微积分

微 积 分

数学力学系编

中 山 大 学

微 积 分

数学力学系微积分编写小组

一九七六年四月

前　言

恩格斯指出：**“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”**（《自然辩证法》）。十七世纪欧洲处于资本主义发展初期，由于生产迅速发展，有力地推动了各门科学技术的前进，特别是航海事业以及力学、天文学的发展，又对数学起了巨大的促进作用，高等数学中的微积分就是在这种形势下发生和发展起来的。

“运动是物质存在的方式。”（《反杜林论》）世界上一切事物，总是处在不断的运动和变化中。随着生产的发展，人们对物质运动的认识日益深化，而反映事物运动和变化规律的数学概念以及方法也必然相应地要有新的创造和发展。为了确切反映事物的运动过程，必须打破原来的常数数学以及形式逻辑的推理法则的局限性，于是人们在数学中引入变数的概念，并运用辩证法于变数运算来分析研究客观事物运动的规律，于是逐步形成了微积分，正如恩格斯所指出的：**“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”**（《自然辩证法》）有了微积分，人们就获得了反映事物运动和变化过程的有力工具，为解决生产实际问题提供一些新的数学模型和新的计算方法，得出了不少急需解决的有关物质运动的

规律。恩格斯对微积分的产生曾给以高度的评价，他说：**“在一切理论成就中未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。”**（《自然辩证法》）

可是，牛顿和莱布尼茨建立微积分的计算方法时是以力学和几何作为其直观背景的，对其中许多新的概念例如“无穷小”还不够明确，以至在推理过程中时而把它当作固定的很小的量，时而把它看作零，从而造成逻辑上的矛盾。由于类似的一些矛盾的存在，使习惯于形式逻辑的人对微积分感到神秘，甚至对它进行攻击。然而新生事物是有强大生命力的，人们经历了长期的反复探索，认识逐步提高，在十九世纪上半叶，由哥西和魏尔斯特拉斯总结提出了$\varepsilon-\delta$论证法，建立了比较明确的极限概念和极限理论，但是，仍然没有摆脱形而上学思想的影响。革命导师马克思用唯物辩证法写了《数学手稿》，首先批判了导函数概念中形而上学的观点，提出了一系列光辉的辩证思想。从此微积分发展成为各门科学技术的有力的数学工具。

恩格斯指出：**“变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。”**（《反杜林论》）因此，我们学习微积分时必须充分运用辩证法分析矛盾，注意矛盾的转化条件，才能深刻领会并掌握微积分的基本概念的本质和原理。事实上，在微积分中充满着矛盾，例如，常数和变数、有限和无限、连续和间断、微分和积分等都是矛盾的概念。我们要看到每一对矛盾之间的差异和对立的一面，但同时也要看到它们在一定条件之下可以相互转化的一面。例如在无限细分的条件下，曲线段和直线段可以互相转化；质量不均匀的一块板在无限细分的一小片中可以看成是质量均匀分布的，这也意味着在一定条件下变数可以转

化为常数。至于微分与积分更是微积分中的一对重要矛盾，求导数和求不定积分(原函数)在一定条件之下互为逆运算。微分是从量上把事物的运动过程无限细分，描述过程中每个瞬间(微区间)的变化状况；而积分把事物的过程无限细分，同时又无限积累起来，描述事物经历全过程以后的整体结果。反映着客观事物运动和变化规律的微分和积分这一对矛盾及其转化，构成了高等数学丰富多采的内容。我们必须学习辩证法，学好微积分，应用它为社会主义建设服务。

本书是在1972年我系出版的《微积分》试用本的基础上经过几次修改补充而成的。在编写过程中，我们学习了毛主席的《矛盾论》，学习了恩格斯的《自然辩证法》和马克思《数学手稿》，努力以辩证唯物主义作指导，给教材以新的面貌。我们还到过广州无线电专用设备厂讲微积分课，后又到重型机器厂等广泛征求工人、技术人员对编写的意见，为了适应工人学习的需要，我们尽量把教材写得简明扼要，多采用生产上特别是无线电方面的例题。在介绍新的概念和理论时，我们力图按辩证唯物论的认识过程，从具体问题或物理模型出发，然后循序渐进，逐步深入，进行抽象概括，而在阐明了概念、理论和方法之后，再应用它来解决实际问题。例如在微分学中，我们从生产实际中的一些求变化率问题开始，逐步引进导数的概念和阐明微分学的基本方法，最后又把它应用于求变化率问题上。由于本书要改编为大学的理工科教材，最近修订时我们增加了一些理工科共同需要的章节，并适当照顾到理论上的严格性。此外，考虑到一些理论性较强的专业的需要，我们还增加了一个附录——极限理论，以供必要时参考。

