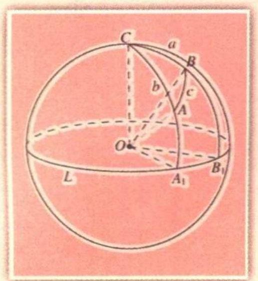


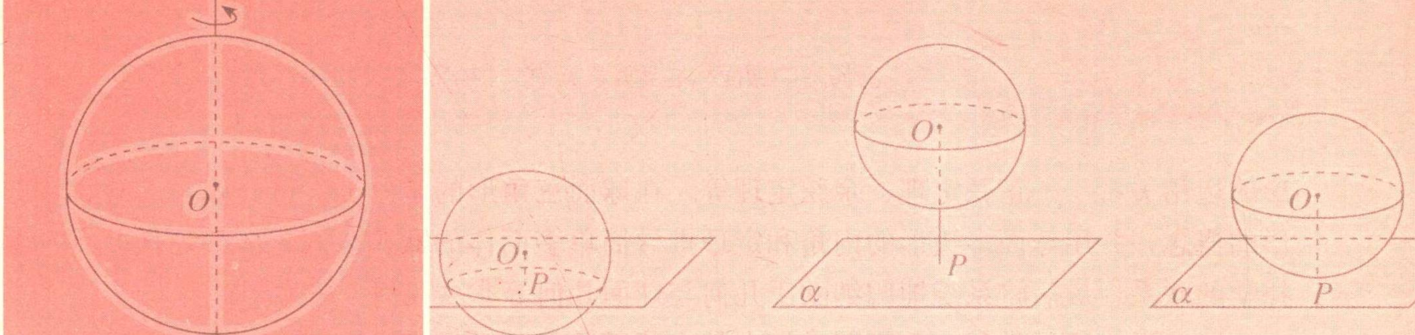

B
A
C
O


A
O
B
C
D


A'
A
c'
c
b
b'
B
C
a
B'
D
E
C'
a'


A_2
A_3
A_1
O
A_4
A_6
A_5


C
a
B
b
c
A
O
L
A_1
B_1



引言

在《数学 2》中，我们学习过球体，它是以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体. 包围球体的曲面叫做球面. 半圆的圆心叫做球心，半圆的半径叫做球的半径，半圆的直径叫做球的直径（图 0-1).

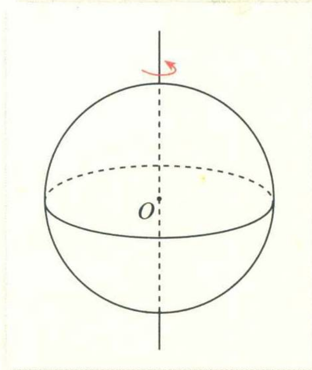


图 0-1

球面既可看成半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所成的曲面，又可看成与定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合. 本专题将研究球面上的几何（以后简称球面几何），考察球面上的点、线以及某些几何图形的性质和度量等等.

球面几何与人类的生产、生活息息相关. 我们生活的地球可近似看成一个球，航海、航空、卫星定位等都离不开球面几何的知识.

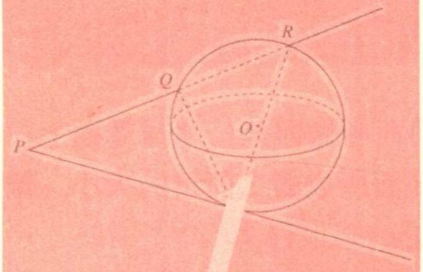
球面与平面虽然都是几何图形，但是两者之间有很大的不同，同时又存在紧密的联系. 研究球面几何离不开欧氏几何，欧氏几何是研究球面几何的基础. 我们可以通过类比欧氏几何的一些结论，猜想球面几何的相关结论；也可以通过这种类比，得到球面几何的研究方法. 比如，在地球这样半径极大的球面上，从非常小的范围来看，大地好像一个平面. 我们站在操场上，感觉操场是很平的. 这就好比半径很大的一个圆上的一段小圆弧可近似看成线段一样. 对地球表面面积非常小的局部区域，我们可以从欧氏几何的角度进行研究. 也就是说，把地球表面非常小的局部区域看成平面区域，这种观点就是所谓局部“欧氏化”，此时所得结论与实际情况基本相符. 但是，从大的范围看，如航海、航空、卫星定位等实际问题，采用“欧氏化”的研究方法所得出的结论就可能产生很大的误差，这时球面几何的知识就很有用了.

