线性代数

主编 黄磊

高等教育出版社

XIANXING DAISHU

线性代数

主编 黄磊
副主编 刘智
参编人员 黄非难 韩小燕 余家树 段芳 刘浩瀚

高等教育出版社·北京

内容简介

本书主要介绍线性代数的基本概念及工程应用，包括矩阵、行列式、向量、线性方程组、几何应用、软件实现等内容。全书共六章，重要小节设有课堂练习，每章后设有大量习题，供学生课堂、课后巩固知识使用。本书的主要特点是在保持线性代数基本理论统一的同时，强调了线性代数的应用性。

本书可供高职高专工科类师生及相关的数学工作者使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 黄磊主编. -- 北京：高等教育出版社，2015.5

ISBN 978-7-04-042401-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①线性代数－高等职业教育－教材 Ⅳ. ① O151.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 067522 号

策划编辑 崔梅萍　　责任编辑 马玉珍　　封面设计 王　洋　　版式设计 王艳红
插图绘制 邓　超　　责任校对 窦丽娜　　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 山东省高唐印刷有限责任公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 7.5
字　　数 180 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015 年 5 月第 1 版
印　　次 2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 12.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 42401-00

前　言

线性代数理论是数学众多经典且优美的理论之一, 随着计算机的发展, 在现代工程技术领域发挥日益重要的作用。本书围绕线性方程组的求解对线性代数中的常用工具——矩阵、行列式、向量给出基本介绍, 同时也给出线性代数在一些有趣领域内的应用, 使得学生能够理解线性代数的基本理论, 体会线性代数的实用性。

本书的主要目的是帮助学生具备利用线性代数理论解决工程技术领域内基本问题的能力, 同时兼顾后续深入学习线性代数理论所需的基本概念及方法。

本书特色

1. 围绕线性方程组展开讨论

本书将建立线性方程组、求解线性方程组作为实际工程问题的解决手段, 在此方法下, 引入线性代数的基本理论, 从不同的观点展开分析并逐步深入。

2. 概念的统一

本书以矩阵为线性代数基本研究对象, 将行列式视为方阵的特殊运算, 与矩阵的基本运算、初等变换、向量分析方法一起作为研究矩阵的基本方法, 加强这些概念之间的统一, 使得学生对线性代数的整体有更加直观的了解。

3. 计算的步骤性

本书将线性代数所涉及的许多计算, 用带有算法性的计算步骤给出, 使得学生通过严格的计算步骤, 能更加快速地掌握线性代数的基本方法, 例如求逆、解方程等。

4. 初等变换及几何性

从方程组的“消元法”出发, 引入矩阵的初等变换, 以此为线索贯穿整本教材, 并将其应用于几何变换, 增强了本书的趣味性与直观性。由于本书面向对象及课时的限制, 我们尽量避免使用“线性变换”等概念, 从而使学生对复杂的概念有更加直观的认识。

5. 加强应用

在保持线性代数基本理论完整的同时, 本书更强调线性代数的应用性。从引言中的建立线性方程组出发, 引入建立线性模型的思想, 在后续章节中从建筑、经济、生物、社会、信息等各个领域的相关问题给出线性代数的应用, 激发学生的学习兴趣。

6. 计算机辅助

在本书最后一章, 借助 Matlab 软件, 对教材中出现的计算给出程序实现方法, 使得学生能

在实际应用中更加专注于线性代数原理及方法的使用。

本书的一些观点及部分应用源自郭聿琦等的《线性代数导引》及 David C. Lay 的 *Linear Algebra and Its Applications*, 由于作者水平有限, 本书的不妥之处在所难免, 我们热忱欢迎使用者给予指正。

编 者

2015 年 1 月

目 录

引言　线性代数与线性方程组

线性代数是代数学的一个重要分支, 主要研究未知数间的线性关系问题. 线性方程组的求解是其核心问题之一, 我国古代数学著作《九章算术》就详细讨论过线性方程组的解法. 从费马和笛卡儿的工作开始, 经过不断发展, 直到 20 世纪, 线性代数才形成独立的分支. 随着科学的不断进步, 尤其是计算机的发展, 线性代数在科学技术和经济学领域内的重要作用日益突出. 本书在介绍经典的线性代数理论基础上, 也同时给出了线性代数在许多工程领域内的应用.