在编写过程中我们参考了兄弟院校有关的数学教材，并

吸收了部分工农兵学员参加某些章节的编写工作，从中吸取了很多有益的东西，但我们学习马列和毛主席著作不够，对毛主席的教育革命思想领会不深，加以水平有限，经验不足，改编时间较仓促，教材中必然有不少缺点和错误，诚恳地希望同志们批评指正。

中山大学数力系微积分编写小组

1976.1.

目　录

第一章　变化率

微积分是近代自然科学与工程技术中一种基本的数学工具。随着生产实践的需要，在数学领域内，人们逐步把数学研究的范围由常数扩大到变数，而反映物质世界运动和变化状态的变量概念的引入，就促进了数学的发展，并立刻产生了微积分。恩格斯说：**“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。而它们也就立刻产生。并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”**（《自然辩证法》）恩格斯并对微积分的产生给予高度评价。他说：**“在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看成人类精神的最高胜利了。”**（《自然辩证法》）

为了运用微积分这个数学工具去研究解决实际问题，让我们先阐明变量这个概念，所谓变量就是指变化着的量，而变数就是把变量的物理意义抽象之后的纯数学上的量。在生产实践和科学实验中常会遇到许许多多变化着的量，例如力学中的速度；电学中的电流、电压；热学中的温度等等。人们为了揭示力学或电学中的内在规律，往往需要对这些物理量进行计算，并研究它们的变化规律，微积分就是研究事物运动和变化规律的数学方法。毛主席教导我们：**“每一事物的运动都和它周围其他事物互相联系着和互相影响着。”**反

映客观事物运动规律的各种变量也是互相联系着，互相影响着，一个量的变化往往引起另一个量的变化。毛主席又指出：**“有比较才能鉴别。”**为了比较变量之间的变化程度，人们又引入变化率这一概念。

在这一章里，我们首先以一些物理模型作为例子来说明变化率这个概念的客观背景，其次介绍极限这个常用的概念及其运算法则，并结合实例将极限应用到变化率的计算上去。以后我们还要从变化率过渡到“导数”，而后者正是微分学中最基本的概念之一，并具有丰富多采的应用。因此，我们把本章作为一个引子，希望通过它能使我们对微分学中的研究方法有一个初步的了解，并为今后开展微积分学基本理论的讨论提供必要的准备。

第一节　变化率的概念

什么是变化率呢？简单说来，变化率就是指两个变量间变化的比率。下面举几个简单的例子来说明变化率的概念。

1. 速　度

速度就是物体移动的路程对时间的变化率。例如一辆汽车用了80秒钟的时间，匀速地（即快慢程度保持不变）驶过路标8公里到9公里间的一段距离，问它的速度是多少？

大家很快地便会算出汽车在这一段路程的速度是

$$\frac{9-8}{80}(\text{公里}/\text{秒})=\frac{1000}{80}(\text{米}/\text{秒})=12.5(\text{米}/\text{秒})。$$

在这个例子中，汽车由路标8公里处驶到9公里处，在行驶的路程方面增加了1000米，在行驶的时间方面增加了80秒。通常我们便说，在这一段行驶中，路程的**增量**

是1000米，时间的**增量**是80秒，两个增量之比就是所求的速度。

现在用

Δt 表示时间 t 的增量

Δs 表示路程 s 的增量

那么，汽车在这一段路程中的速度 v 就是

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1000}{80}=12.5（米/秒）。$$

即每小时45公里。

应该注意，这里所算的速度是在物体作匀速运动的假设下得到的。在物体作非匀速运动的时候，我们怎样来定义速度呢？这时我们可以考虑一段“很短的时间”（短到实际上可以把它看成一瞬间）内物体运动的过程。因为在很短时间内，不均匀的运动可以看成是均匀的，所以在这瞬间的路程与这段时间之比就是物体在这瞬间的速度。现在用

dt 表示时间 t 的微小增量

ds 表示相应的路程 s 的增量

那么，这一瞬间的物体运动速度 v 就可以由下面式子给出：

$$v=\frac{ds}{dt}。$$

这里的 ds 与 dt 之比叫做路程对于时间的变化率。至于微小增量 dt、ds 的真正意义，在讲微分时还要进一步阐明。

用变化率来描述一个沿直线运动的物体的速度时，我们要在直线上先指定一个量度路程的方向。这样当速度 $v=\frac{ds}{dt}$ 大于零时，就表示物体前进的方向与指定的方向一致，而速度 $v=\frac{ds}{dt}$ 小于零时，则表示物体前进的方向与