类比是学习本专题的重要思想方法. 类比欧氏几何的研究问题和研究方法，主要是平面三角形的有关知识，提出球面几何的问题，研究球面上的图形，特别是球面三角形的有关性质.

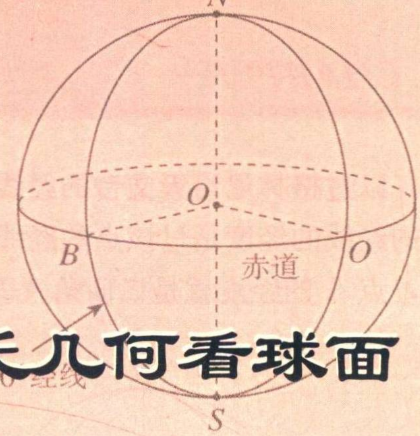
本专题首先从我们熟悉的欧氏几何出发，回顾平面、直线与球面的位置关系，得出与圆幂定理类似的球幂定理. 然后从距离和角出发，进入球面几何的学习. 我们知道，距离和角是平面上描述位置的基本概念，类似地，球面上的距离和角是球面上描述位置的基本概念. 球面上的距离是本专题的核心概念，我们将学习球面上的距离和角的度量方法，并在此基础上，引进球面上的基本图形. 与三角形是欧氏几何的研究重点一样，球面三角形是球面几何的研究重点. 我们将研究它的内角和，两个球面三角形全等的判定，球面三角

形的边角关系——正弦定理、余弦定理等. 在球面三角形的基础上，进一步学习球面多边形的概念，并用球面多边形的内角和定理推导简单多面体的欧拉公式，体会球面几何与拓扑学的联系. 最后将系统地归纳欧氏几何与球面几何等非欧几何的联系与差异.

通过本专题的学习，希望同学们在学会球面几何基础知识的同时，认真体会球面几何在实践中的作用，学会用球面几何的知识解决一些简单的实际问题. 从中感受球面几何是描述客观世界的一类非常重要的数学模型，更好地了解我们生活的地球，更深入地认识客观世界.



第一讲　从欧氏几何看球面



我们以前学习的平面几何和立体几何统称欧几里得几何（简称欧氏几何）．本讲我们从欧氏几何的角度，即把平面和球面都放到三维欧氏空间中，利用已学过的立体几何知识研究平面、直线与球面的位置关系及其几何性质，主要介绍平面与球面的位置关系、直线与球面的位置关系、球幂定理以及球面的对称性.

一、平面与球面的位置关系

类比直线与圆的位置关系，结合图 1-1，我们知道，平面与球面有三种位置关系：

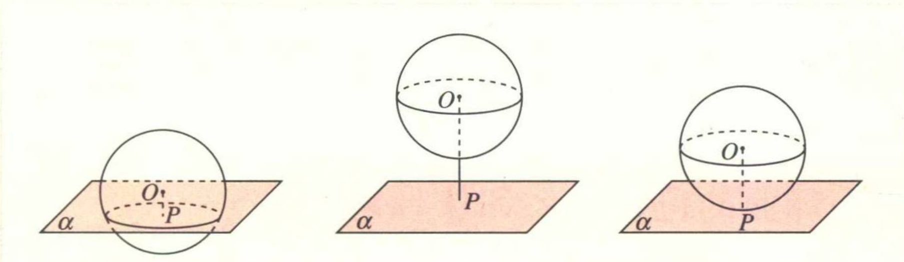


图 1-1

1. 平面与球面相交

用任意一个平面去截一个球，截面是圆面，平面与球面的交线是一个圆.

> 你能证明这个结论吗？试一试！

当平面与球面相交时，球心到平面的距离小于球的半径 r.

2. 平面与球面相离

平面与球面不相交，没有交点．此时球心到平面的距离大于球的半径 r.

3. 平面与球面相切

平面与球面相交，且只有一个交点．此时球心到平面的距离等于球的半径 r.

球面被经过球心的平面截得的圆叫做**大圆**，被不经过球心的截面截得的圆叫做**小圆**.

