



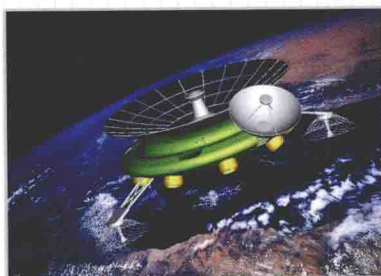
航天器轨道力学理论与工程应用
“十二五”国家重点图书出版规划项目



深空探测轨道理论与应用



刘 林 侯锡云◎著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>



航天器轨道力学理论与工程应用

“十二五”国家重点图书出版规划项目

深空探测轨道理论与应用

刘 林 侯锡云 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是深空探测轨道力学领域的基础论著,书中内容是作者 30 多年来在该领域的教学和多项研究工作成果的总结;主要针对深空探测器(太阳系的人造小天体)的质心运动,阐述轨道力学的基本理论及其在航天领域各相关工程中的应用。

全书共分 10 章,包括深空探测轨道力学的基本问题:限制性三体问题,特别是圆型限制性三体问题的动力学特征及其在各特定航天任务中的应用;深空探测(特别是月球、火星和小行星探测)器的发射轨道,转移轨道及其控制等关键问题。

本书理论体系完整,并注意到与实际应用的紧密联系,既具基础性又具实用性。可作为天文与航天领域,以及相关应用系统有关科技人员的参考书,从中获得解决天文探测与航天工程问题的理论依据和实用方法;也可作为天文、应用数学、一般力学和航天动力学等领域研究生学习轨道力学的基础教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

深空探测轨道理论与应用 / 刘林, 侯锡云著. —北京: 电子工业出版社, 2015.10
(航天器轨道力学理论与工程应用)
ISBN 978-7-121-27329-2

I. ①深… II. ①刘… ②侯… III. ①航天器轨道—研究 IV. ①V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 230216 号

责任编辑: 许存权 徐 静

特约编辑: 刘丽丽 刘海霞

印 刷: 三河市双峰印刷装订有限公司

装 订: 三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 720×1 000 1/16 印张: 21 字数: 470 千字

版 次: 2015 年 10 月第 1 版

印 次: 2015 年 10 月第 1 次印刷

定 价: 128.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

总 序

本套著作丛书将系统地总结天文与航天领域关于航天器轨道力学的理论、关键技术创新和工程应用等方面的研究成果，并以此作为凝聚人才、打造尖端科研人才和开展航天科技自主创新研究的重要知识平台。

全套著作包含航天工程事业发展中需要的轨道力学所涉及的各个方面，包括精确的天文参考系，各类航天器的轨道运行理论、计算方法，工程应用中的轨道设计、测量、跟踪与控制，以及科学应用等。核心部分是轨道力学理论与计算方法，其理论体系完备，方法实用，与工程实践联系紧密，著作中的主要理论与方法在我国多项航天任务中已得到了成功的应用。撰写组成员包括从事与航天工程有密切联系的教学和理论研究专家、多年来活跃在航天工程第一线的技术专家，既保证了这套著作的严密理论体系，又能满足我国航天事业发展的实际需求，为我国当前和未来的重大航天工程实施提供理论和技术支撑。

本套著作除总结了作者自 20 世纪 50 年代末以来多年的研究成果外，还涵盖了作者在南开大学、上海天文台、相关高校和航天工程等单位讲课所撰写的 10 多本教材的相关内容，全套著作共有以下四个分册：

- (1) 参考坐标系及航天应用。
- (2) 卫星轨道理论与应用。
- (3) 深空探测轨道理论与应用。
- (4) 航天器定轨理论与应用。

这是一套体系严密，同时具有基础性和实用性，符合我国航天工程实践的专著。

考虑到四个分册编写内容之间的联系和差别，以及便于读者阅读，在四个分册中对某些问题进行了必要的重复阐述，同一内容也会有不同的表述等，但仍保持了全套丛书体系的完整性。

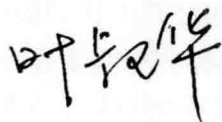
刘 林
2014 年 12 月

序言一

刘林教授从事太阳系动力学与航天器轨道力学的教学与研究近 60 年，已出版卫星轨道力学方面的专著与教材 10 本，论文 260 多篇，并主持完成相关研究课题 40 多项，很多研究成果已成功地应用于航天任务。

