



“十三五”普通高等教育本科重点规划教材



Signal and System Analysis(Third Edition)

信号与系统分析

(第三版)

宗伟 盛惠兴 杜鹏英 编著



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



“十三五”普通高等教育本科重点规划教材

信号与系统分析

(第三版)

编著 宗 伟 盛惠兴 杜鹏英
主审 孟 桥



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科重点规划教材，亦为北京市高等教育精品教材。

全书共分九章，主要内容包括信号与系统的基础知识、连续时间系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间系统的 s 域分析和系统函数、离散系统的时域分析、离散系统的 z 域分析、离散傅里叶变换与快速傅里叶变换、数字滤波器、线性系统的状态变量分析等。每章末均配有习题，书后附有虚拟实验介绍。本书注重实际应用，取材适当，结构新颖，论述内容深入浅出。

本书可作为普通高等院校电气类、电子类、自动化类等相关专业教材，也可作为函授教材，同时可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

信号与系统分析/宗伟，盛惠兴，杜鹏英编著. —3 版. —北京：中国电力出版社，2015. 11

“十三五”普通高等教育本科重点规划教材

ISBN 978-7-5123-8154-4

I. ①信… II. ①宗…②盛…③杜… III. ①信号分析—高等学校—教材 ②信号系统—系统分析—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 187268 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2004 年 2 月第一版

2015 年 11 月第三版 2015 年 11 月北京第十一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.25 印张 464 千字

定价 39.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签，刮开涂层可查询真伪
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前 言

本教材自 2004 年出版以来，受到了广大高校师生的关注，并于 2007 年出版了第二版。为进一步适应课程体系的改革、课程内容的更新，依据第二版教材出版后读者反馈的信息，决定修订出版第三版。

第三版较第二版做了如下修改和补充：离散部分增加了双边 Z 变换；增加了系统函数的流程图；补充了卷积和的计算方法，差分方程的框图表示；第四章增加了连续时间系统的 s 域分析。根据新增内容又补充了部分例题和习题。

本版教材的修订由宗伟、盛惠兴、杜鹏英完成，宗伟统稿。本版教材由东南大学孟桥教授主审，提出了宝贵的修改意见，编者在此致以衷心的感谢。

虽然本版教材较前两版越来越完善，但随着科技的发展，相关问题与不足将会有所显现，敬请读者指正。

编著者

2015 年 9 月

第二版前言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为修订教材。

随着科学技术的迅速发展，新兴学科不断增加，知识总量不断增长，迫使本科教育不断向着基础化方向发展。加强基础、拓宽口径、增强适应性、注重人才综合素质的培养，已成为社会各界的共识。为此，教育部于1998年正式决定把原仅为信息类的专业基础课《信号与系统》也列为了电气工程及其自动化、自动化、测控技术与仪器等专业的主干课程，以淡化强弱电类专业的界限，使得有关电专业的本科生有着共同的技术基础，达到通识教育。为适应这一需要，根据非信息类专业的特点，同时兼顾信息类专业在后续专业课学习中所应具备的信号与系统的知识，我们编写了本教材。

本教材对传统的《信号与系统》教材在内容的取舍上做了如下调整：

(1) 传统的《信号与系统》教材，信号与系统分析基本各占一半。本教材加强了信号分析的内容，尤其增加了离散信号的傅里叶分析，从而改变了过去以系统分析为主，信号分析为辅的模式。

(2) 在处理连续与离散的内容方面，加强了离散信号与离散系统的分析，特别增加了数字信号处理的内容，使读者通过本课程的学习能为进一步学习数字信号处理打下良好的基础，以适应数字技术及计算机技术的飞速发展及广泛应用的需要。

(3) 本教材强调基本内容的深刻理解和基本概念的建立，强化所学知识的综合应用与创新能力的培养。

(4) 本教材的另一特色是加入了实验教学内容。编者以 MATLAB 为软件平台，开发了计算机虚拟实验。考虑到大部分院校还没有将 MATLAB 纳入教学计划中，学生还不能熟练使用该软件。因此，本实验由人机交互形式构成，界面友好，操作简单，并具有可扩充性。实验软件已编译成可脱离运行环境的独立的软件包，并在任一 Windows 系统下运行。

