

高等学校教材

微积分 与数学模型

第三版 上册

主 编 贾晓峰

副主编 孙洪波 贾云涛

高等教育出版社

高等学校教材

微积分与数学模型

Weijifen yu Shuxue Moxing

第三版

上册

主 编 贾晓峰

副主编 孙洪波 贾云涛

编 委 何崇南

周海立

郑亚琴

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版荣获2002年全国普通高等学校优秀教材二等奖。本次修订对多处内容进行了较大改动,其中首先以突出逼近思想为目标改造多处微积分内容表述方式,把逼近作为微积分应用的基础加以强调,并辅以相关训练,进一步强化数学建模的内容。

全书分为上、下两册。上册内容包括函数。初等模型、极限与连续性、导数与微分、中值定理及利用导数研究函数性态、积分、积分模型及应用、函数逼近与无穷级数。书后附有常用平面曲线及其方程。

本书可作为高等学校非数学类专业高等数学课程的教材,也可供相关专业师生阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型. 上册 / 贾晓峰主编. -- 3版

. -- 北京: 高等教育出版社, 2015.9

ISBN 978-7-04-043502-3

I. ①微… II. ①贾… III. ①微积分—高等学校—教材②数学模型—高等学校—教材 IV. ①O172②O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第163591号

策划编辑 张长虹
插图绘制 尹文军

责任编辑 贾翠萍
责任校对 刘娟娟

封面设计 姜磊
责任印制 韩刚

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京汇林印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 27.75
字 数 500千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 1999年10月第1版
2015年9月第3版
印 次 2015年9月第1次印刷
定 价 43.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 43502-00

第三版前言

“学数学就是为了用数学”,对非数学类专业的学生而言,可以说是天经地义。然而现状并不乐观。许多已毕业的工科学生,对学微积分有什么用缺乏了解,当然更谈不上怎样用,以至于通过微积分(或高等数学)教学达到使学生“用微积分”的目标,成了困难然而又重要的课题。解决这一问题,正是本教材编写的初衷。

近年来,本书经多所高校使用,我们发现,一方面教材中不少内容仍需改进,另一方面,随着信息科学的迅猛发展和大学生数学建模活动的广泛开展,促使我们对非数学类专业微积分教学有了更清晰的认识。为了使教材能真正达到使学生“学以致用”的目标,我们将“启发应用意识,培养应用能力”作为宗旨,将提高教材的“易教易学易用”性作为目标,对本书进行了第二次修订。本次修订的基本思路为:在强调应用的基础上,改善对数学原理的叙述,提高其可读性和完整性;以突出逼近技术为目标改造(多处)微积分内容表述方式,并延续第一、二版的思路,在强调思想性与综合性的基础上模块式地融入数学建模内容。具体修订方案如下:

首先,对微积分理论内容本身进行改造和完善。这一工作基于下列看法:微积分之所以有用,主要基于其中包含了众多的“计算技术”,尤其是近似计算技术,这些技术本身就很重要,同时也是深入学习的基础。例如,微分和积分本身就是重要的计算技术,但在传统的“高等数学”教材中,对建立积分表达式不可或缺的微元法,却没有清晰的理论基础,微分作为“逼近”思想和逼近技术的基础,积分作为黎曼和的逼近,级数作为函数逼近等,都缺乏说明和引导。把逼近这个既体现为贯串微积分的思想方法同时也体现为具体而可操作的技术的内容,作为微积分应用的基础加以强调,并统领微积分中的众多应用算法,再辅以“易懂易做”的相关训练,就有希望在使逼近成为具体的计算技术而易于为学生掌握的同时,也加深学生对微积分理论的理解,使理论和应用两方面的教育互相促进,形成良性循环,使“会用微积分”成为学生可望可及的目标。为此,我们在教材修订中对相关概念的提法和叙述方式进行了较大程度的改造和完善,还修改和添加了针对逼近技术的习题和教学要求。我们认为,相关训练的重要性不亚于求导数和积分运算本身的练习(第三版适当降低了对导数和积分运算技巧

的要求)。

为进一步培养学生的应用意识和能力,我们保持本教材的一贯思路,“模块式”地嵌入数学建模内容。我们希望既能保证数学理论内容的循序渐进和系统性,也有利于由浅入深,相对集中地介绍数学建模的思想和方法,同时还有利于安排从易到难的数学建模实践训练。为改善微积分和数学建模两方面内容的衔接,我们也对微积分有关内容进行了调整和完善,例如改善微积分理论有关部分“说理不足”的缺陷,并为了强调微积分的应用,改变其说理的指向和重点等。