在我国航天器轨道与天体力学有关部门的专家中，许多人都受到过刘林教授的指导。目前，刘林教授仍然坚持在人才培养和航天器轨道理论与应用研究工作的第一线，不断取得研究成果。近年来又带领他的入室弟子——也是活跃在我国天文与航天领域的专家和青年骨干，完成了这套“航天器轨道力学理论与工程应用”著作，对各类航天器的运行轨道，从基本理论、各种外力作用下的解算方法，到重要结果蕴涵的动力学特征，都有详尽的论述，对航天器轨道设计，轨道测控和实际应用都有指导意义。该套著作理论清晰、方法具体、内容充实，是关于各类航天任务中有关轨道技术的重要指导和技术参考书，也是天文学，特别是天体测量、天体力学与航天动力学紧密结合的范本。

本套著作共分四个分册，首先阐明航天中所用的参考坐标系和有关常数，然后详细论述各种卫星的轨道理论与应用，再详细论述深空探测的轨道理论与应用；最后，论述航天器如何定轨。著作逻辑分明，结构清晰，可供从事航天轨道设计与应用的科技人员参考。



2015 年 2 月 14 日

序言二

进入 21 世纪以来,我国航天事业迎来了一个快速发展时期,载人航天工程和月球探测工程取得了重大突破,二代导航系统、高分辨率对地观测系统等工程正稳步推进。随着我国经济和科技实力的不断增强,进行深空探测,开展对火星、小行星,以及其他太阳系内天体的探测又将是我国今后航天活动的一个重要方向。

航天器轨道动力学是航天科技的一项关键理论基础,是航天事业的重要技术支撑。航天器轨道动力学内容涉及天体力学、天体测量学、大地测量及动力系统、估计理论等领域,是各类航天器轨道理论分析、预报和定轨计算的基础,同时也为航天器轨道维持与控制、各类轨道和星座设计及航天测控系统等多个领域的应用提供重要的理论支持。

本套著作系统地总结了近年来关于航天器轨道力学的理论研究、关键技术创新和工程应用等方面的研究成果,既包含了航天器轨道动力学的各种基础知识和重要理论,也体现了轨道动力学在目前一线航天任务中的重要应用。理论体系完备,与工程实践联系紧密,可为应用卫星、载人航天、深空探测等当前和未来重大航天工程提供技术支撑。

著作撰写组成员中有从事与航天工程有密切联系的教学和理论研究专家,有多年活跃在航天工程第一线技术专家,著作中包含了专家多年来从事相关理论研究的经验和工程经验。著作的出版,既有利于航天器轨道动力学的应用,又能够进一步促进学术领域的研究发展。

沈应骏

2015 年 1 月 11 日

前 言

随着航天技术的发展和各种需求,从20世纪50年代世界上第一颗人造地球卫星上天以来,各种航天器相继升空,为了实现人们对太阳系及宇宙空间的深入了解,深空探测领域的各种航天活动也随之展开。继20世纪60年代末美国实现载人登月后,航天研究又逐渐向深空发展,参与深空探测的国家和地区也越来越多,如美国、俄罗斯、欧空局、日本等。我国在深空探测领域起步比西方国家晚了近50年,但随着2007年“嫦娥”探月一期工程的圆满完成,深空探测计划也在稳步推进。

为了适应我国深空探测事业发展的需求,相应的深空探测器轨道力学的研究工作也应加快步伐,尽快地追踪国际上的研究水平,为此,我们将30年来在该领域的研究成果进行整理,并融入了作者在教学工作中的经验与总结撰写成本专著。

尽管国内外航天界对“深空”的含义有不同的见解,但就太阳系中探测器在运行过程中的受力状况而言,不外乎有两类力学模型:一是只有一个主要力源的受摄二体问题;二是有两个主要力源的限制性三体问题。通常所说的卫星(如大行星的自然物象,人造地球卫星、月球卫星、火星卫星等)运动,就属于前一类,而其他探测器的运动(如月球探测器、火星探测器,小行星探测器等转移轨道段的运行轨道)则属于后一类。在此前提下,不妨也将有争议的月球探测列入深空探测范畴,这并不涉及对“深空”如何准确定义的问题。关于第一类以受摄二体问题为主线展开论述的卫星运动问题,已作为全套专著的第二本出版,即“卫星轨道理论与应用”。本书是作为全套专著的第三本,以限制性三体问题的研究成果及其在航天领域的应用展开论述,书名为“深空探测轨道理论与应用”。