线性方程组是线性代数的核心, 线性代数的众多重要概念都可以由线性方程组引入. 本章简要介绍线性方程组的相关概念, 学习利用线性方程组建立数学模型, 处理实际问题的思想. 在后续章节中, 逐步引入线性代数相关理论, 使读者慢慢体会线性代数的魅力.

0.1　线性方程组

线性方程也称为一次方程, 形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

其中, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是**未知数**, 下标 n 是任意的正整数, 表示未知量的个数, 因此, 方程也称为 n 元方程. **系数** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与**常数项** b 是实数或者复数, 通常为已知数.

在本书中, 无特殊说明情况下, 所有的常数、未知数都取值于实数.

例如

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad 5x_1 + 3x_2 + 1 = 0, \quad 2(x_1 + 6) - x_2 = x_3$$

都是线性方程. 而

$$x_1^2 + x_2 = 0, \quad \sin x_1 + \mathrm{e}^{x_2} = 0$$

都不是线性方程, 因为第一个方程中包含 x_1^2, 第二个方程中包含 $\sin x_1, \mathrm{e}^{x_2}$.

线性方程组是由一个或几个含有相同变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组成的. 例如

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6, \\ \ \ x_1 + \qquad\quad\ x_3 = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

是包含三个未知数两个方程的线性方程组. 一般地, 线性方程组中, 若未知数的个数大于方程的个数, 称之为**欠定方程组**. 若未知数的个数小于方程的个数, 称之为**超定方程组**.

现实问题中, 变量间的非线性关系是绝对的, 线性关系是相对的. 许多问题, 当我们忽略若干次要因素时, 变量间的关系可以近似用线性关系来刻画, 通过建立线性方程组来解决实际问题. “线性化” 的思想如同微积分中 “以直代曲” 的思想一样, 是处理科学技术问题的重要方法之一.

下面我们对几个简单例子建立线性方程组.

例 1 (产销调度问题)　产销平衡下的调度问题是生产中最简单最常见的问题, 可以通过线性方程组很好地刻画. 设某生产厂有两个产地, 三个销地, 产量和销量保持平衡, 产地到销地的运输单位成本 (元) 见表 0.1, 产销调度问题是指如何安排运输使得运输费用最小.

表 0.1　产销平衡下运输成本表　　单位: 元

产地	销地			产量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	12	4	10
A_2	2	10	3	20
销量	6	15	9	30

根据上面的产销运输表, 设 $x_{ij}, i = 1,2, j = 1,2,3$ 表示产地 A_i 运往销地 B_j 的产品量. 则产销调度问题等价于计算下列线性表达式的最小值

$$4x_{11} + 12x_{12} + 4x_{13} + 2x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23}.$$

由于受到产量和销量的限制, 上述 x_{ij} 需满足如下线性方程组条件. 其中, 前两个方程表示产量平衡, 后三个方程表示销量平衡, 同时 $x_{ij} \geqslant 0$.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20, \\ x_{11} + x_{21} = 6, \\ x_{12} + x_{22} = 15, \\ x_{13} + x_{23} = 9. \end{cases}$$

例 2 (营养搭配)　营养学家设计了一种食谱, 这种食谱能提供一定的维生素 C、钙、镁. 食谱由三种食物构成, 表 0.2 给出这些食物包含的以上三种元素的量以及食谱需要提供的营养总需求. 求如何搭配这些食物达到食谱需求.

表 0.2　食谱及原材料搭配表

营养素	单位食物包含的营养素 (毫克)			需要的总营养素 (毫克)
	食物 1	食物 2	食物 3	
维 C	10	20	20	100
钙	50	40	10	300
镁	30	10	40	200

我们设食物 1 需要 x_1 毫克, 食物 2 需要 x_2 毫克, 食物 3 需要 x_3 毫克, 则求解该问题即转化为求解下列方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 = 100, \\ 50x_1 + 40x_2 + 10x_3 = 300, \\ 30x_1 + 10x_2 + 40x_3 = 200. \end{cases}$$

0.2 线性方程组的解及消元法

线性方程组的**解**是指满足方程组中所有方程的一组数 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, 反之, 若不存在这样的一组数, 则称方程组**无解**. 例如, 方程组 (0.1) 有一组解为 $(0, 2, 0)$. 有时, 方程组的解可能不止一个, 可以验证, $(-1, 1, 1)$ 也是方程组 (0.1) 的解.

