矢量分析与场论

河北科技大学理学院数学系 编

清华大学出版社

矢量分析与场论

河北科技大学理学院数学系 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据教育部高等院校矢量分析与场论课程的基本要求，依据工科数学《矢量分析与场论教学大纲》，并结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成. 内容选取以工科数学"必须、够用"为度，严密性次之，旨在培养工科学生的数学素养，提高应用数学工具解决实际问题的能力.

全书共分 3 章，包括：矢量分析，场论，拉普拉斯算子和哈密顿算子.

本书适用于高等院校工科各专业，尤其是通信、电子信息、应用物理、自动控制、测控、机械、材料成型等专业，也可供工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

矢量分析与场论/河北科技大学理学院数学系编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41317-2

Ⅰ. ①矢…　Ⅱ. ①河…　Ⅲ. ①矢量—分析 ②场论　Ⅳ. ①O183.1 ②O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 195613 号

责任编辑：陈　明
封面设计：张京京
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　编：**100084
社 总 机：010-62770175　**邮　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张：**6.25　**字　数：**120 千字
版　次：2015 年 9 月第 1 版　**印　次：**2015 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1～2500
定　价：15.00 元

产品编号：062945-01

前言

FOREWORD

矢量分析与场论为工程数学复变函数与积分变换的后继课程，也是电磁学的基础课程.本教材针对本科工科学生，本着“必须、够用”的原则编写，由于课时的限制，在内容上尽量简洁，在概念的阐述上力求做到深入浅出，突出基本结论和方法的运用，在保证知识体系完整性的基础上，避免了一些专业的推导过程，尽量做到教学过程简单易懂，结论形式易于运用，形成自己的特色.带“*”的部分为选读内容.

本书第1章由于向东编写，第2章1～5节由李海萍编写，第2章第6节、第3章由刘萍编写，全书由李海萍最后统稿.本书的编写得到了清华大学出版社的大力支持，河北科技大学理学院数学系全体任课教师也给予了很多帮助和指导，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，错漏在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编　者[①]

2015年4月

① E-mail：fdfj2000@126.com.

目录

CONTENTS

第1章

矢量分析

矢量分析是学习场论的基础知识.本章中,我们主要介绍矢量场理论基本知识:矢量运算及其微分、积分等.

1.1 矢量及其运算

大多数的量可分为两类:数量和矢量.

仅有大小的量称为**数量**.既有大小又有方向的量称为**矢量**.矢量 $\boldsymbol{A}$ 可写成

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A$$

其中 A 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的**模**或大小,$\boldsymbol{e}_A$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同方向上的单位矢量.矢量的大小称为**矢量的模**,单位矢量的模为1.矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向上的单位矢量可以表示为

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A}$$

矢量用黑体或带箭头的字母表示,单位矢量用 $\boldsymbol{e}$ 来表示.

作图时,我们用一有长度和方向的箭头表示矢量,如图1.1.1所示.如果两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 具有同样的大小和方向,则称它们是相等的.如果两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 具有同样的物理或几何意义,则它们具有同样的量纲,我们可以对矢量进行比较.如果一个矢量的大小为零,我们称其为零矢量或空矢量.这是唯一一个在图上不能用箭头表示的矢量.

我们也可以定义**面积矢量**.如果有一面积为 S 的平面,则面积矢量 $\boldsymbol{S}$ 的大小为 S,它的方向按右手螺旋法则确定,如图1.1.2所示.

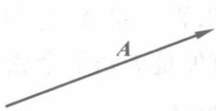

图1.1.1 矢量 $\boldsymbol{A}$

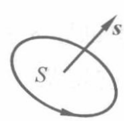

图1.1.2 面积矢量 $\boldsymbol{S}$

1.1.1 矢量的加法和减法

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可彼此相加，其结果为另一矢量 $\boldsymbol{C}$，矢量三角形或矢量四边形给出了两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加的规则，如图 1.1.3 所示.

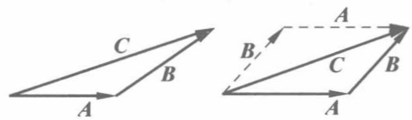

图 1.1.3 矢量加法：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

由此我们可得出：矢量加法服从加法交换律和加法结合律.

$$\text{交换律：}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$\text{结合律：}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 意味着一个矢量 $\boldsymbol{C}$ 可以由两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示，即矢量 $\boldsymbol{C}$ 可分解为两个分矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$（分量）. 也可以说，一个矢量可以分解为几个分矢量.

如果 $\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，则 $-\boldsymbol{B}$ 也是一个矢量. 它是与矢量 $\boldsymbol{B}$ 大小相等、方向相反的一个矢量. $-\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的**负矢量**. 因此，我们可以定义两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的减法 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{D}$ 也是一个矢量. 图 1.1.4 中给出了 $\boldsymbol{D}$ 的表示方法.