本教材前两版已承多所高校使用,并反馈给我们珍贵的修订意见,此次也希望同仁不吝赐教,以使本教材在培养和提高学生的微积分应用能力,进而在培养有创造力的应用型人才中发挥更好的作用。

编者

2015 年于珠海

第二版前言

本教材第一版出版八年来,正值全国大学生数学建模竞赛活动的日益普及和深入,将数学建模思想融入大学数学主干课程的教学改革思路已越来越深入人心,逐渐成为大学数学教学改革的重要方面。

我们于2003年承担教育部“新世纪高等教育教学改革工程本科教育教学改革立项项目”之一的“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”项目的子课题,本书的修订再版是这一课题的主要成果之一。

本次修订的宗旨,仍以强调数学理论与应用相结合,替代原《高等数学》教材为出发点,一方面坚持并改善原教材的部分内容,以提高可读性,并适当增添数学建模的例题和习题,另一方面,修改第一版的部分内容、习题以及错漏之处。修订工作仍由贾晓峰任主编,负责修订思路及审阅全书内容,同时承担“科学论文初步知识”及第六章部分内容的修订工作。上册由魏毅强任副主编,负责审阅上册内容,并承担编写第一、二章的内容。下册由王希云任副主编,负责审阅下册内容,并承担编写第十一、十二章的内容。另外由张海峰负责编写第四、九章的内容;侯红卫负责编写第三、十章的内容;李桂莲负责编写第五、六章的内容;张玲玲负责编写第七章的内容;赵文彬负责编写第八章及附录的内容。除以上人员外,还有戎文晋、郑婷兰参与了本书稿的校对。本教材承蒙多所高校使用并提出修改意见,在此表示感谢。修订中错漏之处在所难免,敬请指正。

编者

2007年11月

第一版前言

本书是我们承担高等学校工科数学课程教学指导委员会《微积分与数学模型》课程试点的改革教材,是用以替代原《高等数学》教材的.

近 20 年来,科学技术正发生着飞速进步,特别是电子计算机技术的高度发展和广泛普及,已经对社会的方方面面产生了深远的影响;另一方面,改革开放也使我国平稳地走向了全面的市场经济.这两方面的巨大变化,将推动我们迅速地进入“知识经济”时代.就数学而言,将越来越直接地服务于经济和科学技术的发展,“数学技术”也将越来越深入地被各行各业用于管理、控制、预测及探索经济及自然规律.

在这种形势下,高等学校非数学专业原来使用的《高等数学》教材已在诸多方面显示出了尖锐的不适应,改革势在必行.

《微积分与数学模型》课程改革的宗旨是在不降低原教材中对微积分知识要求的基础上,增添数学模型教学的内容和数学建模的实践环节,“启发应用意识、提高应用能力”,促进学生知识、能力和素质的融合.为此,我们对原教材中相应内容进行了增补和整理,改变原教材中只注重数学知识体系的脉络,而许多数学应用内容则显得支离破碎、难以总结规律或分量不足的缺点,强调了微积分本身的数学模型特征,并突出了微积分中数学模型的应用规律.另外,针对原教材中对改革要求的不适应,还作了以下三方面的改进:

1. 注重“说理”,即加强对数学原理的直观阐述.

原教材有重推理、不重说理的倾向,这对培养学生的数学思维能力和数学应用能力都是不利的.本书编写中注重了对这些问题的改进,强调了对知识背景及数学思维原理的介绍.

2. 强调近似公式及近似计算.

微积分的巨大威力很大程度上要借重于它给出的各种近似公式及近似算法.所以本书在编写中特别注意了对这类内容的强调和重视,这一点尤其在计算机使用日益广泛深入的情况下对提高学生数学应用能力很有利,也可以改变学生“解数学题就是求解析解或精确解”的片面观点.

3. 适当添加微积分的经济应用内容.

除了专用于经济类教材之外,原教材中均不包括经济应用方面的内容.事实

上,微积分在经济中的应用已越来越重要,添加经济应用内容不但对拓宽学生的应用基础是必要的,而且有利于加深学生对微积分本身意义的理解.

本教材可以有两种用法.当要求强调数学建模教学时,除了加强数学模型的教学外,每学期可增添两次数学建模作业,要求学生完成两篇数学建模论文,并以适当比例计入考试成绩,这是我们教学改革中的做法.当不要求强调数学建模教学时,这部分教学内容及实践环节可适当压缩.

