小学六年级

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

中央民族学院出版社

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

小学六年级

本书编写组

中央民族学院出版社

（京）新登字 184 号

责任编辑：晓　默
封面设计：金　文

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

小学六年级

本书编写组

*

中央民族学院出版社出版
（北京西郊白石桥路 27 号）
（邮政编码：100081）
新华书店首都发行所发行
北京师范大学印刷厂

787×1092 毫米　32 开　6.8125 印张　130 千字
1993 年 7 月第 1 版　1994 年 2 月第 2 次印刷
印数：5001-11000 册

ISBN 7-81001-433-1/G·177
定价：3.70 元

目　　录

一、乘方概念及简易的乘方运算

1. 乘方的意义：

我们已经学习了乘法，在乘法的运算中，有时有几个因数相同，如：棱长4厘米的正方体，用乘法计算它的面积，就是 $4\times4\times4=64$（立方厘米）。还会遇到一些运算如：$3\times3=9$；$0.5\times0.5\times0.5\times0.5=0.0625$，为了简便可以写成$4^3$；$3^2$；$0.5^4$，这样上面的式子就可以写成：

$$4^3=64$$
$$3^2=9$$
$$0.5^4=0.0625$$

相同的因数相乘，只写一个因数，在它的右上角写上相同因数的个数，表示的运算是乘方。

例1 （1）5^3 就是 $5\times5\times5$；（表示3个5相乘）

10^6 就是 $10\times10\times10\times10\times10\times10$，（表示6个10相乘）

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{12} \text{就是} \underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{1}{3}}_{12\text{个}}$$

（2）请写出 2^5；1^6；3^4；4^3，的连乘形式。解：

$$2^5=2\times2\times2\times2\times2$$

$$1^6=1\times1\times1\times1\times1\times1$$

$$3^4=3\times3\times3\times3$$

$$4^3=4\times4\times4$$

(3) 请将下列连乘改变成乘方形式：

$$2\times2\times2\times2\times2=2^5$$

$$1\times1\times1\times1=1^4$$

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{8\text{个}}=a^8$$

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{个}}=a^n。$$

2．乘方的各部分名称及读法：

在 a^n 中，a 表示相同的因数，叫做底数，n 表示相同因数的个数，叫做指数，a^n 表示的运算读作 a 的 n 次方，把 a 的 n 次方看作是 a 的 n 次乘方的结果时，读作 a 的 n 次幂(mi)。

例如：2^5，2 是底数，右上角的 5 是指数读作 2 的 5 次方。

a^2，a 是底数，2 是指数，读作 a 的二次方或 a 的二次幂，还可以读作 a 的平方。

a^3，可以读作 a 的三次方，a 的三次幂，还可以读作 a 的立方。

一般地说，指数是几，就叫做底数的几次方或几次幂。2^1 读作 2 的一次方，指数 1 通常省略不写，2^2 读作 2 的二次方，或 2 的平方，指数 2 通常读作平方。2^3 读作 2 的三次方，或 2 的立方，指数 3 通常读作立方，2^4 读作 2 的四次方。指数是 4 或 4 以上的数时，指数是几就读几次方。

3．计算乘方的结果：

例2：计算6^3；$\left(\frac{2}{3}\right)^4$；$\frac{2^3}{5}$、$\left(2\frac{2}{3}\right)^2$

$$6^3=6\times6\times6=216$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}=\frac{16}{81}.$$

$$\frac{2^3}{5}=\frac{2\times2\times2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}.$$

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8^2}{3^2}=\frac{64}{9}=7\frac{1}{9}$$

乘方的计算方法是：先化成相同因数相乘的形式，然后再计算出结果。

计算一个分数的乘方，要分别计算分子、分母的乘方。计算带分数的乘方，要先把带分数化成假分数后再计算。计算小数的乘方要注意小数点的位置。

练习：请背1—20的数的平方。

请背1—10的数的立方。

4．以10为底数的乘方：

在记数中，为了简便或某些运算的需要，还经常遇到以10为底的乘方，这是科学上技术中常用的一种记数法。

先观察10的n次方的特点：

$10^1=10$

$10^2=10\times10=100$

$$10^3=\underbrace{10\times10\times10}_{3\text{个}10}=1\underbrace{000}_{3\text{个}0}$$

$$10^4=\underbrace{10\times10\times10\times10}_{4\text{个}10}=1\underbrace{0000}_{4\text{个}0}$$

$$\vdots$$

$$10^n=\underbrace{10\times10\times\cdots\cdots\times10}_{n\text{个}10}=1\underbrace{0000\cdots\cdots0}_{n\text{个}0}$$

