约束力学系统的梯度表示（下）

Gradient Representations of Constrained Mechanical Systems

Volume Ⅱ

梅凤翔　吴惠彬　著

科学出版社

约束力学系统的梯度表示(下)

Gradient Representations of Constrained Mechanical Systems

Volume Ⅱ

梅凤翔　吴惠彬　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统全面地论述约束力学系统的梯度表示，下册包括约束力学系统与组合梯度系统、约束力学系统与广义梯度系统(Ⅰ)、约束力学系统与广义梯度系统(Ⅱ)，以及逆问题的提法和解法等。每章均有典型例题，并附有习题和参考文献。

本书可作为力学、数学等专业的学生和教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

约束力学系统的梯度表示. 下/梅凤翔，吴惠彬著. —北京：科学出版社，2016. 2

ISBN 978-7-03-047000-3

Ⅰ. ①约… Ⅱ. ①梅… ②吴… Ⅲ. ①约束力 Ⅳ. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 009789 号

责任编辑：刘信力 / 责任校对：钟 洋
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷 印张：20
字数：385 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

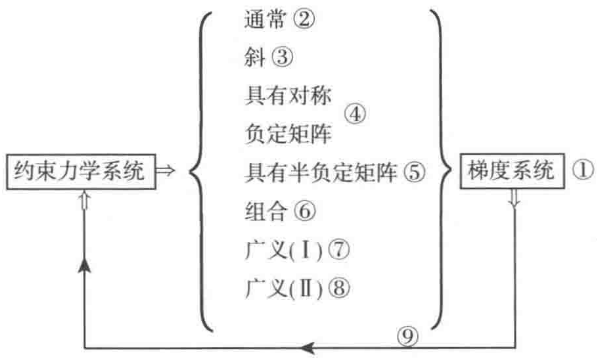
前　言

梯度系统是一类数学系统. 梯度系统的微分方程是一阶的, 其左端是变量的时间导数, 其右端是一矩阵与某函数梯度的乘积. 梯度系统特别适合研究稳定性. 本书的目的是将各类约束力学系统在一定条件下化成各类梯度系统, 并利用其性质来研究约束力学系统的稳定性.

全书共 9 章. 第 1 章梯度系统, 讨论各类梯度系统及其性质. 将梯度系统分成不含时间的通常梯度系统、斜梯度系统、具有对称负定矩阵的梯度系统、具有半负定矩阵的梯度系统、组合梯度系统, 以及包含时间的广义梯度系统 (Ⅰ) 和广义梯度系统 (Ⅱ). 第 2 章约束力学系统与通常梯度系统, 给出 Lagrange 系统、Hamilton 系统、广义坐标下一般完整系统、带附加项的 Hamilton 系统、准坐标下完整系统、相对运动动力学系统、变质量力学系统、事件空间中动力学系统、Chetaev 型非完整系统、非 Chetaev 型非完整系统、Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统、广义 Hamilton 系统等十三类约束力学系统成为通常梯度系统的条件, 并借助梯度系统来研究这些力学系统的积分和解的稳定性. 第 3 章约束力学系统与斜梯度系统, 给出十三类约束力学系统成为斜梯度系统的条件, 并利用斜梯度系统的性质来研究这些力学系统的积分和解的稳定性. 第 4 章约束力学系统与具有对称负定矩阵的梯度系统, 给出十三类约束力学系统成为这类梯度系统的条件, 并利用这类梯度系统的性质来研究这些力学系统的解及其稳定性. 第 5 章约束力学系统与具有半负定矩阵的梯度系统, 给出十三类约束力学系统成为这类梯度系统的条件, 并利用这类梯度系统的性质来研究这些力学系统的解及其稳定性. 第 6 章约束力学系统与组合梯度系统. 组合梯度系统是由前四类梯度系统两两组合而成的, 共六类. 本章给出十三类约束力学系统成为这六类组合梯度系统的条件, 并利用组合梯度系统的性质来研究这些力学系统的解及其稳定性. 第 7 章约束力学系统与广义梯度系统 (Ⅰ). 广义梯度系统 (Ⅰ) 是指矩阵不含时间而函数包含时间的梯度系统, 共十类. 本章给出十三类约束力学系统成为这十类广义梯度系统的条件, 并利用这些广义梯度系统的性质来研究这些力学系统的解及其稳定性. 第 8 章约束力学系统与广义梯度系统 (Ⅱ). 广义梯度系统 (Ⅱ) 是指矩阵和函数都包含时间的梯度系统, 共九类. 本章给出十三类约束力学系统成为这九类广义梯度系统的条件, 并利用这些广义梯度系统的性质来研究这些力学系统的解及其稳定性. 第 9 章逆问题. 将约束力学系统化成梯度系统, 称为正问题; 反之, 将梯度系统化成约束力学系统, 称为逆问题. 本章给出各类逆问题的提法和解法. 每章均有较多典型例题, 并附有习题和参

考文献.

本书内容的框架如下图



本书的基本工作是在国家自然科学基金项目 (10932002, 11272050) 的支持下完成的. 在本书写作过程中得到北京理工大学宇航学院和数学学院同事们的关心和支持. 对此一并表示感谢.

限于作者水平, 书中难免有疏漏, 敬请读者指正.

