大学数学学习方法指导丛书

高等代数

（第三版）

姚慕生　谢启鸿　编著

复旦大学数学科学学院主编

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

大学数学学习方法指导丛书

高等代数

（第三版）

复旦大学数学科学学院　主编

姚慕生　谢启鸿　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/姚慕生,谢启鸿编著. —3版. —上海:复旦大学出版社,2015.9
(大学数学学习方法指导丛书)
ISBN 978-7-309-11776-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①姚…②谢… Ⅲ. 高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 015

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第217207号

高等代数(第三版)
姚慕生 谢启鸿 编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海浦东北联印刷厂

开本787×960 1/16 印张34 字数614千
2015年9月第3版第1次印刷

ISBN 978-7-309-11776-9/O·574
定价:68.00元

内 容 提 要

本书是大学本科生学习高等代数(或线性代数)的参考书. 内容包括:行列式、矩阵、线性空间、线性变换以及多项式理论等. 书中有近千道各种层次的习题及其解答,内容翔实, 其中对典型题例的分析为读者提供了解决各种问题的方法. 这些方法是编者多年来从事高等代数教学的经验与心得. 本书适合大学理工科各专业以及经济管理类专业学生学习使用,既可以作为初学者学习高等代数或线性代数时的参考读物,也可以作为报考研究生的复习资料.

序 言

多年前, 复旦大学数学科学学院 (原数学系和数学研究所) 几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书. 丛书出版后颇受欢迎, 不久书市即告售罄. 其后, 兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购, 出版社也多次与我们联系再版事宜, 只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务, 无暇顾及修订工作. 近年来, 随着学科的发展, 课程建设又提上了议事日程. 我院一些重要基础课的新教材陆续问世, 与此同时, 不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿. 在复旦大学出版社的促进下, 推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了.

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期. 科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的进展, 大大拓展了数学科学的范围和领域. 在不少场合, 数学已经从科学研究的幕后, 大步跨上了技术应用的前台, 成为打开众多机会大门的钥匙. 这就导致社会对其成员数学能力要求的指标不断提高, 期望涌现出更多的数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才. 相应地, 数学教育的目标, 也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授, 更重要的在于引导学生掌握一门科学的语言, 学到一种理性思维的模式, 接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练. 卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争做好准备.

数学的理论是美妙的, 引人入胜; 数学的方法是精巧的, 丰富多彩; 但学好数学却必须付出艰辛的劳动. 在教学过程中, 我们经常遇到这样的学生: 他们能背出一些基本的公式, 却做不了略有变化的演算; 他们能牢记一些基本的定理, 却给不出稍分层次的推理. 有些学生依然留恋早年接受的、为应试而被不恰当地夸大了的"题型教学", 不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了. 这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩, 他们对数学知识只停留于形式的理解, 并未达到实质的掌握. 其实, 与大多数其他学科相比, 数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会. 在任何一门数学课程的学习过程中, 起主导作用的并非教师, 而是学生. 学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程. 学生应当按自己的认识去解释、分析所学的内容, 用新的观点去改变原有的理解, 从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印. 只有通过深入的思考, 将吸收的新知识有机地融入原有知识结构中, 用心灵的创造来体验数

学, 对抽象的对象建立起直观的理解, 才能真正地学好数学. 我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪.

虽然, 学习数学的方法因人而异, 但是, 数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的. 首先, 要学好一门数学课程, 毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想. 这就是说, 既要深入理解有关主要对象的概念和性质, 又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起, 从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升, 融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神. 其次, 数学思想是通过特定的数学方法来实现的, 每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具, 也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据. 从猜想的形成、分析的展开, 到计算、推理的实施、提炼、拓展的升华, 数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值. 再次, 每门数学课程都有不少特殊的数学技巧. 它们不仅显示了运算与论证的灵活性, 而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素. 一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想象和敏锐的观察. 数学技巧的介绍与训练, 对学生思维的引发、开拓和深化具有十分重要的意义. 总之, 数学思想、数学方法和数学技巧三位一体, 共同构成了有血有肉的一门门数学课程. 因此, 要学好数学, 也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下工夫.