本书具体内容的安排分为如下四个部分。

第1章至第5章系统阐明深空探测器在各运行阶段所涉及的轨道力学基础,包括处理探测器运行的数学模型和已获得的基本结论,为进一步深入研究深空探测器运行轨道的特征奠定理论基础。

第6章和第7章介绍深空探测中的一个热点问题——平动点的动力学特征及其

附近周期和拟周期轨道的存在性和构造方法,与共线平动点有关的不变流形和“节能通道”的动力学机制,以及平动点所具备的动力学特征在深空探测中的应用前景。

第8章和第9章是论述我国正在和将要开展的月球、火星等探测中的轨道力学问题。

第10章是小行星探测的轨道问题。

书中公式和符号较多,同一符号在不同公式中可能有不同含义,但为了需要,同一量在不同公式中可能又用不同的符号表示。然而,对于最常用的量,将尽量保持用同一符号表示,特别注意与本书涉及的全套专著的另一本书的统一表达形式,而且尽可能采用国际学术界在本学科领域中习惯采用的符号,便于读者查阅有关原始文献。

本书是根据南京大学天文系30多年来开设的研究生专业课程的自编教材(南京大学研究生重点建设教材《轨道力学》),2012年出版的“深空探测器轨道力学”和多项研究工作的积累而写成。作为本书的另一位作者——我的学生侯锡云博士,近年来在这一领域(特别是限制性三体问题的平动点动力学方面)做出了很出色的工作,包括他的优秀博士论文(平动点的动力学特征及其应用,获教育部、国务院学位委员会批准的“2011年全国优秀博士学位论文”奖),深得国内外同行的重视,并参与了第6至第10章的撰写。

这里还要特别感谢上海天文台的叶叔华院士,是她于21世纪初和2004年先后引荐我们参与了国家有关深空探测工程的先期论证工作,促进了本研究团队在深空探测轨道力学领域研究工作的深入,为本专著的撰写起了极其重要的推动作用。

刘 林

目 录

第 1 章 深空探测器运动的力学环境与数学模型	1
1.1 太阳系小天体运动对应的限制性问题	1
1.2 限制性问题的分类及其相应的力学模型	2
1.3 深空探测器运动的基本数学模型	4
参考文献	10
第 2 章 参考系与太阳系主要天体历表	11
2.1 时间系统 ^[1-3]	12
2.2 空间坐标系	16
2.3 各大天体坐标系之间的联系	22
2.4 太阳系主要天体的历表	23
参考文献	28
第 3 章 限制性三体问题的基本方程与 Jacobi 积分	29
3.1 坐标系的选择与小天体的运动方程	29
3.2 圆型限制性三体问题的 Jacobi 积分与解的存在性	36
3.3 椭圆型限制性三体问题	40
3.4 圆型限制性 (2+2) 体问题	47
3.5 受摄圆型限制性三体问题的运动方程	48
参考文献	53
第 4 章 圆型限制性三体问题的平动解与周期解	55
4.1 圆型限制性三体问题的平动解	55
4.2 Jacobi 常数及其 5 个临界值	58
4.3 零速度面与运动可能区域	59

