



普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数 及其应用习题集

主编 王艳



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数及其应用习题集

主 编 王 艳

副主编 程 茜

参 编 李维佳 杨 卫

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数及其应用: 含习题集/王艳主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2014. 8
ISBN 978 - 7 - 5640 - 9536 - 9

I. ①线… II. ①王… III. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 179035 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

82562903 (教材售后服务热线)

68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 7

字 数 / 153 千字

版 次 / 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

总 定 价 / 22.00 元

责任编辑 / 张慧峰

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 王美丽

第一章 行列式和矩阵	1
1.1 行列式的概念	1
1.2 行列式的计算及应用	2
1.3 矩阵的概念及运算	4
1.4 矩阵的秩	6
1.5 矩阵的逆	7
1.6 行列式及矩阵的上机实现	9
本章总结	10
第二章 n 维向量与线性方程组	12
2.1 n 维向量的概念与向量组的线性组合	12
2.2 向量组的线性相关性	13
2.3 齐次线性方程组	15
2.4 非齐次线性方程组	16
2.5 线性方程组的上机实现	18
2.6 线性方程组的应用	18
本章总结	20
第三章 特征值与特征向量	22
3.1 特征值与特征向量	22
3.2 相似矩阵与矩阵的对角化	23
3.3 实对称矩阵的相似对角形	24
3.4 矩阵的特征值与特征向量的上机实现	24
3.5 特征值与特征向量的应用	25
本章总结	26

第一章 行列式和矩阵

1.1 行列式的概念

一、本节回顾

1. 二阶、三阶行列式的定义及计算公式.

2. n 阶行列式的定义.

3. 几种特殊形式行列式的计算方法.

二、随堂练习

1. 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. 求解方程组
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

三、本节作业

1. 利用对角线法则计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}.$$

$$2. \text{ 求解方程 } f(t) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-t \\ 2 & 3-t & 1 \\ 1-t & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ 的全部实根.}$$

1.2 行列式的计算及应用

一、本节回顾

1. 行列式的性质.

2. 余子式、代数余子式.

3. 行列式按行(列)展开定理.

4. 克拉默法则.

5. 用克拉默法则求解方程组的方法.

二、随堂练习

1. 利用行列式的性质计算
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. 利用行列式的性质计算
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

三、本节作业

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, 求 M_{22}, A_{32} .

2. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

3. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

有非零解,求 λ 的值.

四、考研提升

计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

的值.

1.3 矩阵的概念及运算

一、本节回顾

1. 矩阵的概念.
2. 矩阵的加法、减法、数乘运算.
3. 矩阵的乘法.
4. 矩阵的转置与方阵的行列式.

二、随堂练习

1. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, 求 BA, AB^T .

3. 设矩阵 A 为一个三阶方阵, 且 $|A| = 3$, 求 $|4A|$.

三、本节作业

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $AB^T - 4A$.

2. 设 A 为一个三阶方阵且 $|A| = 5$, 求 $|(5A^*)^{-1}|$.

3. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

四、考研提升

设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

1.4 矩阵的秩

一、本节回顾

1. 矩阵的初等行变换.
2. 如何化为行最简形矩阵及行阶梯矩阵.
3. 矩阵秩的定义.

二、随堂练习

1. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

2. 求

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩并求 A 的一个最高阶非零子式.

三、本节作业

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{pmatrix}$, 已知 $r(A) = 2$, 求 λ, μ 的值.

2. 用初等变换求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

四、考研提升

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

1.5 矩阵的逆

一、本节回顾

1. 矩阵逆的概念.

2. 矩阵逆的性质.

3. 伴随矩阵.

4. 矩阵逆的判定方法及求法.

二、随堂练习

1. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 的伴随矩阵 A^* .

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

三、本节作业

1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 求解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

四、考研提升

1. 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 求 A^n .

2. 设 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

1.6 行列式及矩阵的上机实现

一、本节回顾

1. 矩阵及元素复制的 MATLAB 方法.
2. 利用 MATLAB 进行矩阵的各种运算.

二、随堂练习

写出计算 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A+B$, $A-B$ 的代码.

三、本节作业

写出计算 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $AB-AC$ 的 MATLAB 代码.

本章总结

一、本章我都学了什么？

二、我掌握的情况.

1. 计算下列行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.3. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$ 的秩.4. 设行矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, 且 $A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB^T .

第二章 n 维向量与线性方程组

2.1 n 维向量的概念与向量组的线性组合

一、本节回顾

1. n 维向量的定义.
2. 向量由向量组线性表示的定义.
3. 向量由向量组线性表示的判定定理.
4. 线性运算.

二、随堂练习

1. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 $2\alpha + \beta + 3\gamma$.

2. 设 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 写出表

达式.

三、本节作业

1. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, 求 $\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$.

2. 已知向量组

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 问向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 可否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 若可以, 请写出

表达式.

3. 试从向量方程中求出向量 χ :

$$3\chi - 2\alpha = -2\chi + 3\beta$$

其中 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

四、考研提升

已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (0, 1, 1)$, 则向量 $\mu = (2, 0, 0)$ 在上述基底下的坐标是_____.

2.2 向量组的线性相关性

一、知识回顾

1. 向量组线性相关的定义.