正是基于上述认识, 在这套丛书中, 每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论, 同时, 还配置了一定数量的习题. 希望读者可参照这个内容的三部曲, 通过对数学思想、方法和技巧的思考与消化, 把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶.

编写这套丛书的作者们都具有丰富的教学经验, 他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要: 无论是学生在学习相应课程时同步使用, 还是在学完一门课程后作总复习的参考, 抑或为报考研究生而作考前准备, 都将从中获得较大的收获. 我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流.

复旦大学数学科学学院将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划之中. 学院的许多教授对如何编好这套丛书提出了一系列中肯的建议, 为提高丛书质量创造了有利条件. 复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血. 我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意.

限于水平, 这套丛书的错误与缺陷在所难免, 殷切地期望广大读者不吝指正. 希望通过作者与读者的共同努力, 经日后修订, 使这套丛书日趋成熟.

复旦大学数学科学学院
教学指导委员会

第三版前言

本书的第二版自 2007 年出版以来, 得到了广大读者的关心与肯定. 在 8 年来的教学实践过程中, 我们陆续收到了兄弟院校的同行专家以及学生们的各种意见和建议. 另外, 普通高等教育“十二五”国家级规划教材《高等代数学 (第三版)》 (复旦大学出版社) 已于 2014 年 10 月正式出版, 因此作为该教材配套的学习方法指导书, 本书第三版的修订工作也提上了议事日程.

本书的第三版保持了第二版原有的框架和体系, 但在以下几个方面做了进一步的修改和完善. 首先, 更正了第二版中出现的错误和不当之处, 并对原有的主题分类进行了适当的调整, 使得层次更加分明. 其次, 每一章节都增加了大量的例题, 使得总例题数达到了 700 余道, 篇幅较第二版增加了近三分之二, 全书内容更加丰富. 最后, 在第二版的基础上还增加了一般数域上基于初等因子的相似标准型理论、线性映射和矩阵的广义逆等教材中没有涉及的内容.

不同于一般的高等代数习题集或考研辅导类的学习指导书, 本书具有以下几个特点:

第一, 本书编写的章节顺序与《高等代数学 (第三版)》教材完全相同, 这使初学者能同步地学习教材和指导书, 循序渐进地掌握高等代数中的各类知识点和解题方法.

第二, 在主题的划分和例题的选取上主要按照方法和技巧进行分类, 而不是将例题按照章节内容简单地罗列在一起, 突出强调方法和技巧在高等代数学习过程中发挥的作用.

第三, 在每一章节的开始部分或在某些例题解答之后的备注中, 都会对相同类型问题的解题方法和技巧做一归纳和总结, 这使读者通过典型例题的学习之后能够举一反三、触类旁通, 避免陷于题海战术之中.

第四, 对书中 100 余道典型例题给出了多种证法或解法, 这些不同的方法往往穿插在各章节之中, 并随着课程的深入不断地被挖掘出来. 这不仅反映了高等代数各类知识点之间的有机联系, 也将极大地激发读者的发散性思维, 提高读者的解题能力.

第五, 每一章的结构都是先阐述基本概念和定理, 然后精心讲解典型例题, 最后还安排了一定数量的基础训练题 (全书共 450 余道), 包括单选题、填空题和解答

题 3 种类型. 这一顺序符合学习的规律, 也是复旦大学数学科学学院高等代数习题课通常的授课方式, 得到了历届学生的肯定, 取得了良好的教学效果.

第六, 本书的第三版融入了编者多年来在复旦大学数学科学学院教授高等代数课程所积累的教学体会以及最新的教学成果 (参考 [8]). 书中所选例题层次丰富、难度不一, 大部分来自复旦大学数学科学学院高等代数期中、期末考试试题 (包括一些原创性的命题), 还有一些例题选自兄弟院校的研究生入学考试试题以及全国大学生数学竞赛试题等.