10的 n 次幂就等于1后面等 n 个0的 $(n+1)$ 位数。反之，一个1后面带 n 个0的数，就可以写成10的 n 次方。记住这个规律，对以后的学习和实际应用都很重要。

例3：用10的 n 次幂表示下列各数。

10000000　　50000000000　　24000000000

1080000000

解：$10000000=10^7$

$$50000000000=5\times10000000000$$
$$=5\times10^{10}$$

$$24000000000=24\times1000000000$$
$$=24\times10^9$$
$$=2.4\times10^{10}$$

$$1080000000=108\times10000000$$
$$=108\times10^7$$
$$=1.08\times10^9$$

注：当一个多位数表示为一个数乘以10的 n 次幂时，这个数通常写成只具有一位整数位的数。

5．区别易混的概念：

例4：请根据叙述列出算式，并说明表示什么？（1）3 个$\frac{1}{5}$的和是多少？

（2） 3 个$\frac{1}{5}$的积是多少？

解：（1） 列式为$\frac{1}{5}\times3$，表示$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$的和的简便运算。

（2） $\left(\frac{1}{5}\right)^3$，表示为$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$的积。

例5：列式：

（1） 4 与 5 的三次方的积是多少？

（2） 4 与 5 的积的三次方是多少？

解：（1） $4\times5^3=4\times125=500$。

（2） $(4\times5)^3=20^3=20\times20\times20=8000$。

例6：下面两个算式是否相等？意义是否相同？

（1） 4 个 2 相乘的积

（2） 2 个 4 相乘的积。

解 （1） $2^4=2\times2\times2\times2=16$

（2） $4^2=4\times4=16$。

这两个算式尽管结果相同，但意义并不相同，其结果相等只是特例。如：5^3、3^5；2^3，3^2；其结果都是不相等的。

例7：判断下面的算式是否正确。对在（　　）里画“√”．错在（　　）里画 “×”。

① ⓐ $2^5=25$ （×） ⓑ $2^5=10$ （×）

ⓒ $2^5=32$ （✓） ⓓ $5^2=25$ （✓）

解题思路： 要判断计算结果是否正确，只要按乘方意义进行计算.2^5 表 5 个 2 相乘，即 $2\times2\times2\times2\times2=32$.所以ⓐ、ⓑ都是错的ⓒ是对的，而 $5^2=5\times5=25$，所以ⓓ也是正确的。

② ⓐ $1060000=1.06\times10^4$ （×）

ⓑ $1060000=1.06\times10^5$ （×）

ⓒ $1060000=1.06\times10^6$。 （✓）

解题思路： 要判断算式是否正确，可以将等号右边的算式计算出来。$1.06\times10^4=1.06\times10000=10600$，$1.06\times10_5=1.06\times100000=106000$，$1.06\times10^6=1.06\times1000000=1060000$所以ⓒ是正确的。

③ 因为 $2^4=16$，$4^2=16$，所以 2^4 与 4^2 意义相同。（×）

解题思路： 不应简单地看计算结果是否相同，而应分别看 2^4 与 4^2 各表示什么，2^4 表示 4 个 2 相乘，4^2 表示 2 个 4 相乘，意义不同。

④ $5^2=2^5$ （×）

⑤ $4a=a^4$（×）(因为 $4a=a+a+a+a$ $a^4=a\times a\times a\times a$，所以应判断为错)。

6．乘方运算法则：

（1）同底数幂的乘法法则：

我们根据乘方的意义讨论下面的例子：

如：$6^2\times6^3=\underbrace{(6\times6)}_{2\text{个}6\text{相乘}}\times\underbrace{(6\times6\times6)}_{3\text{个}6\text{相乘}}$