本书用于专科教学时,可删去十二章全部及十一章部分内容.

本书编写分工情况如下:贾晓峰任主编,提出编写思路,与全体编者商定后拟订编写方案,并对全书进行统稿,具体编写部分为:第一章、第四章(不包括第三节、第四节)、第六章、第九章第八节、第十章第二节、第八节,并与范庆民合写附录中的科学论文初步知识;张明学编写第二章、第三章、第八章;石冰编写第七章、第十章第一节、第三节至第七节,并担任上册副主编;杨晋编写第五章、第九章前六节及附录中的积分表,并担任本书下册副主编;王玉民编写第十一章、第十二章及附录中的常用平面曲线及其方程;范庆民编写第四章第三节、第四节、第九章第七节、第九节及附录中的参考书目等.

本书也是我们参与原国家教委“面向 21 世纪高等工程教育教学内容和课程体系改革计划”中由我校矿业工程学院承担课题的改革教材.

本书在编写过程中还受到高等学校工科数学课程教学指导委员会副主任汪国强教授的指导和支持,受到复旦大学谭永基教授、清华大学姜启源教授、北京航空航天大学李心灿教授的支持,编者对他们致以衷心的感谢!

《微积分与数学模型》教材编写组

1999 年 6 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 函数·初等模型	1
第一节 常量与变量·函数关系	1
习题 1.1	6
第二节 函数的几种宏观特性	7
习题 1.2	12
第三节 初等函数	13
习题 1.3	27
第四节 初等数学模型	28
习题 1.4	36
第二章 极限与连续性	37
第一节 数列极限	37
习题 2.1	44
第二节 函数极限	45
习题 2.2	51
第三节 无穷小与无穷大	52
习题 2.3	55
第四节 极限的运算法则	56
习题 2.4	62
第五节 极限的存在准则·两个重要极限	63
习题 2.5	69
第六节 无穷小的比较	69
习题 2.6	71
第七节 函数的连续性	72
习题 2.7	78
第八节 连续函数的运算及其在闭区间上的性质	78
习题 2.8	84
第三章 导数与微分	86
第一节 变化率问题	86

习题 3.1	89
第二节 导数的概念	90
习题 3.2	96
第三节 函数和、差、积、商的求导法则	97
习题 3.3	102
第四节 反函数、复合函数求导法则·初等函数的导数	103
习题 3.4	110
第五节 高阶导数	111
习题 3.5	115
第六节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数·相关变化率	116
习题 3.6	125
第七节 函数的线性逼近和微分	127
习题 3.7	135
第四章 中值定理及利用导数研究函数性态	137
第一节 中值定理	137
习题 4.1	141
第二节 洛必达法则	143
习题 4.2	150
第三节 函数的单调区间与极值	151
习题 4.3	156
第四节 曲线的凹凸性与拐点	157
习题 4.4	163
第五节 多项式函数、有理函数及函数的终极性态	164
习题 4.5	170
第六节 近似公式	171
习题 4.6	180
第七节 曲率	181
习题 4.7	186
第八节 方程的近似解	186
习题 4.8	189
第九节 优化与微分模型	190
习题 4.9	197
第五章 积分	199
第一节 定积分的概念和性质	199

习题 5.1	214
第二节 微积分基本定理	215
习题 5.2	221
第三节 定积分的数值计算	222
习题 5.3	229
第四节 不定积分的概念与性质	230
习题 5.4	236
第五节 不定积分的计算	236
习题 5.5	257
第六节 定积分的计算	259
习题 5.6	267
第七节 广义积分	268
习题 5.7	274
第六章 积分模型及应用	276
第一节 微分元素法	276
习题 6.1	281
第二节 定积分的几何应用	281
习题 6.2	300
第三节 定积分的物理应用	302
习题 6.3	308
第四节 定积分在经济等领域的应用	309
习题 6.4	319
第七章 函数逼近与无穷级数	320
第一节 函数逼近	320
习题 7.1	323
第二节 泰勒公式	323
习题 7.2	329
第三节 常数项级数的基本概念和性质	329
习题 7.3	339
第四节 正项级数及其收敛性判定	340
习题 7.4	349
第五节 一般数项级数的敛散性	351
习题 7.5	359
第六节 幂级数	359