第二版在仍保持第一版的特色基础之上，主要做了如下修订：

(1) 第四章和第九章内容作了较大调整，使系统分析的拉氏变换法和状态变量分析的状态变量法更切合工程实际；

(2) 补充了第六章部分问题的详解；

(3) 删减了部分习题，增加了具有实际意义的部分例题和习题；

(4) 标示 * 号部分为参考内容, 可以根据专业和课时需要有所取舍。

全书共分九章, 每章均有适量的习题及习题答案, 附录中配有常用变换公式及数学公式。讲授全部内容约需要 56 学时, 对于不同专业可按需要进行筛选。另外, 本书配套的《信号与系统分析习题解答》也将于近期出版。

本书第一版由华北电力大学宗伟、浙江大学李培芳、河海大学盛惠兴主编, 宗伟统稿全书。其中, 宗伟编写第二、三章及附录 A、B、C; 李培芳选定第五、六、七、八章内容; 盛惠兴编写第四、九章; 李江编写第五、六章; 杜鹏英编写第七、八章; 汪燕编写第一章。教学实验开发人员有: 宗伟、刘春磊、王泽一、李志力、李渤龙、王默玉。全书由田璧元教授主审。

参加本书修订工作的有宗伟、盛惠兴、杜鹏英。

本书在编写过程中得到华北电力大学电气工程学院的领导及同仁们的大力支持和帮助, 在此表示感谢。

本书虽然在第一版基础之上, 根据各方面的读者提出的建设性意见作了一些改进, 但遗漏之处在所难免, 敬请读者提出宝贵意见。

电子信箱: zongwei@ncepu.edu.cn。

编者

2007 年 7 月于北京

目 录

前言	
第二版前言	
第一章 信号与系统的基础知识	1
第一节 信号	1
第二节 系统	14
习题	20
第二章 连续时间系统的时域分析	24
第一节 连续时间系统的数学模型	24
第二节 连续时间系统的零输入响应和零状态响应	26
第三节 冲激响应和阶跃响应	29
第四节 信号的时域分解和卷积积分	34
第五节 卷积积分的运算规律及性质	38
习题	43
第三章 连续时间信号与系统的频域分析	48
第一节 周期信号的频谱分析——傅里叶级数	48
第二节 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换	56
第三节 傅里叶变换的性质	62
第四节 周期信号的傅里叶变换	72
第五节 信号的功率谱与能量谱	74
第六节 调制和解调	76
第七节 连续时间系统(LTI)的频域分析	80
第八节 信号的抽样与恢复	86
习题	92
第四章 连续时间系统的 s 域分析和系统函数	101
第一节 连续时间系统的 s 域分析	101
第二节 系统函数的概念	104
第三节 系统函数的求法	105
第四节 系统函数的零、极点分析	106
第五节 全通函数和最小相移函数	111

习题	112
第五章 离散系统的时域分析	115
第一节 离散信号	115
第二节 时域离散系统	124
第三节 常系数差分方程的经典解法	128
第四节 离散系统的零状态响应	133
第五节 离散系统的稳定性与因果性	135
习题	138
第六章 离散系统的 z 域分析	141
第一节 Z 变换	141
第二节 Z 逆变换	152
第三节 Z 变换与傅氏变换和拉氏变换的关系	157
第四节 差分方程 Z 变换解法	162
第五节 离散系统的系统函数	164
第六节 离散系统的频率响应	167
习题	171
第七章 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	175
第一节 傅里叶变换的形式	175
第二节 离散傅里叶变换 (DFT)	180
第三节 快速傅里叶变换 (FFT)	190
第四节 离散傅里叶变换 DFT 的应用	197
习题	212
第八章 数字滤波器	214
第一节 模拟滤波器 (AF) 的设计	214
第二节 数字滤波器 (DF) 的基本概念和类型	218
第三节 IIR 数字滤波器的设计	220
第四节 FIR 数字滤波器的设计	229
第五节 数字滤波器的结构	240
习题	243
第九章 线性系统的状态变量分析	246
第一节 状态、状态变量和状态方程	246
第二节 连续时间系统状态空间表达式的建立	250
第三节 状态空间表达式的线性变换及规范化	258
第四节 连续时间系统状态方程的求解	263
第五节 离散时间系统状态空间表达式的建立	271