4.4 椭圆型限制性三体问题的特解	65
4.5 圆型限制性 (2+2) 体问题的平动解	66
4.6 圆型限制性三体问题的周期解	68
参考文献	73
第 5 章 圆型限制性三体问题平动解的稳定性概况	74
5.1 各种稳定性的提法	74
5.2 平动解的稳定性概况	81
5.3 共线平动点附近的运动稳定性问题	85
5.4 三角平动点附近的运动稳定性问题	89
5.5 航天器的编队飞行问题	100
参考文献	105
第 6 章 共线平动点的动力学特征及其应用	106
6.1 共线平动点附近的周期和拟周期运动	106
6.2 共线平动点附近运动的不变流形	120
6.3 实际力模型下的拟周期运动	127
6.4 共线平动点特征在深空探测中的应用	134
参考文献	148
第 7 章 三角平动点的动力学特征及其应用	150
7.1 三角平动点稳定性的研究状况	150
7.2 三角平动点附近的周期轨道族	160
7.3 实际力模型下的拟周期轨道	169
7.4 三角平动点特征在深空探测中的应用	175
参考文献	192
第 8 章 月球探测的轨道问题	195
8.1 发射月球探测器的基本依据与自由返回轨道	195
8.2 地一月转移轨道及其轨道的几何特征	206
8.3 月一地转移轨道及其轨道的几何特征	219
8.4 发射月球探测器各类转移轨道的比较	230
参考文献	240

第 9 章 深空探测的轨道问题	242
9.1 朗伯方程	242
9.2 发射火星探测器的转移轨道	250
9.3 火星探测器发射的借力加速机制	264
9.4 其他大行星探测的轨道问题	271
9.5 深空探测中其他有关的轨道问题	275
参考文献	285
第 10 章 小行星探测的轨道问题	287
10.1 小行星简介	287
10.2 小行星的引力场模型	293
10.3 小行星探测的伴飞形式	309
10.4 小行星探测的环绕型轨道	313
参考文献	316
附录	319
附录 A 天文常数	319
附录 B IAU2000 天体定向模型	321
参考文献	324

第1章 深空探测器运动的力学环境与数学模型

1.1 太阳系小天体运动对应的限制性问题

太阳系是一个十分复杂的动力系统，除作为这一力学系统主天体存在的太阳外，还有8个大行星和数量众多的小行星，以及自然卫星、彗星和空间尘埃等。研究这一系统的起源和各类大小天体的轨道特征与动力演化，一直是推动天体力学发展的动力。早期有关行星运动的开普勒（Kepler）三大定律，牛顿（Newton）的万有引力定律，就是在长期对大行星运动进行观测的积累上奠定了太阳系动力学的基础。普遍存在于太阳系的共振现象等，又不断地推动太阳系动力学的发展。而航天时代的到来，出现了大量的人造天体，特别是各类深空探测器的升空，尽管这些人造天体实质上就是一种小天体，但它们所涉及的运动问题，包括所处的力学环境和人们对其所关注的焦点，又不同于自然天体，这就再次扩展了太阳系动力学的研究背景和内容，并使其与航天动力学的发展很自然地形成了紧密的联系。

太阳系中存在大量的质量相对较小的小天体，包括小行星、大部分自然卫星、彗星及各类人造航天器等。那么，就动力学角度而言，什么样的天体称为小天体呢？在太阳系动力学中，当其质量小到由于它的存在，并不改变它所在的力学系统中其他天体的运动状态，这样的天体称为小天体。显然，各类航天器就属于这种小天体的范畴，因为直到目前为止，从地面上送入空间的任何一种航天器，其质量相对而言确实很小，太阳系中各个天体并不会因出现这样一个航天器而发生运动状态的变化，包括地球本身。

在研究这种小天体的运动时，如果将相应力学系统中的小天体和所有影响它的引力源和非引力源都处理成“质点”（暂且不考虑非质点引力或非引力的一些具体细节，这不会影响对问题的阐述），即形成一个 N 体系统，数学上就构成一个 N 体问题。这里所要论述的问题是，一个质量可忽略的小天体在另外 $(N-1)$ 个运动状

态确定的“天体引力”（确切地说是相应的力源）作用下的运动，这一动力学问题就称为限制性 N 体问题，它与一般 N 体问题的提法和研究内容有重大区别。当 $N=3$ 时，即 $(n=2)$ 个大天体和1个小天体，这就是天体力学（或轨道力学）中最著名的“限制性三体问题”。限制性问题与非限制性问题的名称差别，由于待研究的运动小天体的质量小到可以忽略，这将导致在数学处理方法上与相应的运动特征都会出现重大差别。例如，一般三体问题，除存在10个经典积分外，别无其他动力学信息，而限制性三体问题则不然，除该系统中两个大天体的运动状态能完全确定外，又可给出另一个小天体特有的运动特征，这对研究自然小天体（如小行星）的运动，或是人造小天体（各类航天器）的运动而言，都是极其重要的动力学信息，更与深空探测器的发射和形成某种特殊的目标轨道（探测任务的特定需求）有密切关系。因此，深空探测器轨道力学与限制性问题的动力学模型是分不开的。本著作在论述深空探测器轨道力学的具体问题中，往往是与限制性问题的基本结论相联系的。