习题 7.6	371
第七节 函数展开成幂级数	372
习题 7.7	383
第八节 幂级数的简单应用	383
习题 7.8	391
*第九节 广义积分的审敛法 · Γ 函数	392
习题 7.9	400
第十节 傅里叶(Fourier)级数	400
习题 7.10	408
第十一节 正弦、余弦级数 · 一般区间上的傅里叶级数	408
习题 7.11	420
*第十二节 复数形式的傅里叶级数	420
习题 7.12	427
附录 常用平面曲线及其方程	428

第一章 函数·初等模型

第一节 常量与变量·函数关系

一、常量与变量

客观世界是发展、变化的.事物发展变化有两种状态,相对静止的状态与显著变化的状态.这两种状态表现在数量上就有常量与变量之分.具体讲,在我们考虑的范围和尺度上,保持一定数值不变的量称为**常量**,可以取不同值而变化的量叫**变量**.

例如,物理学中的“常数”就是常量,数学中的圆周率 π 也是常量,这些常量一般认为不随着时间和位置的变化而变化,所以被用作尺度或标准来度量或表示其他数量.还有的量只在我们考虑的一定范围内静止不变,例如两站之间铁路列车上的载客数量及行李总质量、重力加速度 g 等,这些都可以称为常量.但丰富多彩的客观世界和工程技术问题中,涉及的许多量都是不断变化的.例如:行驶的列车到前后两站的距离、列车的速度以及车上燃油存量都在不断改变.地球上同一地区的气温也在不断改变,股票交易所里的股票指数也永远是动荡不定的.这些我们都可以称为变量.

一般来说,常量和变量这两种概念是相对的.例如重力加速度 g ,在较粗略的情形下,我们可认为地球表面重力加速度是恒定不变的,但精确的测量表明,地表各地的重力加速度并不相等.又譬如在通常情况下,我们认为一个物品的尺度(如长度、面积、体积)和质量是不变的,但在很精确的测量中,这些量又随着环境、测量精度而改变.这些都说明常量与变量的概念是相对的.同一数量在不同问题中,既可能被当作常量,又可能被当作变量,要视问题的具体情形而定.

在本书中,我们常用 a, b, c 等字母表示常量,而用 x, y, z 等字母表示变量.

二、几个实例

在客观世界中,变量的变化都不是独立的,而是遵循一定规律相互关联的.不同变量间常常具有某种相关的数量关系.把这些数量关系用图形、表格或数学

式子来表示,就为我们更好地把握和深入研究它们提供了方便.为了说明这种关系,我们看几个实例:

例 1 在电子技术中,常会遇到各种波形的电信号.如图 1.1 是“锯齿波”中的一个波形,横坐标表示时间 t ,纵坐标表示电压 u .从图上知道,电压 u 随时间 t 变化,在区间 $0 \leq t \leq 30$ 中,每给定一个 t 值,都有一个确定的 u 值与它对应. u 和 t 的关系也可以用数学表达式表示:

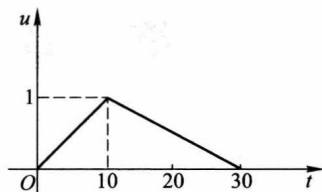


图 1.1

$$u = \begin{cases} \frac{1}{10}t, & 0 \leq t < 10 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{20}t, & 10 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

像例 1 这样在不同区间上有不同表达式的变量关系在工程及经济学中很常见.

例 2 由实验测出某地区大气中空气密度 ρ 随着海拔高度 h 的变化情况如表 1.1:

表 1.1

h (m)	0	500	1 000	1 500	2 000	3 000	4 000
ρ (kg/m ³)	1.22	1.17	1.11	1.06	1.01	0.91	0.82

表 1.1 反映了 ρ 与 h 的依赖关系.根据这个表,当 h 取表中某一值时,对应的 ρ 值也随之确定.反之,当 ρ 取表中某值时,对应的 h 值也随之确定.有一种在飞机上使用的高度计就是依照这一原理设计的.

例 3 图 1.2 是美国道·琼斯工业指数从 1976 年 12 月到 1977 年 3 月的变

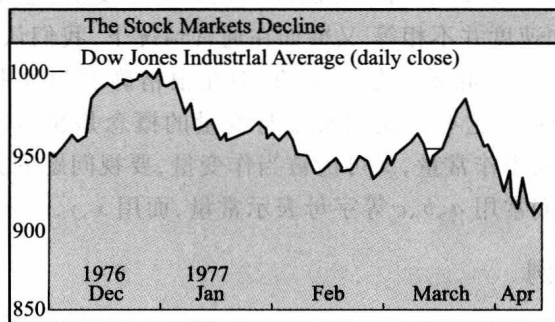


图 1.2

化情形.由此图可以看出在这段时间中,股票指数随时间的变化.