第六节 离散时间系统状态空间表达式的求解·····	272
第七节 连续时间状态空间表达式的离散化·····	277
习题·····	277
附录 A MATLAB 环境下“信号与系统分析”课程实验·····	282
附录 B 各变换的性质及常用信号的变换公式·····	287
附录 C 常用的数学公式·····	294
参考文献·····	296

第一章 信号与系统的基础知识

第一节 信 号

信号是信息的载体,消息中所包含的事先不确定的内容就是信息。现在,将消息这个载体以物理量的形式表现出来,如用声、光、电、位移、速度、加速度、温度、湿度、颜色等代替消息,则构成信号。信号是反映信息的物理量。从信息的传输和处理角度来说,信号较之消息的其他表现形式,如文字、语言等,更便于被系统所接收,特别是电信号这种物理形式,已被广泛应用于各种技术领域中,这是当今电子信息技术迅猛发展和快速普及的根本原因。

一、信号的分类

信号分类多种多样,根据不同的分类原则,可将信号进行分类。

(一) 电信号与非电信号

电信号的基本形式是随时间变化的电压和电流。一般电信号容易传输和控制,因此在工程实际中,常把非电信号转换成电信号进行传输与处理。声信号、光信号等均为非电信号。

(二) 周期信号与非周期信号

按照信号 $f(t)$ 是否按一定时间间隔重复可分为周期信号与非周期信号。

如果一个信号的函数表达式为

$$f(t) = f(t + kT) \quad [k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (\text{任意整数})]$$

则称该信号为周期信号, T 为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程,便可确知它在任一时刻的数值。周期信号的特点是“周而复始,贯彻始终”。若令周期信号的周期 T 趋于无限大,则成为非周期信号。

(三) 确定性信号与随机信号

按照信号是否可以预知,通常把信号分为确定性信号与随机信号。

如果信号能够用一确定的时间函数来表示,当给定某一时间值时,函数有确定的数值与之对应,这种信号称为确定性信号或规则信号。比如正弦信号、指数信号等,这类信号的变化规律可以确知,某函数值在以后相同的条件下,能够准确地重现。反之,如果只知道信号取某一数值的概率,而不能用一个确定的时间函数来表示,则这种信号称为随机信号或不规则信号,在以后相同的条件下不能准确地重现。

实际上,生活中所存在的信号在一定程度上都是随机的,即使是确定性信号,在传输的过程中也存在着某些“不确定因素”或“事先不可预知性”。譬如,在通信系统中,信号在传送和处理的各个环节中不可避免地要受到干扰和噪声的影响,这些干扰和噪声都具有随机特性,是随机信号。但是随机信号在一定条件下能够表现出某些确定性,可以按照确定性信号分析处理,仍能满足工程实际的应用。故本书只讨论确定性信号,它是研究随机信号特性的基础,而对随机信号的分析要用概率、统计的观点和方法,是后续课程的任务。

(四) 连续时间信号与离散时间信号

按照信号 $f(t)$ 的自变量 t 是否连续取值, 可将信号分为连续时间信号与离散时间信号 (简称连续信号与离散信号) 两种。

如果信号的自变量连续取值, 而信号除了若干个不连续点以外, 在任何时刻都有定义, 这类信号称为连续信号。图 1-1 所示为幅值连续的连续时间信号, 图 1-2 为幅值离散的连续时间信号。 $f_1(t)$ 在整个时间定义域内连续, 但 $f_2(t)$ 在 $t = t_0 (t_0 = 0, 1, 2, 3, 4)$ 处不连续, 这两类信号都属于连续信号。对于时间和幅值都连续的信号称为模拟信号。