方程组所有的解构成的集合称为线性方程组的**解集**. 无解时, 称解集为空集. 若两个方程组的解集相同, 则称两个方程组**同解**, 或称这些方程组是**同解方程组**.

求线性方程组解的过程, 称为**解线性方程组**. 在初等数学中, 未知量较少时, 我们可以通过 "消元法" 求解线性方程组. 在利用 "消元法" 时, 我们对方程组消元的过程主要用到了以下三种变换.

> "消元法" 解线性方程组的三种变换
> 1. *交换方程组中两个方程 A, B 的位置;*
> 2. *以常数 k 乘以方程 A 得到 kA, 取代原方程 A, $k \neq 0$;*
> 3. *将方程 B 乘以 k 加上方程 A 得到 $A + kB$, 取代原方程 A, $A \neq B$.*

以上三种变换在线性代数中是非常重要的方法, 在后面章节中, 我们将看到它们的广泛应用.

根据初等数学知识, 我们知道方程组 P 经过上述三种变换后得到的新的方程组 P' 与 P 同解.

例 3 (用消元法解二元方程组) 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

解 按照消元法的三种变换, 我们首先将第二个方程乘 3, 加到第一个方程上, 消去 x_2, 得到同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x_1 \qquad = 5, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}.$$

通过解同解方程组, 容易计算得到原方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = 1$.

最后, 我们以线性方程组中的三个基本问题作为本章的结束, 同时这三个问题也是本书讨论的核心问题之一.

> 线性方程组的三个基本问题
> 1. *方程组是否有解;*
> 2. *若方程组有解, 解是否唯一;*
> 3. *如何求出方程组所有的解.*

对于以上三个问题, 我们将在本书的后续章节, 利用线性代数中的多种理论给出回答.

习 题 0

1. 利用消元法求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4, \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8, \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7, \\ x_2 + 5x_3 = -2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. 举例说明欠定方程组可能无解.

3. 举例分析若欠定方程组有解, 解能否只有一个.

4. 分别举例说明超定方程组可能无解, 可能只有一个解, 可能有不止一个解.

5. 判断下列直线、平面是否有公共交点.

(1) $y = 1 + 4x$, $2y - x = -3$ 和 $-y - 3x = 4$;

(2) $x + 2y + z = 4$, $y - z = 1$ 和 $x + 3y = 0$.

6. (人口变迁) 随着中国城镇化建设的发展, 部分农村人口转移到城市, 同时也有部分城市人口转移到农村, 假设每年从农村转移到城市的人口占农村人口比例的 10%, 城市人口转移到农村的占城市人口的 1%, 若一个地区第一年初农村人口 50 万, 城市人口 30 万, 分析第 2 年初农村和城市人口变化情况, 若以上转移比例不变, 分析 5 年后农村人口和城市人口的变化情况.

7. (房屋建筑设计问题) 一栋大楼建筑使用模块建筑技术. 每层楼的建筑设计在以下 A、B、C 三种设计方案中选择.

A: 每层 18 个公寓, 包括 3 个三室单元、7 个两室单元、8 个一室单元;

B: 每层 16 个公寓, 包括 4 个三室单元、4 个两室单元、8 个一室单元;

C: 每层 17 个公寓, 包括 5 个三室单元、3 个两室单元、9 个一室单元;

问: 是否可以设计该建筑, 使得恰有 66 个三室单元, 74 个两室单元, 136 个一室单元? 若有, 请给出大楼设计方案.

8. (早餐的设计) 一种早餐由两种特殊食物原材料构成, 表 0.3 中列出了每种原材料提供的卡路里、蛋白质、碳水化合物和脂肪含量.

若人体需要 295 卡路里, 9 g 蛋白质, 48 g 碳水化合物, 8 g 脂肪, 问能否由上述两种食材设计出这样的早餐.