例 4 某企业的成本可分为两部分:一是不受业务量影响的部分(如设备折旧费等),称为**固定成本**;随业务量成正比例增长的另一部分称为**变动成本**.该企业年固定成本总额为 1 500 千元,产品单价为 10 千元,单位变动成本为 6 千元,若产品可以全部售出,且税率依 10% 计算,试求企业保本经营的最低产销量(或称**盈亏临界点**).

图 1.3 的横轴表示产品销售量,纵轴表示所发生费用.设产量为 x ,由图容易看出 $y_1 = 1\,500$ 为固定成本,企业总支出为

$$\begin{aligned} y_2 &= \text{固定成本} + \text{变动成本} + \text{税费} \\ &= 1\,500 + 6x + 10x \cdot 10\% \\ &= 7x + 1\,500 \end{aligned}$$

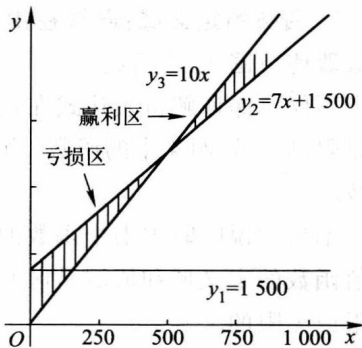


图 1.3

销售总收入为 $y_3 = 10x$,总支出线与总收入线在 $y_2 = y_3$ 即 $x = 500$ 处相交,所以 $x < 500$ 为亏损区, $x > 500$ 为赢利区, $x = 500$ 为盈亏临界点.

该问题用盈亏临界图分析有利于直观地看出产品成本、利润依赖于产销量的各种变化情形,所以在企业经济活动分析中有着广泛的应用.

三、函数的定义

以上各例中,撇开各个数量的实际意义,可以发现这些问题最基本的共同点是:问题涉及两个变量,两变量间有一个确定的依赖关系(即对应法则),虽然对应法则的表达方式不同(可以采用解析表达式、表格、图形等),但是,当其中一个变量在某一范围内取值时,另一变量按照对应法则就有确定的值与之对应.两个变量的这种对应关系实质上就是函数关系.下面给出函数的定义:

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y , D 是一个给定的非空数集, $x \in D$. 若对 D 中的每一个确定值 x , 变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

如果 $x_0 \in D$, 称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有定义, 并把 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 函数值的全体称为函数的值域, 记作 W , 即

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

关于函数, 还有下列几点值得注意:

1. 由函数的定义,可以看出构成函数的基本要素有两个:一是对应法则或称对应规律,二是定义域.

若两个函数的对应法则和定义域都相同,则两函数相等,否则不能认为它们是相同的函数.

2. 函数的定义域:通常在用解析式表示一个函数时,是使该式有意义的自变量取值范围.这是函数定义域的数学意义.但对有实际意义的问题,定义域的确定不仅要保证解析表达式在数学上有意义,还要依照问题的实际意义进一步加以限制.比如例4中的函数,当其自变量表示某月产销量时,就只能取非负的实数.

不另加说明时本书中函数的定义域均限制在实数范围内.实自变量的许多实值函数的定义域和值域是区间或区间的组合,区间可以是开、闭或半开的以及有限或无限的.

有限开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

有限闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

有限半开区间: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

无穷区间: $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

此处记号 $-\infty$, $+\infty$ 及 ∞ (无穷) 只是为了用起来方便,并不意味着是一个数.

3. 函数的对应法则可以由表格、图形、解析式来表示.在工程技术、经济活动中大量出现以表格形式表示的函数关系.在平面直角坐标系 Oxy 中,记

$$P = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

点集 P 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.以图形表示的函数关系由于最直观常常被使用.但由于解析表达式含义准确,且便于使用数学手段进行处理,对进行深入研究具有特别重要的意义,所以我们一般提到函数时,总假定它有一个解析表达式,可记为 $y = f(x)$, 其中“ f ”仅是函数对应关系的记号.另外 f 也可用其他字母表示,如用 g, φ, γ 等表示为: $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \gamma(x)$ 等,在同一问题中涉及几个不同函数时,需要用不同的函数记号加以区别.

4. 在函数定义域中,只说 y 总有确定的值与 x 对应,通常情形下,我们理解为 y 有唯一确定的值与 x 对应,这样的函数我们称为单值的.若对自变量 x 的同一