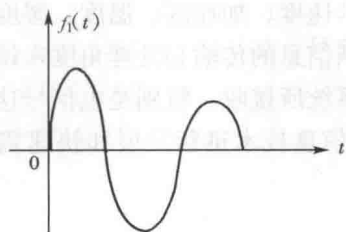


图 1-1 幅值连续的连续时间信号

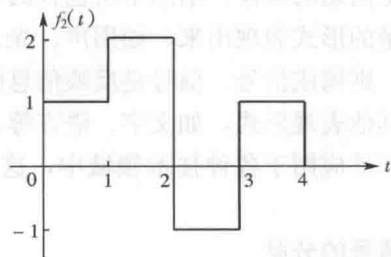


图 1-2 幅值离散的连续时间信号

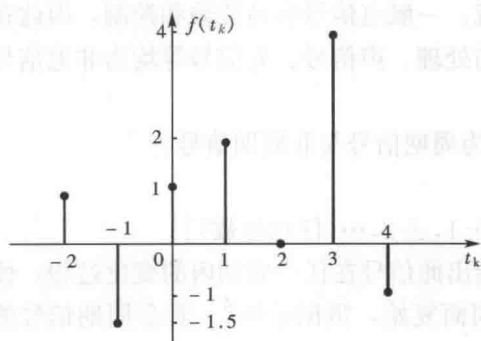


图 1-3 离散信号

离散时间信号, 是指仅在一些离散的瞬间才有定义的信号, 即信号的自变量不连续, 信号只定义在这些离散时刻, 其他时间没有定义, 如图 1-3 所示。此图对应的函数 $f(t_k)$ 在 $t_k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 离散时刻给出函数值 $\dots 1, -1.5, 1, 2, 0, 4, -1, \dots$ 给出函数值的离散时刻的间隔可以是均匀的, 也可以是不均匀的, 一般情况都采用均匀间隔。图 1-3 表示的离散信号为 $f(k) = \{\dots 1, -1.5, \underset{\downarrow}{1}, 2, 0, 4, -1, \dots\}$, 箭头指示处表示相应的序号 k 为零。

为零。

如果离散时间信号的幅值是连续的模拟量, 则称该信号为抽样 (或采样) 信号。对于时间和幅值都量化的信号称为数字信号。

(五) 能量信号与功率信号

按照信号的能量或功率是否为有限值, 研究不同信号所具有的能量或功率的分布规律, 信号可分为能量信号和功率信号。

如果信号 $f(t)$ 的功率为有限值, 能量为无穷大, 则称这样的信号为功率信号; 如果信号 $f(t)$ 的能量为有限值, 功率为零, 则称这样的信号为能量信号。可见, 一个信号不能既是能量信号又是功率信号。

若将信号 $f(t)$ 视作为加在 1Ω 电阻两端的电压或其中流过的电流, 则单位电阻在一周期内消耗的总能量为

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1-1)$$

平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1-2)$$

如果周期为无穷大, 信号 $f(t)$ 为复数, 则

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

一般周期信号是常见的功率信号, 因为周期信号是周而复始的, 因而在其全部时间内的能量是无限大, 但其平均功率 (一周期内功率的平均值) 是有限的。而非周期信号一般可能出现四种情况: ①持续时间有限的非周期信号为能量信号, 如图 1-4 (a) 所示, 它具有无限大的周期, 故在一周期内功率的平均值为零; ②持续时间无限、幅度有限的非周期信号为功率信号, 如图 1-4 (b) 所示; ③持续时间无限、幅度也无限的非周期信号为非功率非能量信号, 如图 1-4 (c) 所示。④信号能量无限, 而功率为零的非周期信号也是既非功率信号又非能量信号。