表 0.3 早餐素菜营养成分表

营养素	每种食材的营养素含量	
	牛奶	麦片
卡路里	110	130
蛋白质 /g	4	3
碳水化合物 /g	20	18
脂肪 /g	2	5

注: 1 卡路里 (cal)=4.186 焦耳 (J)

第一章 矩阵代数

一般地，由实际工程问题所构建的线性方程组是多元方程组，并且未知数的个数也不是简单的几个，可能有几十个、几百个，甚至成千上万个. 因此，为了求解这类线性方程组，需要引入更简洁的工具. 忽略未知数符号对方程组求解的影响，将方程组中的系数按照次序提取出来，加以排列，构成独立的研究对象，这就形成了线性代数最基本的工具 —— 矩阵. 矩阵最早由西尔维斯特 (Sylvester, 1814—1897) 提出并使用，由英国数学家凯莱 (A. Cayley) 于 1858 年发表的论文《矩阵论的研究报告》所正式确立为独立的数学概念并加以研究.

本章中，我们对矩阵的概念、性质、运算及相关应用进行讨论.

1.1 矩　　阵

定义 1.1　给定正整数 m,n，将 $m\times n$ 个数

$$a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n)$$

排成 m 行 n 列的数表，记为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 m 行 n 列的**矩阵**，简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 或 (a_{ij}). m 和 n 分别为矩阵的**行数**和**列数**，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行，第 j 列的**元素**.

例 1　考虑引言中例 3 的线性方程组，若将等式左边未知数前的系数按照未知数顺序和方程组的顺序提取排列出来，得到 2 行 2 列的矩阵

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=5\\ \ \ x_1-\ \ x_2=0\end{cases}\Longrightarrow \boldsymbol{A}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

一般地，我们称这样构造的矩阵为方程组的**系数矩阵**.

按照矩阵的定义，通常的一个数 a，也可以视为 1×1 的矩阵 (a).

1.1.1　特殊矩阵

本小节中，我们罗列部分常用矩阵，在后续内容中，我们还将继续学习其他一些满足特殊条件的矩阵.

1. 零矩阵　矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中所有元素都为 0, 记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

2. 方阵　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数相同, 即 $m=n$, 记作 $\boldsymbol{A}_n$.

3. 三角阵　方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 形式如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

即方阵中对角线 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的下方或上方全为 0 (从左上到右下方向, 也称为方阵的**主对角线**). 其中, 主对角线上方全为 0 称为**下三角阵**, 反之称为**上三角阵**.

4. 对角阵　方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 中除主对角线元素外的所有元素为 0, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

5. 数量阵　对角阵 $\boldsymbol{A}_n$ 中对角线所有元素都相等, 即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k\neq 0$, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

6. 单位阵　数量阵 $\boldsymbol{A}_n$ 中 $k=1$, 通常记作 $\boldsymbol{E}_n$, 即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

1.1.2　矩阵间的关系

给定两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}_{s\times t}=(b_{ij})$, 根据矩阵的行数和列数, 即 m,n,s,t 以及矩阵的具体元素 a_{ij} 和 b_{ij} 之间的关系, 我们有关于矩阵间的一些基本关系如下.

1. 同型　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应的行数和列数相同, 即 $m=s,n=t$.

2. 相等　两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 对应位置元素相等, 即 $a_{ij}=b_{ij}$, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 2　设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta+2 & 1 \end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 求 α,β.

解 根据 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 得

$$\alpha=\beta,\quad \beta^2=\beta+2,\quad \alpha^2=1.$$

因此, $\alpha=-1,\beta=-1$.

▶ 课堂练习

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数、列数, a_{21},b_{32}, 判断 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否相等.

1.2 矩阵运算

1. 矩阵加法 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个同型 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是 $m\times n$ 型矩阵, 且 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, 即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

2. 数量乘法 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, k 是一个数, 则 $\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵, 且 $c_{ij}=ka_{ij}$, 即

$$\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

特别地, 令 $k=-1$, 记 $(-1)\boldsymbol{A}$ 为 $-\boldsymbol{A}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 根据矩阵加法, 我们可以定义**矩阵减法** $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

例 3 (矩阵加法及数乘) 已知矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 2 & 8\end{pmatrix}.$$

计算 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解 根据矩阵加法及数乘运算得

$$
\begin{aligned}
2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}&=2\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&5\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}2&3&-1\\5&2&8\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}2&0&6\\4&8&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&-9&3\\-15&-6&-24\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-4&-9&9\\-11&2&-14\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 1.1 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵, k,l 是数, 则

a. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; b. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;
c. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$; d. $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

证明 矩阵等式的证明, 最直接的方法是讨论等式两边矩阵的元素间的关系, 下面以 d 的证明为例, 其余证明留给读者.