上述模型是对 N 个质点引力系统而言的，这是经典提法。事实上在一定状态下，研究小天体的运动还要考虑外力源中各大天体的不“规则”形状和不均匀的质量分布引起的非球形引力效应，大天体的非引力效应（辐射作用等）及后牛顿效应（对牛顿力学的修正）等影响，但这些并不改变上述限制性问题的基本前提，即由于小天体的存在，不改变各大天体的运动及所涉及的各种物理状态。故限制性问题的提法不必再拘泥于经典的 N 体质点引力系统，只要将那些非质点引力因素看成相应的各种力源，而又能将它们对应地作用在运动小天体上的力用数学形式表达出来即可。

1.2 限制性问题的分类及其相应的力学模型

1.2.1 圆型和椭圆型限制性三体问题^[1,2]

这是一个 $N=(2+1)$ 体系统，该三体系统中有两个大天体和一个小天体。由于小天体对两个大天体的运动没有影响，因此，两个大天体的运动即对应一个简单的二体问题，其相对运动（或相对该两个大天体质心的运动）的解是一圆锥曲线。既然讨论的背景是一个三体系统问题，当然要排除抛物线和双曲线的情况，即只有圆运动和椭圆运动。那么，这一三体系统的动力学问题，即分别对应圆型和椭圆型限制性三体问题。对这样一类限制性三体问题，就是在两个大天体运动完全确定的情

况下,研究小天体的运动。

对于日—地—月三体系统,相应的三个天体质量分别记作 m_1 、 m_2 和 m ,由于月球质量 (m) 相对日、地质量 (m_1, m_2) 均较小,大约有 $m = 0.012m_2$,又地球绕日运动的椭圆轨道偏心率 e 约为 0.017,可以处理成圆轨道,故作为一种近似,可将该系统中月球的运动简化为圆型限制性三体问题。当然,如果处理成椭圆型限制性三体问题就更接近真实情况。又如主带小行星(主带即处于火星与木星轨道之间的小行星带,这是太阳系小行星最集中的空间)的运动,主要受太阳和木星的引力作用,木星的轨道偏心率也较小,因而也常把主带小行星的运动处理成圆型限制性三体问题。

深空探测器的发射,如月球探测器,发射的初始阶段可能有两种形式:一是在近地停泊轨道上运行,择机(根据需要)变轨加速奔向月球,这一停泊轨道段就相当于一个地球卫星;另一形式即从地球上发射升空后直接飞往月球,到达月球附近经推力制动后变为绕月飞行的月球卫星,其运动规律类似于地球卫星。而在地月间的转移轨道飞行段则对应一个地—月—探测器三体系统的典型的圆型或椭圆型限制性三体问题。在太阳系中也不乏类似的实例,除此之外,在密近双星系统中,两子星和它们之间交换的物质(当做小天体)也属这种类型。

对于上述模型,即使最简单的圆型限制性三体问题,就求解而言,至今还没有像二体问题那样完全解决,但这种数学模型却能给出一些重要结果,对研究深空探测器的运动有着其他模型不可替代的作用。

1.2.2 限制性 N 体问题和受摄限制性三体问题模型

这里 $N \geq 3$,即该系统中有 n 个大天体 ($n \geq 2$) 和一个小天体,例如,上面提到的主带小行星的运动,为了更真实地体现这类小行星的运动及其空间分布特征(Kirkwood 空隙),在考虑主要受力因素(太阳和木星的引力作用)外,进一步考虑土星和火星的引力作用,就构成一个限制性五体 ($N = 4 + 1$) 问题。月球探测器除受地、月的引力作用外,还有太阳引力的显著影响,它就对应一个限制性四体 ($N = 3 + 1$) 问题。在上述系统中,不管大天体有多少 (N 的数值不同),无论是主带小行星的运动,还是月球探测器的运动,都是在相应大天体的运动确定情况下来研究小天体的运动。但是,在上述提到的两个动力学实例中,如果第三、第四个大天体的引力作用,不足以明显地改变原限制性三体问题模型的结果,那么可以将其作为原限制性三体问题模型的一些小扰动,这就相当于引进一个受摄限制性三体问