> 你能证明小圆的半径小于大圆的半径吗？试一试！

如图 1-2，当我们把地球看作一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆，它以北极和南极为端点．国际

上，以过格林尼治天文台的经线为 0°经线，向东叫做东经，向西叫做西经．地球球面上一点的经线的经度是过该点的经线所在半平面与 0°经线所在半平面所成的二面角的大小．例如，点 A 的经度就是二面角 $A\text{-}NS\text{-}B$ 的大小，即$\angle BOC$ 的大小．

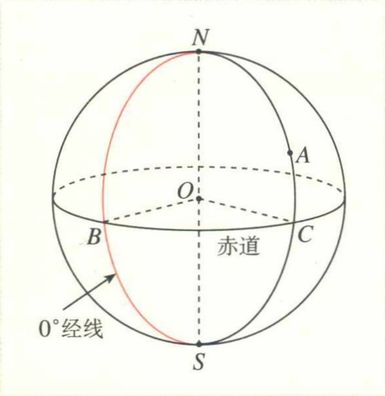


图 1-2

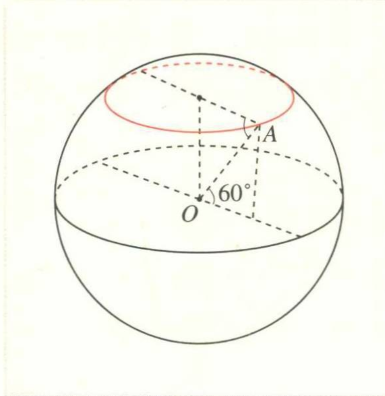


图 1-3

赤道是一个大圆．与赤道所在平面平行的平面截地球表面所得的小圆叫做纬线．过地球球面上一点的纬线的纬度是该点与球心的连线与赤道平面所成的角的大小．赤道以北叫做北纬，赤道以南叫做南纬．赤道为 0°纬线．除赤道以外的其他纬线都是小圆．如图 1-3 的纬线是北纬 60°．

很明显，地球表面上任意一点由经度和纬度唯一确定．

如果没有特别说明，以后我们把地球看成球，把地球表面看成球面．

二、直线与球面的位置关系和球幂定理

如图 1-4，同样，直线与球面也有三种位置关系．

1．直线与球面相交：直线与球面有两个交点，这条直线叫做球面的割线．此时球心到直线的距离小于球的半径 r；

2．直线与球面相离：直线与球面没有公共点．此时球心到直线的距离大于球的半径 r；

3．直线与球相切：直线与球面有且只有一个公共点，这个公共点叫做切点，这条直线叫做球面的切线．此时球心到直线的距离等于球的半径 r．

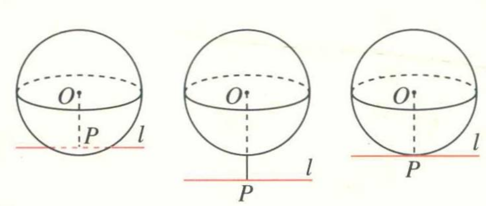


图 1-4

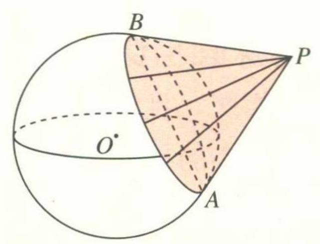


图 1-5

容易证明，过球面外一点 P 作球面的切线，所有的切线长（切点与点 P 间的距离）相等，它们构成一个圆锥面，如图 1-5.

如图 1-6，我们知道，在平面几何中有切线长定理、切割线定理、相交弦定理，这些定理统称圆幂定理.

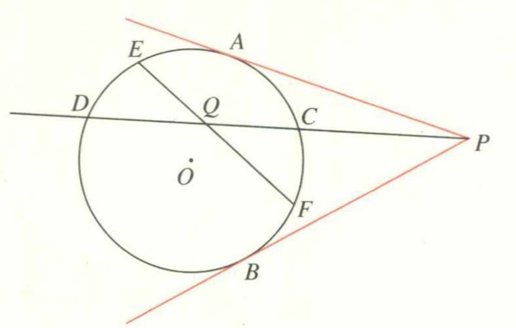


图 1-6

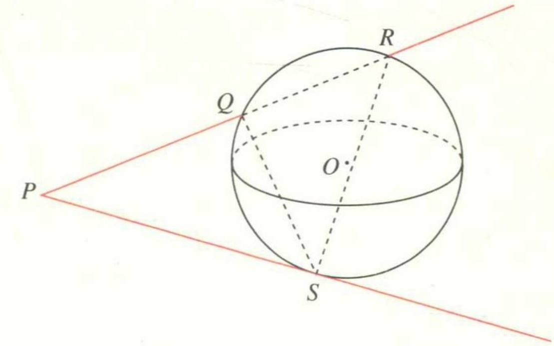


图 1-7

如图 1-7，类比圆幂定理，可以发现：

定理 1 从球面外一点 P 向球面引割线，交球面于 Q，R 两点；再从点 P 引球面的任一切线，切点为 S，则

$$PS^2=PQ\cdot PR.$$

证明： 如图 1-7，连结 SQ，SR.