$$=\underbrace{6\times6\times6\times6\times6}_{5\text{个}6\text{相乘}}$$

$$=6^{2+3}=6^5$$

再如：$2^4\times2^3=2^{4+3}=2^7$ 即4个2相乘的积乘以3个2相乘的积，共有(4+3)个2相乘。

由此可以得出：同底数幂相乘，原来的底数做底数，指数的和做指数。

用字母表示为：$a^m\times a^n=a^{m+n}$（$m.n$ 为自然数。）

例8：计算：

① $12^5\times12^7=$　　② $8^2\times8^5\times8^3=$

③ $2\times2^2\times2^3\times\cdots\cdots\times2^{100}=$

④ $a\times a^2\times a^3\times\cdots\cdots\times a^n=$

解：① $12^5\times12^7=12^{5+7}=12^{12}$

② $8^2\times8^5\times8^3=8^{2+5+3}=8^{10}$

③ 解题思路：观察原式各因数的指数，它们是从1到100的连续自然数，可用等差数列求和公式求出幂的指数。

$$\text{原式}=3^{\frac{(1+100)\times100}{2}}=3^{\frac{101\times100}{2}}=3^{5050}$$

④ 解题思路：根据等差数列求和公式求出幂指数。

$$\text{原式}=a^{\frac{(1+n)\times n}{2}}$$

(2) 同底数幂的除法法则：

根据乘方的意义，看下面的例子。

例：$2^5\div2^3=\underbrace{(2\times2\times2\times2\times2)}_{(5\text{个}2\text{相乘})}\div\underbrace{(2\times2\times2)}_{(3\text{个}2\text{相乘})}$

$$=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}\text{（约分）}$$

$$=2^{5-3}=2^2。$$

又例：$15^4\div15^2=15\times15\times15\times15\div(15\times15)$

$$=15^{4-2}=15^2。$$

由此可以得出：同底数幂相除，原来的底数作底数，指数的差作指数。

用字母表示为：$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$m.n$ 为自然数且$m>n$，$c\neq0$）。

例9：计算

① $7^6\div7^4=$　　② $2^4\times2^8\div2^{10}=$

③ $5^{104}\div5^4=$　　④ $2^3\div2^3=$

解：① 原式 $=7^{6-4}=7^2$

② 原式 $=2^{4+8-10}=2^2$

③ 原式 $=5^{104-4}=5^{100}$

④ 原式 $=2^{3-3}=2^0$，2^0 是多少？不妨这样计算，

原式 $=(2\times2\times2)\div(2\times2\times2)$

$=1$。

由此可见，不等于 0 的数的零次幂为 1 。零的零次方无意义。

(3) 幂的乘方的法则：

我们仍根据乘方的意义，再看一道题。

例 1　$(2^3)^2=2^3\times2^3=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{6\text{ 个 }2\text{ 相乘}}$

$=2^{3+3}$

即 $2^{3\times2}=2^6$。

又例：$(5^3)^4=5^3\times5^3\times5^3\times5^3=5^{3+3+3+3}$

$=5^{3\times4}=5^{12}$

即：幂的乘方法则为：原来的底数不变，只把指数相乘的积作指数。

用字母表示为：$(a^m)^n=a^{mn}$（$m.n$为自然数）

例10：计算：

① $(9^2)^{10}=$　　② $[(4^3)^5]^2=$　　③ $(a^7)^n=$

④ $(b^2)^3\times b=$　　⑤ $(3^4)^3\div(3^3)^2=$

解：① $(9^2)^{10}=9^{2\times10}=9^{20}$

② $[(4^3)^5]^2=4^{3\times5\times2}=4^{30}$

③ $(a^7)^n=a^{7n}$

④ $(b^2)^3\times b=b^{2\times3}\times b=b^{2\times3+1}=b^7$

⑤ $(3^4)^3\div(3^3)^2=3^{4\times3}\div3^{3\times2}=3^{12}\div3^6=3^{12-6}=3^6$

（4）同指数幂的乘法：

如：$3^2\times5^2=3\times3\times5\times5$

$=(3\times5)\times(3\times5)$

$=(3\times5)^2$

又如：$a^3\cdot b^3=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b$

$=(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)$

$=(a\cdot b)^3$

由此可知：同指数幂相乘，等于底数相乘的积作底数，指数不变。

例11：① $2^2\times5^2$　　② $2^3\times5^3=$

③ $4^n\times5^n$　　④ $8^4\times125^4=$

解：① $2^2\times5^2=(2\times5)^2=10^2$

② $2^3\times5^3=(2\times5)^3=10^3$

③ $4^n \times 5^n = (4\times5)^n = 20^n$

④ $8^4 \times 125^4 = (8\times125)^4 = (10^3)^4 = 10^{12}$。

练 习 一

1．根据乘方的意义计算下面各题：

① 12^2 ② 1^{15} ③ 0^3 ④$10^6$ ⑤ 100^0 ⑥ $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⑦ $\left(5\frac{1}{2}\right)^4$ ⑧$(0.3)^2$