作　者

2015 年仲冬

目　录

第 6 章 约束力学系统与组合梯度系统

本章研究各类约束力学系统的组合梯度表示, 给出力学系统成为组合梯度系统的条件, 利用组合梯度系统的性质来研究力学系统的解及其稳定性.

6.1 组合梯度系统及其性质

本节将组合梯度系统分成六类, 给出六类组合梯度系统的方程及其性质.

6.1.1 组合梯度系统的微分方程

组合梯度系统是指, 将四类基本梯度系统: 通常梯度系统、斜梯度系统、具有对称负定矩阵的梯度系统, 以及具有半负定矩阵的梯度系统, 两两组合而成的梯度系统, 共有六类.

1) 组合梯度系统 I

由通常梯度系统与斜梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} + b_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{6.1.1}$$

其中 $b_{ij}(\boldsymbol{X}) = -b_{ji}(\boldsymbol{X})$.

2) 组合梯度系统 II

由通常梯度系统与具有对称负定矩阵的梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} + s_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{6.1.2}$$

其中 $(s_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为对称负定矩阵.

3) 组合梯度系统III

由通常梯度系统与具有半负定矩阵的梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} + a_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{6.1.3}$$

其中 $(a_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为半负定矩阵.

4) 组合梯度系统IV

由斜梯度系统与具有对称负定矩阵的梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i = b_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V((\boldsymbol{X}))}{\partial x_j} + s_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{6.1.4}$$

其中 $b_{ij}(\boldsymbol{X})=-b_{ji}(\boldsymbol{X}),(s_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为对称负定矩阵.

5) 组合梯度系统 V

由斜梯度系统与具有半负定矩阵的梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i=b_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j}+a_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,m)\tag{6.1.5}$$

其中 $b_{ij}(\boldsymbol{X})=-b_{ji}(\boldsymbol{X}),(a_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为半负定矩阵.

6) 组合梯度系统Ⅵ

由具有半负定矩阵与具有对称负定矩阵的梯度系统组合而成, 其微分方程为

$$\dot{x}_i=a_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j}+s_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(\boldsymbol{X})}{\partial x_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,m)\tag{6.1.6}$$

其中 $(a_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为半负定矩阵, 而 $(s_{ij}(\boldsymbol{X}))$ 为对称负定矩阵.

6.1.2　组合梯度系统的性质

组合梯度系统的矩阵, 或为对称负定的, 或为非对称负定的, 或为半负定的. 因此, 组合梯度系统更便于研究系统解的稳定性.

1) 组合梯度系统Ⅰ

组合后系统的矩阵是负定的. 按方程 (6.1.1) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}b_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}\tag{6.1.7}$$

它是负定的. 如果

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{6.1.8}$$

有解

$$x_i=x_{i0}\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{6.1.9}$$

且 V 在解的邻域内正定, 那么解 (6.1.9) 是渐近稳定的.

2) 组合梯度系统Ⅱ

组合后系统的矩阵是对称负定的. 按方程 (6.1.2) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}s_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\tag{6.1.10}$$

它是负定的. 因此, 如果 V 在解的邻域内正定, 那么解是渐近稳定的.

3) 组合梯度系统Ⅲ

组合后系统的矩阵是对称负定的或负定的. 按方程 (6.1.3) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\tag{6.1.11}$$

它是负定的. 因此, 如果 V 在解的邻域内正定, 那么解是渐近稳定的.

4) 组合梯度系统Ⅳ

组合后系统的矩阵是负定的. 按方程 (6.1.4) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} s_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial x_i} s_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{6.1.12}$$

它是负定的. 因此, 如果 V 在解的邻域内正定, 那么解是渐近稳定的.

5) 组合梯度系统Ⅴ

组合后系统的矩阵是半负定的. 按方程 (6.1.5) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial a^j} = \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{6.1.13}$$

它是半负定的. 因此, 如果 V 在解的邻域内正定, 那么解是稳定的.

6) 组合梯度系统Ⅵ

组合后系统的矩阵是对称负定的或负定的. 按方程 (6.1.6) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} s_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{6.1.14}$$

它是负定的. 因此, 如果 V 在解的邻域内正定, 那么解是渐近稳定的.

6.1.3 组合梯度系统的 2×2 矩阵简例

1) 组合梯度系统Ⅰ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.1.15}$$

它是负定的.

2) 组合梯度系统Ⅱ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{6.1.16}$$

它是对称负定的.

3) 组合梯度系统Ⅲ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.1.17}$$

它是对称负定的.

4) 组合梯度系统Ⅳ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.1.18}$$

它是负定的.

5) 组合梯度系统Ⅴ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.1.19}$$

它是半负定的.

6) 组合梯度系统Ⅵ

组合矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \tag{6.1.20}$$

它是负定的.

以上六例显示, 组合梯度系统的矩阵中有五类是负定的或对称负定的, 仅一类是半负定的.

6.2　Lagrange 系统与组合梯度系统

本节研究定常 Lagrange 系统的组合梯度表示, 给出系统成为组合梯度系统的条件, 利用组合梯度系统的性质来研究 Lagrange 系统的解及其稳定性.

6.2.1　系统的运动微分方程

研究定常双面理想完整系统, 其微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.2.1}$$

假设系统非奇异, 即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{6.2.2}$$

则由方程 (6.2.1) 可解出所有广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.2.3}$$