由于两条相交直线 PS，PR 唯一确定平面 α，设平面 α 与球面的截面的圆心为 O. 由圆幂定理可知

$$PS^2=PQ\cdot PR.$$

定理 2 从球面外一点 P 向球面引两条割线，它们分别与球面相交于 Q，R，S，T 四点（图 1-8），则

$$PQ\cdot PR=PS\cdot PT.$$

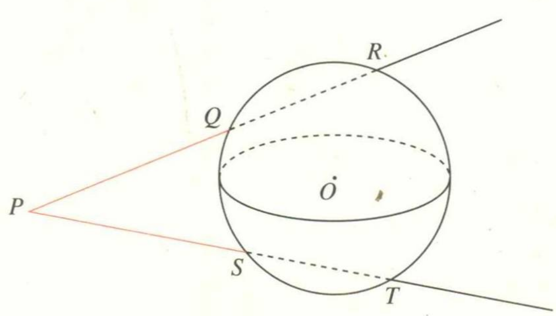


图 1-8

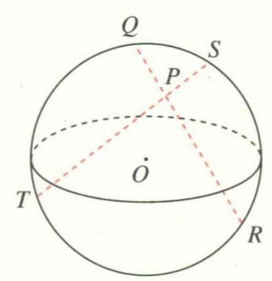


图 1-9

定理 3 设点 P 是球面内的一点，过点 P 作两条直线，它们分别与球面相交于 Q，R，S，T 四点（图 1-9），则

$$PQ \cdot PR = PS \cdot PT.$$

你能仿照定理 1 的证明过程，证明定理 2 和定理 3 吗？

定理 1、定理 2 和定理 3 统称为**球幂定理**.

三、球面的对称性

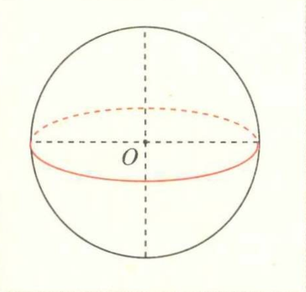


图 1-10

圆是非常美的对称图形，它既是轴对称图形，又是中心对称图形. 球面是一个旋转曲面，与圆一样，球面也有很好的对称性. 如图 1-10，我们容易看出：

（1）球面关于球心对称；

（2）球面关于球的任意一条直径对称；

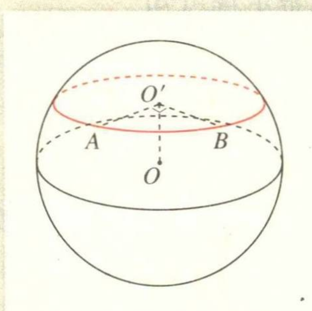
（3）球面关于球的大圆对称.

> 你还能发现其他一些对称性吗？

球面的这种对称性有很多应用，对我们研究球面几何具有很大的帮助.

思考题

1. 求证：（1）用任意一个平面去截一个球，平面与球面的交线是一个圆；
   （2）这些圆中大圆是半径最大的圆.
2. 证明定理 2 和定理 3.
3. 按照纬度的定义，北极的纬度是多少？南极呢？
4. 假设地球的半径为 R，如图；在北纬 45° 的纬线上有 A，B 两点，且 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 90°，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长.



（第 4 题）

5. 在航海中，常用海里作为路程的度量单位. 1 海里的意义是地球表面上大圆的 1′ 圆心角所对的弧长. 已知地球的半径约为6 400 km，1 海里等于多少千米（精确到 0.001 km）？
6. 查阅有关资料，了解北回归线、南回归线，北极圈、南极圈的纬度分别是多少？
7. 球面具有很好的对称性，除正文中提到的外，球面还有哪些对称性质？你能举出一些实例吗？

第二讲　球面上的距离和角

在上讲中，我们从欧氏几何的角度看球面，运用欧氏几何的研究方法，研究了球面的一些性质．本讲我们从球面上的距离和角开始，进入球面几何的学习．

我们知道，位置是空间中最原始、最基本的概念之一．几何中常用点表示位置，并用距离和角度（方位）来刻画位置间的关系．与欧氏几何的学习类似，对球面几何的学习，我们从球面上的距离和角这两个最基本的概念开始．

一、球面上的距离

如图 2-1，我们知道，在平面上，经过两点可以连一条直线，且只可连一条直线．平面上两点之间的所有连线中，线段最短，这条线段的长度叫做两点之间的距离．平面上的两条直线有两种位置关系：平行和相交，如果相交，那么只有一个交点．平面上的直线可以无限延长等等．这些都是平面上直线的性质．