2．说出下面各式的结果各是几位数：

① 1.8×10^6 ② 3.05×10^7 ③ 4.875×10^9

3．10的 n 次幂表示下列各数：

① 1000000 ② 80000000 ③ 13000

④ 125000000 ⑤ 2090000000

4．计算下列各题：

① $5^2\times5^3$ ② $2^2\times2^3\times2^4$ ③ $3^0\times3^1\times3^2\cdots\cdots3^{50}$

5．计算下列各题

① $2^5\times5^5$ ② $6^2\times5^2$ ③ $12^4\times5^4$

6．计算下列各题：

① $(4^3)^2$ ② $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3$ ③ $2^4\times5^4\times(2^2)^3$

7．计算下列各题：

① $5^8\div5^5$ ② $12^5\div12^4$ ③ $6^8\div6^4\div6^2$

8．判断每道题中两个算式是否相等。

相等的在（ ）内画“√”，不相等的在（ ）画“×”

① 5^2 和 2^5 (　　)　② 2×3^3 和 $(2\times3)^3$ (　　)

③ a^3 和 $3a(a>0)$ (　　)　④ a^0 和 a $(a>1)$ (　　)

⑤ $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ 和 $\frac{3^2}{7}$ (　)　⑥ $[(4^2)^3]^4$ 和 4^9 (　　)

⑦ $[(4^2)^3]^4$ 和 4^{10} (　　)　⑧ $[(4^2)^3]^4$ 和 4^{24} (　　)

⑨ $5^2\times2^2$ 和 $(5\times2)^2$ (　)　⑩ b^1 和 b $(b>0)$ (　　)

9．请你用乘方的意义推导出积的乘方法则：

即：$(a\times b)^m=a^m\cdot b^m$。

7．平方差公式：

$(a+b)\times(a-b)$，用乘法分配律可得出：原式 $=a^2+ab-ab-b^2$，其中 $+ab$、$-ab$ 抵销原式 $=a^2-b^2$。

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

利用平方差公式可以使某些运算简便：

例12：大圆半径为0.72cm，小圆半径为 0.52cm，求环形面积。

解题思路：环形面积 $S=\pi R^2-\pi r^2$，利用这个公式计算比较烦锁，可以利用平方差公式将环形面积公式变形：

$S=\pi R^2-\pi r^2$

$=\pi(R^2-r^2)$　　根据乘法分配律，

$=\pi(R+r)(R-r)$　　根据平方差公式。

解：$S=\pi(0.72+0.52)(0.72-0.52)$

$=\pi(1.24\times0.2)$

$=0.248\pi$

例13：用简便方法计算 102×98

解：102×98

$= (100+2)\times(100-2)$

$= 100^2 - 2^2$

$= 10000 - 4 = 9996$

练一练：1997×2003　　$16.8^2-13.2^2$

8．完全平方公式：（或曰：二项式的平方公式）

$(a+b)^2$ 根据乘方的意义可得$(a+b)(a+b)$ 根据乘法分配律可得 $a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$。

同理：$(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

也就是说，两数的和(或差)的平方，等于它们的平方的和再加上(或减去)它们的积的 2 倍。用字母公式表示为：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

利用二项式平方公式，可使一些乘方的运算简便。

例14：大小两正方形的边长分别是 198 厘米和104厘米，求它们的面积各是多少平方厘米？

解：$S=a^2$

（1）小正方形面积：$104^2=(100+4)$

$=100^2+2\times4\times100+4^2$

$=10000+800+16$

$=10816$（平方厘米）

（2）大正方形面积：$198^2=(200-2)^2$

$=200^2-2\times2\times200+2^2$

$=40000-800+4$

$=39204$（平方厘米）

答：大正方形面积是39204平方厘米；

小正方形面积是10816平方厘米。

9．特殊数的平方的简便运算：

我们在做一些较特殊数的平方的计算时，认真观察会发现一些规律，运用这些规律，可以使运算简便。

下面我们研究各位数字都是1的数的平方数的运算规律：

$11^2=121$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$\underbrace{111}_{3个1}{}^2=\underbrace{123}_{由1至3}21$　　$\underbrace{1111}_{4个1}{}^2=\underbrace{1234}_{由1至4}321$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ \times\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

请推算：$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{9个1}{}^2=$

$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{10个1}{}^2=?$

$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{9个1}{}^2=12345678987654321$

$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{10个1}{}^2=123456789$
10987654321