指定的方向相反。

2．电流强度

所谓电流强度就是穿过导体截面（内）的电量对于时间的变化率。取电量的单位为库仑，时间的单位为秒，于是电流强度的单位便是库仑/秒，我们称它为安培。例如6库仑电荷在1分钟内均匀地通过导体的某一截面，那么电流强度是$\frac{6库仑}{60秒}=0.1库仑/秒=0.1$安培。与前面讨论速度的情形一样，这种计算电流强度的方法只适于电荷均匀地移动的情形，即所谓恒定电流（直流）的情形。在一般情形，就要考虑在一瞬间dt（秒）内穿过导体截面的电量dQ(库仑)，而dQ与dt之比就是这一瞬间的电流强度I（以安培为单位），即

$$I=\frac{dQ}{dt}.$$

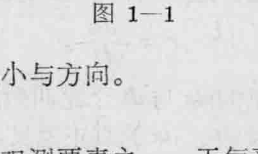

图 1—1

注意：在考虑电流强度时，应首先指定一个方向。（如图1—1）当I是正数时，电流与指定的方向一致；当I是负数时，电流与指定方向相反。这样，电流强度I就可以用来表示电流的大小与方向。

3．气压梯度

在气象学里，大气压力是气象观测要素之一。天气预报利用它作为一项重要依据。

在一平方厘米上压力是10^6达因的气压叫做1巴。巴的千分之一叫做毫巴。气象学里通常使用毫巴作为气压单位。

我们常常需要研究气压沿着高度的变化率，一个地方的气压p是随着海拔高度h的增大而减小的，如果在海拔h处上

升一个微小的高度dh时，相应的气压增量是dp，那么$\frac{dp}{dt}$就是气压p对于高度h的变化率，通常把$-\frac{dp}{dh}$称为气压的垂直梯度。它的倒数称为单位气压高度差。

关于变化率的例子，还可举出一些，如热容量、感应电势等都是。从这些实例，使我们清楚地看到变化率这一概念在力学、电学、气象学等各方面的直观意义，从而使我们对变化率这一概念有了个感性的认识。毛主席教导我们：**“理性认识依据于感性认识，感性认识有待于发展到理性认识，这就是辩证唯物论的认识论。”**因此，在下一节里我们就要对变化率这个概念的含义作进一步的阐明，只有这样，才能掌握它，并在实践中运用它来研究实际问题。

第二节　极限的概念

在上一节关于变化率的例子中，速度$v=\frac{ds}{dt}$是路程的微小增量ds与时间的微小增量dt之比；电流强度$I=\frac{dQ}{dt}$是电荷的微小增量dQ与时间的微小增量dt之比；我们还举了一些其它相类似的例子。然而，一个增量在什么情况下才算“微小”呢？对于一个具体的问题，我们固然可以定出一个标准，规定怎样才算“微小”。但在数学上我们就需要对各种各样的具体问题，把“微小”一词的含义抽象出来。为此，我们要引进极限的概念和无穷小的概念。有了极限的概念之后，变化率就可以改述为两个变量的增量之比的极限。例如，这时上一节例 1 中的速度就可以改述为速度$v=\frac{ds}{dt}$

是路程的增量Δs与时间的增量Δt之比当Δt趋于零时的极限。而例2的电流强度$I=\frac{dQ}{dt}$是电荷增量ΔQ与时间增量Δt之比当Δt趋于零时的极限等等。

什么是极限呢？让我们通过下面几个简单的直观的例子来说明这个概念。

例1.我国古代有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的话。所谓“棰”，就是木棒，所谓“竭”，就是尽的意思。整句话的意思是一尺长的木棒，第一天取掉一半，还留下$\frac{1}{2}$尺；第二天又取掉第一天留下的一半，还留下$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=$ $=\frac{1}{4}$尺；第三天取掉第二天留下的一半，还留下$\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{8}$尺；……。这样，“每天取掉前一天留下来的一半”的做法是永远做不完的。