第七, 本书通过讲解例题, 给出了许多重要知识点相关性质的完整总结, 比如伴随矩阵的性质等. 另外, 许多重要解题方法的应用虽然分散在各章节中, 但只要读者通篇阅读之后仍然可将它们连线串珠、合为一体, 比如摄动法的应用等. 因此, 本书同样适合参加研究生入学考试或参加全国大学生数学竞赛的读者备考之用.

在编者看来, 学好高等代数的方法应该是 "深刻理解几何意义; 熟练掌握代数方法; 强调代数与几何之间的相互转换和有机统一", 而这也正是本书编写的指导思想. 希望读者能通过参考本书达到学习和掌握高等代数的目的.

本书的编写得到了国家自然科学基金 (编号: 11422101) 和复旦大学数学科学学院的资助, 得到了复旦大学出版社范仁梅女士的大力帮助, 在此一并表示衷心的感谢! 真诚地欢迎广大读者以及同行专家提出进一步的批评意见和建议.

姚慕生　谢启鸿
2015 年 7 月于复旦大学

目　　录

第 1 章

行 列 式

§ 1.1 基本概念

1.1.1 行列式的定义

1. 行列式的概念

n^2 个数 (或称元素) 依次排成 n 行、n 列, 并用两条竖线围起:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式.

2. 余子式

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个 n 阶行列式, 划去 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 i 行及第 j 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式, 这个行列式称为 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的余子式, 记为 M_{ij}.

3. 行列式值的归纳法定义

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是如 (1.1) 式所示的行列式, 若 $n=1$, 即 $|\boldsymbol{A}|$ 只含一个元素 a_{11}, 则定义 $|\boldsymbol{A}|$ 的值就等于 a_{11}. 假定对 $n-1$ 阶行列式的值已定义好, 那么对任意的 i,j, $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 的值已经定义好, 定义 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.2}$$

4. 代数余子式

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是如 (1.1) 式所示的 n 阶行列式, M_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的余子式, 定义 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.3}$$

5. 定理

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是如 (1.1) 式所示的 n 阶行列式, 则对任一 $j\,(1\leq j\leq n)$,

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}, \tag{1.4}$$

或用代数余子式表示为

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \tag{1.5}$$

(1.4) 式、(1.5) 式两式称为行列式按第 j 列展开. 由对称性, 行列式也可以按行展开:

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}, \tag{1.6}$$

或用代数余子式表示为

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}. \tag{1.7}$$

6. 行列式值的组合定义

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, 它的第 (i,j) 元素是 a_{ij}, 定义 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为

$$\sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,\cdots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n},$$

其中 $N(k_1,\cdots,k_n)$ 表示排列 $(k_1,\cdots,k_n)$ 的逆序数.

1.1.2 行列式的性质及行列式的计算

1. 行列式的性质

性质 1 上 (下) 三角行列式的值等于其主对角线上元素之积.

性质 2 若行列式的某一行 (或某一列) 全为零, 则行列式的值等于零.

性质 3 用某个常数 c 乘以行列式的某一行 (或某一列), 所得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

性质 4 行列式的两行 (或两列) 对换, 行列式的值改变符号.

性质 5 若行列式的某两行 (或某两列) 成比例, 则行列式的值等于零.

性质 6 若行列式的某一行 (或某一列) 元素 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$, 则该行列式可分解为两个行列式之和, 其中一个行列式的相应行 (或列) 的元素为 b_{ij}, 另一个行列式的相应行 (或列) 的元素为 c_{ij}, 用式子来表示就是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(对列也有类似等式成立).

性质 7 将行列式的某一行 (或某一列) 乘以常数 c 以后加到另一行 (或另一列) 上去, 行列式的值不变.

性质 8 行列式转置后的值不变, 即 $|\boldsymbol{A}'|=|\boldsymbol{A}|$.