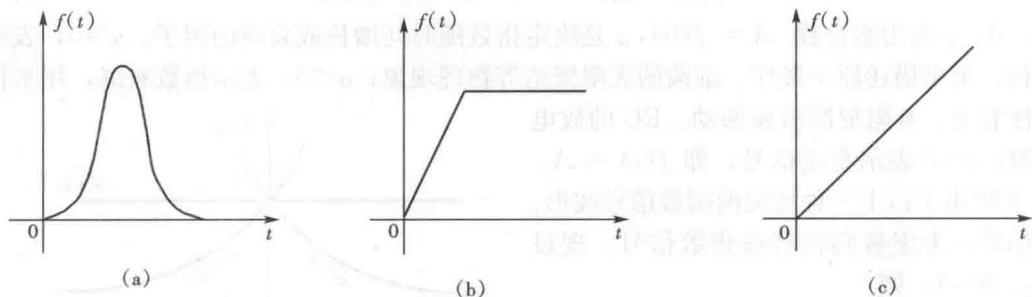


图 1-4 三种非周期信号

(a) 能量信号; (b) 功率信号; (c) 非功率、非能量信号

(六) 有始信号与双边信号

如果信号 $f(t)$ 在 $t < 0$ 时恒等于零, 则称 $f(t)$ 为有始信号 (或单边信号), 否则为双边信号。

(七) 实信号与复信号

物理上可实现的信号都是时间的实函数, 其在各时刻的函数值均为实数, 统称为实信号。复信号虽然实际上不能产生, 但为了理论分析的需要, 常常利用复信号, 最常用的是复指数信号。

二、基本信号

基本信号亦称常见信号, 这类信号的图形和表达式都十分简洁, 可用来组成其他一些较复杂的信号。这里仅介绍常见的连续信号。

(一) 正弦信号

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$, 经常统称为正弦信号, 一般写作

$$f(t) = K \cos(\omega t + \theta) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1-5)$$

式中, K 为振幅; ω 为角频率; θ 为初相位。三者构成正弦量的三要素。

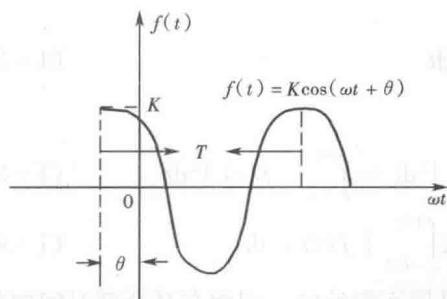


图 1-5 正弦信号的波形

正弦信号波形如图 1-5 所示。

正弦信号是周期信号,其周期 T 与角频率 ω 和频率 f 满足关系式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

正弦信号具有处处光滑、连续可微等特点,同频率正弦量的相加、微分、积分运算以后仍得同频率的正弦量,所以正弦量的应用非常广泛。

有时会遇到变幅的正弦信号,例如二阶电路的欠阻尼状态,这时电路中的响应为衰减的正弦信号,其表示式为

$$f(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t \quad (t \geq 0) \quad (1-6)$$

(二) 指数信号

实指数信号表达式

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1-7)$$

式中, A 、 α 均为实常数。 $A = f(0)$, α 是决定指数随时间增长或衰减的因子。 $\alpha > 0$, 表示指数增长,用来描述原子爆炸、细菌的无限繁殖等物理现象; $\alpha < 0$, 表示指数衰减,用来描述放射性衰变、有阻尼的机械振动、RC 的放电过程等; $\alpha = 0$ 表示直流信号,即 $f(t) = A$ 。

图 1-6 给出了以上三种情况的指数信号波形。

如果 α 为虚数则得到虚指数信号。现设 $\alpha = j\omega$, $A = 1$, 则

$$f(t) = e^{j\omega t} \quad (1-8)$$

根据欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (1-9)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad (1-10)$$

可以看出,虚指数信号是一个很重要的信号,它可以用来描述许多基本信号。它和正弦信号的内在联系,将经常用到。

(三) 抽样信号^①

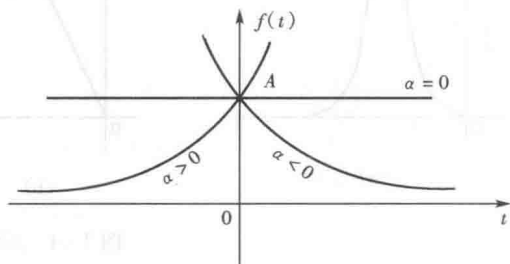
抽样信号(波形如图 1-7 所示)的表示式为

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (1-11)$$

抽样函数是由 $\sin x$ 与 x 两个函数之比构成,其性质如下:

(1) $Sa(x) = (\sin x) \left(\frac{1}{x} \right) = Sa(-x)$, 两个奇函数相乘,等于一个偶函数。

(2) 当 x 等于 π 的整数倍时,即 $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时, $Sa(x) = 0$, 其函数值等于零。

图 1-6 $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ 三种情况的指数信号波形

^① 此处抽样信号并非第 2 页中提到的抽样(或采样)信号。

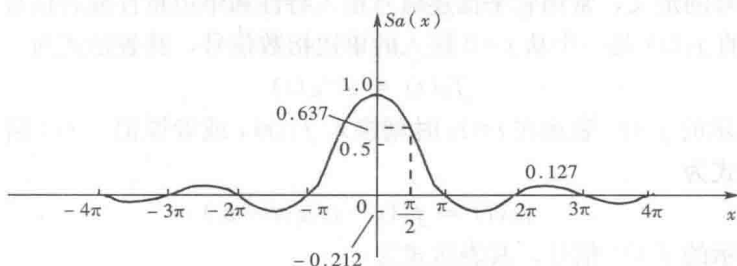


图 1-7 抽样信号

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $Sa(x) = 1$, 存在一个重要极限, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(4) $Sa(x)$ 曲线下的面积等于 π , 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(x) dx = \pi$$

(四) 单位阶跃信号

如果信号 $f(t)$ 满足

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1-12)$$

则称这个信号为单位阶跃信号, 波形如图 1-8 所示。单位阶跃信号用 $\epsilon(t)$ 表示

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1-13)$$

函数在 $t=0$ 处是不连续的, $\epsilon(0_-) = 0, \epsilon(0_+) = 1, t=0$ 称为跳变点; 函数值 $\epsilon(0)$ 一般没有定义, 这并不影响分析结果, 但有时如果需要, 则定义该点的函数值为

$$\epsilon(0) = [\epsilon(0_-) + \epsilon(0_+)]/2 = 1/2$$

从物理意义来解释阶跃信号, 又可将其称作开关信号。 $t < 0$ 时, 信号为零; $t = 0$ 时, 接入信号, 并且无限持续下去。 $t = 0$ 处是信号的突变点, 信号从零值突变到单位值。因此认为阶跃信号是理想开关的模拟函数。如果接入信号的时刻为 t_0 (设 $t > 0$), 则得到延时的单位阶跃信号

$$\epsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases} \quad (1-14)$$

波形如图 1-9 所示, $\epsilon(t - t_0)$ 的跳变点不在 $t = 0$, 而在 $t = t_0$ 处。

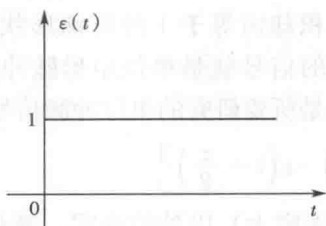


图 1-8 单位阶跃信号

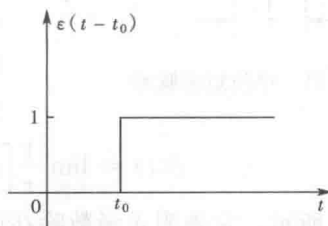


图 1-9 延时的单位阶跃信号

根据阶跃信号的定义,常用它来描述信号接入特性和单边特性或者信号存在的时域,图 1-10 (a) 所示的 $f_1(t)$ 是一个从 $t=0$ 接入的单边指数信号,其表达式为

$$f_1(t) = e^{-\sigma t} \epsilon(t)$$

图 1-10 (b) 所示的 $f_2(t)$ 表示在 $t=t_0$ 时刻接入 $f_1(t)$,或者说把 $f_1(t)$ 信号向右平移了 t_0 个单位,其表达式为