我们可以把上述无限分割的过程用变数的极限来描述*。令L代表每次留下来的长度，那么L便是一个变数。这个变数L具有这样的性质，它将随着日子的增加而无限地接近于零。这就是说，不论事前指定了一个多么小的长度（例如万分之一尺）总有那么一天，从此以后所剩下的长度L将永远比这个指定的长度还要小，我们称具有这种性质的变量L是以零为极限的。记作

$$\lim L=0 \qquad \text{或 } L\to 0 .$$

这里，记号lim是拉丁语$limit$的缩写（它的意思是极限），整个式子$\lim L=0$就读作“L的极限等于零”，而式子$L\to 0$就读作“L趋于零”。

---

* 由于物理量在取定了單位之后，就可以用数来表示，因而变量这个概念就可以过渡到变数，变量和变数这兩个詞是通用的。

对于变数 L，还可以描述得具体些，第一天的 L 记作 $L_1=\frac{1}{2}$，第二天的 L 记作 $L_2=\frac{1}{2^2}$，……第 n 天的 L 记作 $L_n=\frac{1}{2^n}$ 等等，当 n 沿着自然数1，2，3，……无限增大时，所对应的 L_n 将无限地接近于零。我们用记号 $n\to\infty$ 来表示 n 无限增大，这记号读作"n趋于无穷大"。这样，我们可以说：当 n 趋于无穷大时，变数 L_n 以零为极限。或者说，当 n 趋于无穷大时，L_n 趋于零。这个意思用符号表示出来就是

$$\lim_{n\to\infty} L_n=0 \quad 或\ n\to\infty 时，L_n\to 0 .$$

以零为极限的变量也称无穷小，变量 L_n 是一个无穷小。注意：任何一个绝对值很小很小的正数都不是无穷小，因为无穷小首先是变量，而不是一个很小的常数。

例2. 一块方形铝版（图1—2），在其内划一个内切的圆形。现要求用轧刀把这块方形铝片切成圆形，切割是按这样的过程进行的：沿着外切于圆的直线把凸出的角切去，于是四边形便切成八边形，再切便把八边形切成十六边形，如此继续切下去，多边形的面积 S 将逐渐接近于圆的面积 A。换句话说，就是多边形的面积 S 是一个变数，它以 A 为极限。或者说，变数 S 趋于 A. 记作 $\lim S=A$ 或 $S\to A$.

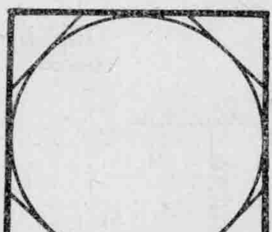

图 1—2

和例1一样，我们可以把 S 写得具体些，第一次切出来

的八边形面积用 S_1 表示，第二次切出来的十六边形 的面积用 S_2 表示，……，第n 次切出来的多边形面积用 S_n 表示等等。这样，我们可以说，当 n 趋于无穷大时，变数 S_n 以 A 为极限。或者说，当 n 趋于无穷大时，S_n 趋于 A。记作

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A \quad \text{或} \quad n\to\infty\text{时} \quad S_n\to A .$$

容易看到，如果S以A为极限，则（$S-A$）是无穷小。

例 3 .弹簧上挂着一个物体，并处于平衡状态。把物体往下拉，然后放手，物体便在原来平衡位置上下振动。（图 1 —3 ）由于空气阻力等原因，振动显然是不断衰减的。

设物体平衡时相对应的位置是零，向上的方向为正向，作一坐标系。设 L 表示物体位置的坐标，则L是一个变数，随着时间 t 的变化，L 的值就正负交替的出现而趋于 零。L 和 t 的关系大致如图 1 — 4 。我们可以说，当时间无限增加时（用符号 $t\to\infty$ 来表示，读作 t 趋于无穷大），L 以零为极限。记作

$$\lim_{t\to\infty} L = 0 .$$

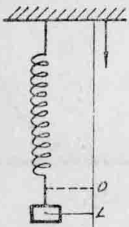

图 1—3

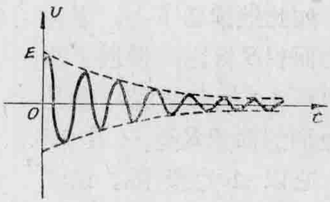

图 1—4