2. 行列式的计算

如果用定义来计算行列式, 除了极少量的行列式可以比较容易算出外, 大多数行列式的计算十分烦琐. 行列式的计算主要运用它的性质来进行.

1.1.3 Cramer 法则

Cramer 法则适用于计算含有 n 个未知数、n 个方程式的线性方程组.

1. 线性方程组

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知数. $a_{ij}\,(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n)$ 是常数, 称为各未知数的系数. $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 也是常数, 称为常数项. (1.8) 式称为 n 个未知数、n 个方程式

的线性方程组的标准式.

2. Cramer 法则

现设有如 (1.8) 式的线性方程组, (1.8) 式中诸未知数的系数按式中的顺序排列组成一个 n 阶行列式, 记为 $|\boldsymbol{A}|$:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|$ 称为线性方程组 (1.8) 的系数行列式.

将常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次置换 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一列元素, 便得到行列式 $|\boldsymbol{A}_1|$:

$$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再将 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次置换 $|\boldsymbol{A}|$ 的第二列元素, 得到行列式 $|\boldsymbol{A}_2|$:

$$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

不断这样做下去, 即用 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次置换 $|\boldsymbol{A}|$ 的第三列, 第四列, $\cdots$, 第 n 列, 便得到 $|\boldsymbol{A}_3|, |\boldsymbol{A}_4|, \cdots, |\boldsymbol{A}_n|$.

3. 定理 (Cramer 法则)

设有 n 个未知数、n 个方程式的线性方程组如 (1.8) 式所示, 若它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值不等于零, 则该方程组有且只有一组解:

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\ x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ \cdots,\ x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}.$$

1.1.4 行列式的其他性质

1. Vander Monde 行列式

Vander Monde 行列式的值为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n}^{n} (x_j - x_i).$$

2. 分块上 (下) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

3. Laplace 定理

设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, 在 $|\boldsymbol{A}|$ 中任取 k 行 (列), 那么含于这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $|\boldsymbol{A}|$, 即若取定 k 个行: $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

同样, 若取定 k 个列: $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

§ 1.2　例题解析

1.2.1　用性质可化为三角行列式或降阶的行列式

某些行列式利用性质 7 消去某一行 (或某一列) 的大部分元素后可以直接化为上 (下) 三角行列式或可以直接降阶. 这类行列式的计算通常比较容易, 下面是几个典型的例子.

例 1.1　计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}.$$

解　将第一行依次加到其他行上便得到一个上三角行列式且主对角线上元素依次为 $1,2,\cdots,n$. 因此 $|\boldsymbol{A}|=n!$. □

下面是所谓的爪型行列式, 它也可以化为三角行列式来计算.

例 1.2　求下列 $n+1$ 阶行列式的值 $(a_i\neq 0,\ 1\leq i\leq n)$:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

解　第 $i\,(i=2,\cdots,n+1)$ 列乘以 $-a_{i-1}^{-1}$ 加到第一列上, 得:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-1} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=(a_1a_2\cdots a_n)\Big(a_0-\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\Big).\ \square$$

例 1.3 计算 n 阶行列式 $(a_i \neq 0)$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

解 第一行乘以 -1 依次加到其余各行上去, 得:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{a_1} - 1 & \dfrac{x_2}{a_2} & \dfrac{x_3}{a_3} & \cdots & \dfrac{x_n}{a_n} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

将后面的列都加到第一列上, 得:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{a_i} - 1 & \dfrac{x_2}{a_2} & \dfrac{x_3}{a_3} & \cdots & \dfrac{x_n}{a_n} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1 \right). \ \square \end{aligned}$$

例 1.4 计算行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \cdots & \mathrm{C}_n^1 \\ 1 & \mathrm{C}_3^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mathrm{C}_n^{n-1} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解 从最后一行起将 $|\boldsymbol{A}|$ 的每一行减去前面一行便可将行列式降一阶, 降阶后每一列减去前面一列. 再对降了一阶的行列式作同样处理, 不断作下去可得到 $|\boldsymbol{A}| = 1$. $\square$