记 $B=(k+l)\boldsymbol{A}$, $C=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$, 根据数量乘法及加法定义,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}=(k+l)\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}(k+l)a_{11}&(k+l)a_{12}&\cdots&(k+l)a_{1n}\\(k+l)a_{21}&(k+l)a_{22}&\cdots&(k+l)a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(k+l)a_{m1}&(k+l)a_{m2}&\cdots&(k+l)a_{mn}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}la_{11}&la_{12}&\cdots&la_{1n}\\la_{21}&la_{22}&\cdots&la_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\la_{m1}&la_{m2}&\cdots&la_{mn}\end{pmatrix}\\
&=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}.
\end{aligned}
$$

3. 矩阵乘法 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘, 记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 其中, $\boldsymbol{C}$ 是 $m\times l$ 矩阵, 且

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,l.$$

特别注意的是, 只有当**左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数**时才能进行矩阵乘法运算. 矩阵乘法法则归结起来即 “**左行乘右列**”, 如图 1.1 所示.

例 4 (计算两矩阵的积) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix},$$

判断 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$ 是否成立, 若成立计算其值.

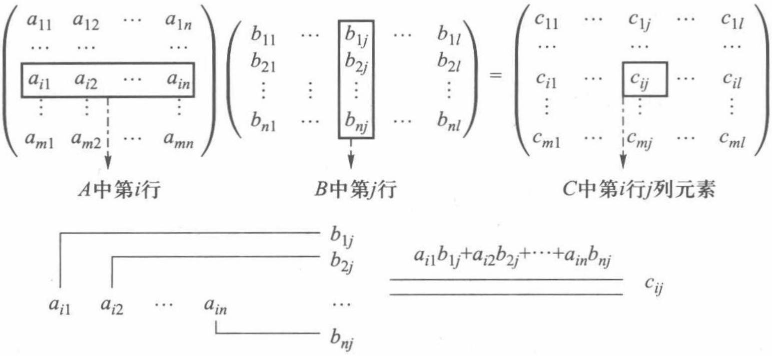

图 1.1 矩阵乘法计算法则示意图

解 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 2×2 矩阵, 根据矩阵乘法法则, $\boldsymbol{AB}$ 不能进行乘法运算, 因此不成立. $\boldsymbol{BA}$ 可以进行乘法运算, 且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{BA} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 3+1\times 0 & 2\times 0+1\times 1 & 2\times 3+1\times 2 \\ 3\times 3+-1\times 0 & 3\times 0+-1\times 1 & 3\times 3+-1\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

例 5 (方程组的矩阵形式) 将下列线性方程组写成矩阵乘法形式

$$
\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3 = 1, \\ x_1+x_2+9x_3=-7, \\ x_1+2x_2-6x_3 = 9. \end{cases}
$$

解 用 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{B}$ 分别表示矩阵的系数矩阵、未知数矩阵、常数项矩阵如下

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.
$$

根据矩阵乘法法则, 原方程组可表示为如下矩阵形式

$$
\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}.
$$

例 6 (单位阵乘法性质) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{AE}_n = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 特别地, 当 $m=n$ 时, $\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{AE} = \boldsymbol{A}$.

根据矩阵乘法法则, 请读者自行证明验证.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足矩阵相乘条件, k 是常数, 则以下等式成立.

a. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;　　b. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

c. $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;　　d. $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

定理的证明留给读者.

与数的乘法有所不同, 对于矩阵乘法以下各项需特别注意.

> 矩阵乘法特别注意事项
>
> 1. 一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, 即矩阵乘法不满足交换律;
> 2. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 一般情况下, $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}$;
> 3. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 一般情况下, 不能断定 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

4. 矩阵幂 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, n 是一个数, 则 n 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘有意义, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂, 记为

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n\text{ 个}}.$$

5. 矩阵转置 将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行列互换, 得到 $n\times m$ 型矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times m}$, 且元素满足 $a_{ij} = b_{ji}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵或 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵, 记作 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 7 写出下列矩阵的转置.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3.$$

解 根据定义有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_3.$$

定理 1.3 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足下列等式成立条件, k 是常数, 则以下等式成立.

a. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;　　b. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

c. $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　　d. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

由上面注意第 3 点, 一般地, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 不能得到 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{O}$, 但是在下列特殊条件下, 我们有

例 8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: 若 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.