$$f_2(t) = f_1(t-t_0)\epsilon(t-t_0)$$

图 1-10 (c) 所示的 $f_3(t)$ 信号,其表达式为

$$f_3(t) = f_1(t)[\epsilon(t-1) - \epsilon(t-3)]$$

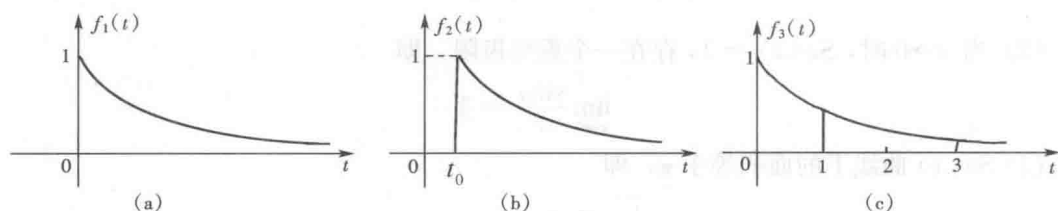


图 1-10 单边指数信号

(a) 单边指数信号 ($t=0$ 时接入); (b) 时移指数信号; (c) 时限指数信号

(五) 单位冲激信号

冲激信号 (又称 δ 函数) 是电路分析与系统理论中的又一个重要信号,它与阶跃信号一样也是一个奇异信号,是一种特殊的理想化的信号,需要用广义函数或分布函数的理论来分析。这里着重从工程实用的角度来介绍,不做深入的数学分析。工程上定义 δ 函数为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (1-15)$$

为了对它有一个直观的认识,不妨先将它看成一个普通的函数,如图 1-11 所示的窄矩形脉冲。这个信号有一个十分突出的特点,这就是它的脉宽 (脉冲所占时间的宽度) τ 和它的脉高 (脉冲的高度) $1/\tau$ 成反比关系。这表明脉宽越窄时,脉高将越高,但信号与时间轴围成的面积 (简称信号的面积) 却始终保持为单位 1。

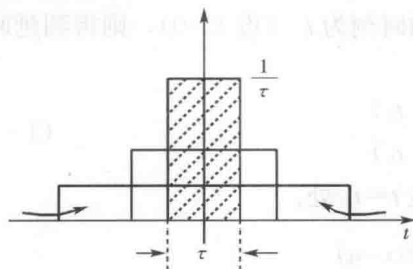


图 1-11 单位矩形脉冲

对于图 1-11,设想减小 τ 值,使 $\tau \rightarrow 0$, $1/\tau \rightarrow \infty$,即这时的矩形脉冲信号变化成为一个仅存在于 $0_- < t < 0_+$ 时间内的无限狭窄、幅高趋于无穷而其面积却恒等于 1 的特殊形状的信号。这个特殊形状的信号就是单位矩形脉冲信号的极限函数,也就是所要研究的单位冲激信号,即

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\epsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1-16)$$

波形如图 1-12 所示,它表明 δ 函数除在原点 (为无穷大) 以外均为零。箭头旁的 (1) 表示冲激强度,也就是单位矩形脉冲的面积。

如果描述任一点 $t=t_0$ 处所出现的冲激, 可有如下 $\delta(t-t_0)$ 在函数工程上的定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & (t \neq t_0) \\ \infty & (t = t_0) \end{cases} \quad (1-17)$$

称为延迟的单位冲激信号, 信号图形如图 1-13 所示。

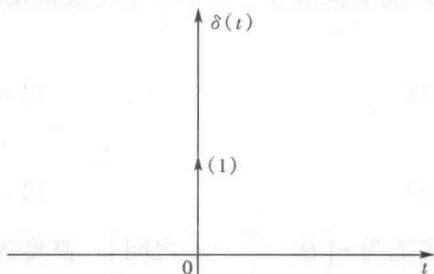


图 1-12 单位冲激信号

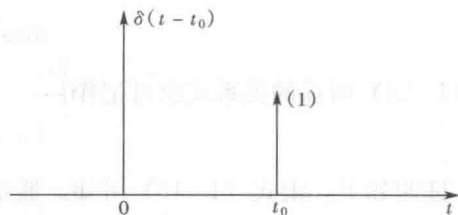


图 1-13 延迟的单位冲激信号

下面讨论 δ 函数的性质。

1. 筛选性质

对于任何在 origin 连续的函数 $f(t)$, 如果与单位冲激信号相乘, 则乘积仅在 $t=0$ 处得到 $f(0)\delta(t)$, 其余各点乘积均等于零, 即