题模型。事实上,对于上述两个实例,在研究过程中(不管是主带小行星的运动,还是月球探测器的运动)往往就是这样处理的,在目前对深空探测器的发射和某些特殊目标轨道(如晕轨道)的选择,同样是这样处理的,也就是充分利用限制性三体问题模型所提供的重要信息。

1.2.3 限制性 $(n+k)$ 体问题^[3,4]

这是一个 $N=(n+k)$ 体系统,其中包含 n 个大天体和 k 个小天体,但特指 $n \geq 2$ 和 $k \geq 2$ 的系统。这一系统实际上等价于两个问题,即一个一般 n 体问题和一个在 n 个大天体(运动状态已知)的引力作用下的 k 个小天体的运动问题。尽管 k 个小天体的质量相对大于天体而言很小,它们不会影响大天体的运动,但在某些系统中, k 个小天体之间的距离却很近,相互之间的引力作用需要考虑,否则就变为 k 个限制性 $(n+1)$ 体问题。

关于限制性 $(n+k)$ 体问题,在太阳系中也有相应的力学背景。例如,主带小行星群中两颗小行星之间的距离可以很近,如果考虑它们之间的引力作用,那么太阳、木星和这两颗小行星就构成一个限制性 $(2+2)$ 体问题;在地球赤道上空一个定点处发射两颗以上几吨重的地球“静止”卫星,它们相互之间的距离可为百米量级,在精度要求较高的问题中就需要考虑它们之间的相互引力作用,在此情况下,作为椭球体的地球(相当于一个质量密度均匀的球体和椭球体赤道的“多余”部分,可视为两个大天体)和两个卫星同样构成一个限制性 $(2+2)$ 体问题。在深空探测器的发射中或许也会出现这样的状态,如在某个特殊位置附近定点多个探测器,相互之间的引力作用又不可忽视,在此情况下与两个相应的大天体就构成上述限制性 $(2+k)$ 体问题。

1.3 深空探测器运动的基本数学模型

1.3.1 限制性 N 体问题运动方程的一般表达形式

对于上述限制性 $(n+1)$ 体问题,一个是待研究其运动的小天体,其他 n 个大天体即 n 个外力源,不妨就看成 n 体。对于这一 $(n+1)$ 体系统,如果我们不去考虑它的物理背景,暂作为一般处理,在定义的一个惯性直角坐标系 $O-xyz$ 中来研究该小天体的运动。在这一力模型中,小天体 P 的质量记为 m (可取为零),对 n 个大

天体 $P_i (i=1,2,\dots,n)$ 仅作为质点假设,这并不影响对问题的论述,因为在讨论的问题中,所涉及的非质点引力源不会成为上述两个重要力源中的一个,只是一个小摄动源,在相应运动方程中正确地写出该摄动加速度即可。 n 体的质量记为 $m_i (i=1,2,\dots,n)$, 对它们之间的相互距离 $r_{i,j} (i,j=1,2,\dots,n, i \neq j)$ 并无任何约束性的假设。在选定的惯性直角坐标系 $O-xyz$ 中,小天体 P 在 n 个外力源作用下的运动,归结为下列常微初值问题,即

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{\Delta_i^3} \vec{\Delta}_i, & \vec{\Delta}_i = \vec{r} - \vec{r}_i \\ t_0: \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \end{cases} \quad (1.1)$$

式中, G 是万有引力常数, $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ 和 $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 分别为小天体 P 在该坐标系中的位置矢量和速度矢量, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ 是第 i 体 $P_i (i=1,2,\dots,n)$ 在该坐标系中的位置矢量, $\vec{r}_0$ 和 $\dot{\vec{r}}_0$ 即相应的小天体运动的初值条件。