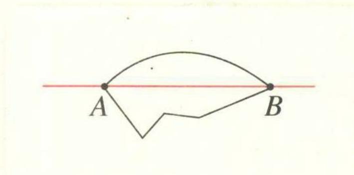


图 2-1

在平面上可以画出直线，但球面是一个曲面，球面上的线是弯曲的，不存在直线．球面上有没有某种曲线可以“扮演”平面上直线的角色呢？也就是说，连结球面上任意两点有无数条曲线，而且它们的长短不一，其中是否存在一条最短的曲线？

思考

如图 2-2，一架飞机从北京首都国际机场起飞，目的地是美国纽约肯尼迪国际机场．北京与纽约大致都在北纬 40°上，如果不考虑其他因素，飞机怎么飞行能够使航程最短？

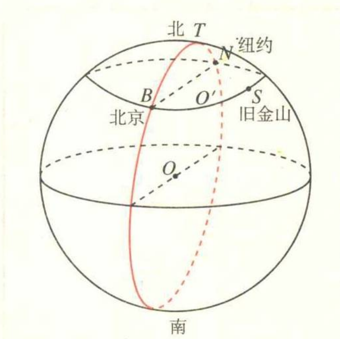


图 2-2

我们用点 B 表示北京、点 N 表示纽约，点 O 表示球心．显然，在球面上，点 B，点 N 之间可以连无数条曲线．在这无数条曲线中，经过点 B，点 N 之间有一个最短的路径．实际上，经过 B，N，O 三点（显然，这三点不在同一条直线上）的平面截球面，得到一个圆，这个圆是大圆．大圆上的两点 B，N 把大圆分成两段圆弧，长的一段叫做优弧，短的一段叫做劣弧．这段劣弧的长度就是球面上这两点之间的最短路径，我们称之为**球面上两点间的距离**．

再回到图 2-2，飞机沿着大圆从北京向北经极地飞行到达纽约，航程最短．它比飞机向东沿北纬 40°的小圆，经旧金山到达纽约的航程要短．

如果我们把图中的大圆弧和小圆弧画到同一个平面，如图 2-3．观察图形可知，以点 O 为圆心，OB 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{BSN}$，比以点 O' 为圆心，$O'B$ 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{BTN}$ 要短．也就是说，平面上经过任意两点的劣弧中，半径越大，劣弧越短．

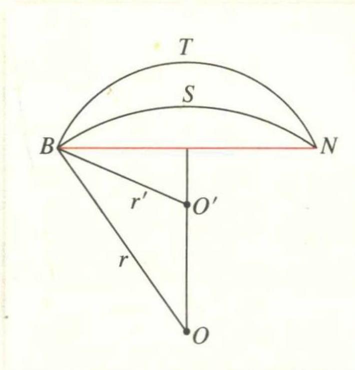


图 2-3

这个结论非常重要，它的严格证明详见附录．

因此，球面上连结两点之间的最短路径是经过这两点的一段大圆弧——劣弧．

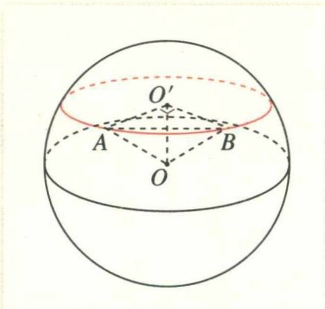


图 2-4

例 1 假设地球的半径为 R，如图 2-4，在北纬 45°的纬线上有 A，B 两点，且 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AO'B=90°$，求球面上 A，B 两点间的距离．

解： 如图 2-4，连结 OA，OB，AB，OO'．由纬度的意义，可得

$$\angle OBO'=45°,\ O'B=R\cdot\cos\angle OBO'=R\cdot\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

同理，$O'A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R.$

因为 $\angle AO'B=90°$，

所以 $AB=\sqrt{O'A^2+O'B^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2}=R.$

又因为 $OA=OB=R$，

所以 $\angle AOB=60°$．

因此，球面上 A，B 两点间的距离等于 $\dfrac{\pi}{3}R$．

在圆 O' 中，劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于多少？

由于不在同一条直线上的三点唯一确定一个圆，因此过球面上两点必可连一条大圆弧——劣弧，且只可连一条大圆弧——劣弧．这类似平面上经过两点可以连一条直线，且只可连一条直线；平面上两点之间的最短路径是线段．因此，球面上的大圆可以“扮演”平面上直线的角色．

尽管球面上的大圆可以“扮演”平面上直线的角色，但是两者之间也有很大的不同．