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1-18)$$

类似地, 如果冲激出现在 $t=t_0$ 点, 而且 $f(t)$ 在 t_0 点连续, 则有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-19)$$

由式 (1-18) 和式 (1-19), 可以得到冲激信号的抽样特性 (或称“筛选”特性)。连续时间信号 $f(t)$ 与单位冲激信号 $\delta(t)$ 相乘并在 $-\infty \sim \infty$ 时间内积分, 可以得到 $f(t)$ 在 $t=0$ 点 (抽样时刻) 的函数值 $f(0)$, 即“筛选”出 $f(0)$ 。若将单位冲激信号移到 t_0 时刻, 则抽样值取 $f(t_0)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \quad (1-20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (1-21)$$

2. 偶函数特性

δ 函数是一偶函数, 满足

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-22)$$

证明如下:

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t) dt = f(0) \quad (1-23)$$

这里, 用到变量置换 $\tau=-t$ 。将所得结果与式 (1-20) 对照, 即可得出 $\delta(t)$ 与 $\delta(-t)$ 相等的结论。

3. 冲激函数与阶跃函数的关系

它们都是奇异函数, 它们之间具有内在的联系, 即

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad (1-24)$$

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1-25)$$

可见, 冲激函数与阶跃函数是互为积分与微分的关系。

4. 尺度变换特性

如果将自变量乘以常量 a , 则 $\delta(at)$ 称为 $\delta(t)$ 的尺度变换信号 (关于尺度变换将在后面讨论), 有

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1-26)$$

式 (1-26) 所示的关系式也可记作

$$|a| \delta(at) = \delta(t) \quad (1-27)$$

证明如下: 由式 (1-16) 可知, 假定矩形脉冲底宽为 τ (在 $-\frac{\tau}{2} \sim \frac{\tau}{2}$ 之间), 高度为 $\frac{1}{\tau}$, 在 $\tau \rightarrow 0$ 时即得 $\delta(t)$ 。现在若将自变量 t 经尺度变换为 at , 则其底宽变为 $\frac{\tau}{a}$ (在 $-\frac{\tau}{2a} \sim \frac{\tau}{2a}$ 之间), 于是冲激函数的面积应为 $\frac{1}{a}$, 即 $\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$ 。由于 δ 函数为偶函数, 因而对实系数取绝对值。显然证明过程很简单。

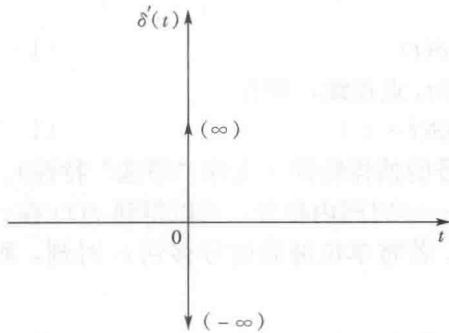


图 1-14 冲激偶信号

5. $\delta(t)$ 的导数

冲激函数的一阶导数可用 $\delta'(t)$ 表示, 称为冲激偶信号 (简称冲激偶), 亦称二次冲激信号, 如图 1-14 所示, 即

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (1-28)$$

$\delta'(t)$ 是奇函数, 满足关系式

$$\delta'(t) = -\delta'(-t) \quad (1-29)$$

$\delta'(t)$ 的抽样性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0) \quad (1-30)$$

式 (1-30) 表明, 任意信号 $f(t)$ [这里 $f'(t)$ 在 0 点连续] 与 $\delta'(t)$ 的乘积在 $-\infty < t < \infty$ 区间内积分, 恰是 $f'(t)$ 在 $t=0$ 瞬间的函数值的负值。

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d[\delta(t)] \\ &= f(t) \delta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f'(t) dt = -f'(0) \end{aligned}$$

【例 1-1】 计算下列各式:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t} \cos t \delta(t) dt;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \delta(t-2) dt;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-t} \delta(t+3) dt;$$

$$(4) \int_{-4}^2 e^{-t} \delta(t+3) dt;$$