无论是只有一个主要力源的受摄二体问题,还是有两个主要力源的受摄限制性三体问题,在一些具体应用中,常将坐标系建立在其中一个主要力源对应天体(以下按习惯称这一天体为中心天体)的质心上,如地球卫星或地一月系探测器的运动问题,即采用地心天球坐标系。假设以 n 个大天体 $P_i (i=1,2,\dots,n)$ 中的 P_1 作为中心天体,那么在此中心天体坐标系中,小天体 P 的运动,就归结为下列常微初值问题,即

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 - G \sum_{j=2}^n m_j \left(\frac{\vec{\Delta}_j}{\Delta_j^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), & \vec{\Delta}_j = \vec{r} - \vec{r}_j \\ t_0: \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

式中, $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ 和 $\vec{r}_j = \vec{r}_j(x_j, y_j, z_j)$ 是小天体和第 j 个体 $P_j (j=2,\dots,n)$ 在该坐标系中的位置矢量, $\vec{F}_0$ 为中心天体引力加速度, 即

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_0(\vec{r}) = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \quad (1.3)$$

关于式 (1.2), 其形式似乎就是通常受摄二体问题对应的基本方程, 其实不然, 只有当该方程右端的第二部分中各“天体” $P_j (j=2,\dots,n)$ 的作用加速度远比第一部分中心引力加速度 $\vec{F}_0$ 小时, 才是通常所说的受摄运动方程。而在上述坐标系的选择下, 式 (1.2) 就是一个普适形式, 如果将该方程右端的第一部分中心引力加速度项改为下列形式

$$\vec{F}_0 = -\frac{G(m_1 + m)}{r^3} \vec{r}$$

那么, 方程 (1.2) 实际上就是一般 $N = (n+1)$ 体问题对应的基本方程, 在人为选择的某个中心天体坐标系中, 它就表达天体 P (注意, 此时已不再是小天体) 的运动方程。如果将 P 和任何另一个天体 $P_j (j=2, \dots, n)$ 互换, 那就构成相应天体 P_j 在该坐标系中的运动方程。

上述数学表达形式在一些具体问题的处理上是不可少的, 如在地面测控系统处理月球探测器的定轨问题时, 无论探测器处在飞往月球的哪个运行段, 采用运动方程式 (1.2) 的形式都是可行的, 这在本套专著的第四本书 (“航天器定轨理论与方法”) 中将会涉及。但采用式 (1.2) 作为基本数学模型, 无助于进一步了解小天体的运动特征, 下面针对研究深空探测器轨道运动的主题, 引入相应的表达小天体运动的基本数学模型。

1.3.2 基本数学模型

事实上, 在太阳系中, 每个小天体 (包括作为人造小天体的航天器) 运动涉及的力学系统中, 对其运动有影响的力源往往远超过两个, 但就太阳系的现状 (演化至今) 而言, 主要力源至多两个。例如, 小行星的运动, 主要力源是太阳或太阳和一个有关的大行星; 地球卫星的运动, 主要力源是地球, 远地卫星 (如月球探测器在飞往月球的转移轨道段的运动), 主要力源是地球和月球; 深空探测器 (探测大行星或自然卫星) 的运动, 主要力源是太阳, 或太阳和一个大行星, 或目标行星及其一个自然卫星等。除两个主要力源外, 其他力源 (包括前面所说的非质点引力和非引力等) 均为小扰动, 即摄动源。因此, 在现实的太阳系中, 研究小天体 (包括各类航天器) 的运动, 更合理的力学模型对应的是一个在前面第 1.1 节中所提到的 “受摄限制性三体问题”。当主要力源只有一个时, 如一些小行星的绕日运动 (主要力源就是太阳引力)、人造卫星绕地球的运动 (主要力源就是地球引力) 等, 就退化为受摄限制性二体问题, 这是本套专著的第二本所论述的内容。但从数学角度来看, 限制性二体问题与一般二体问题 (两个均非小天体) 并无实质性差别, 只是在建立运动方程时, 小天体的质量可忽略而已, 并不改变运动方程的基本形式, 求解方法与结果形式不变。故无论是小天体还是一般天体的运动问题, 只要所有的外力源中只有一个主要力源时, 统称为受摄二体问题。

上述分析表明: 在太阳系的状态下, 考虑小天体的运动问题, 普遍采用的数学模型就是受摄限制性三体问题, 其基本数学模型即 “限制性三体问题”, 这也是处