图 1.1.4 矢量减法：$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

1.1.2 矢量与数量的乘法

一数量 k 乘以矢量 $\boldsymbol{A}$，我们得到另一矢量

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}$$

矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的 $|k|$ 倍. 如果 $k>0$，矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向一样；如果 $k<0$，矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反. 如果 $k=0$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

1.1.3 数量积

两矢量的数量积也称为两矢量的**点积**或**内积**. 两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的数量积写为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，并读作“$\boldsymbol{A}$ 点乘 $\boldsymbol{B}$”. 它定义为两矢量的大小及两矢量夹角的余弦之积，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.1.1}$$

显然，数量积满足交换律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.1)是两矢量数量积的代数表达式.两矢量数量积的几何意义是：一矢量的大小乘以另一矢量在该矢量上投影的大小，如图 1.1.5 所示.

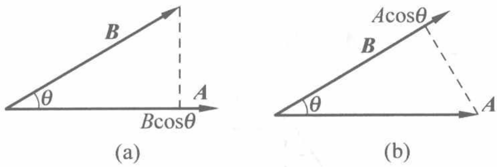

图 1.1.5 两矢量数量积

由此，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小可由下式得到

$$A^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1.3}$$

数量积服从分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1.4}$$

例 1.1.1 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成一三角形的三条边，$\boldsymbol{C}$ 边所对夹角为 θ. 利用矢量证明三角形的余弦定理

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

解 由图 1.1.6 可以得到

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$$

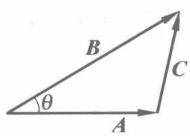

图 1.1.6 三矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成的三角形

由式(1.1.3)可得

$$C^2 = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

利用式(1.1.1)和式(1.1.2)，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) &= B^2 - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + A^2 \\ &= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta\end{aligned}$$

因此

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

1.1.4 矢量积

两矢量的矢量积也称为两矢量的**叉积**或**外积**. 两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积写为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，读作“$\boldsymbol{A}$ 叉乘 $\boldsymbol{B}$”. **矢量积**是一个矢量，它垂直于包含 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的平面，方向由右

手螺旋法则确定，如图 1.1.7 所示. $\boldsymbol{e}_{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 方向上的单位矢量，θ是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量间的夹角. 矢量积的大小定义为两矢量的大小及两矢量夹角的正弦之积，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_{\perp}AB\sin\theta$$

由图 1.1.7 可以得到

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

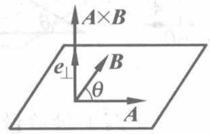

图 1.1.7　两矢量叉积

我们同样可以得到

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

两矢量 A、B 的叉积的几何意义：它是由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的平行四边形的面积矢量 $\boldsymbol{S}$，如图 1.1.8 所示.

平行四边形的面积矢量 $\boldsymbol{S}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

其大小为由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为邻边构成的平行四边形面积.

例 1.1.2　如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成一三角形的三条边，A、B、C 分别表示它们的长，如图 1.1.9 所示. 利用矢量证明三角形的正弦定理.

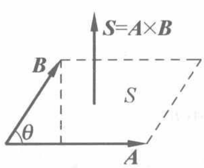

图 1.1.8　由矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的面积矢量 $\boldsymbol{S}$

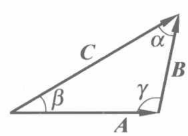

图 1.1.9　三矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成的三角形

解　由图 1.1.9 可知

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}$$

因为

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$$

由此得

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

或写成

$$BC\sin\alpha=BA\sin\gamma$$

由此得出

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

同样，我们可以得到

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}$$

因此，

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

1.1.5　三矢量积

三矢量积分为数量三重积和矢量三重积.

三矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的**数量三重积**是一数量，其表示为

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

若以 $\boldsymbol{e}_n$ 表示 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 方向上的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=C(AB\sin\theta)\cos\phi=ABC\sin\theta\cos\phi$$

其中，θ 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，ϕ 是 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 之间的夹角. 如果一平行六面体由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 构成，如图 1.1.10 所示，则它的体积就是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的数量三重积，这就是三矢量的三重数量积的几何意义.

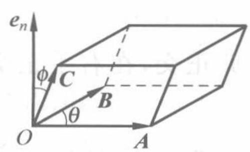

图 1.1.10　三矢量标量积

由图 1.1.10，我们可以得到一个重要等式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

三矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的**矢量三重积**是一矢量，其表示为 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. 利用前面介绍的矢量运算方法和矢量图形表示法，可以证明下面一个很有用的等式：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

明显地，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$. 因此，式中的括号不能省略.

1.2　坐标系

前面讨论了矢量运算的一般规则和图形表示. 从数学的角度上，当矢量分解为三个沿三个相互正交方向的分量时，运算是非常方便的. 本节中，我们将介绍曲线正交坐标系及最有用的三个正交坐标系：直角(笛卡儿)坐标系、柱坐标系和球坐标系.

1.2.1 曲线正交坐标系

电磁场定律和物理量并不随坐标变化.事实上,它们是通过坐标系来表达的.所选的坐标系应适合于给定问题的几何形状.

在三维空间中,一个点 P 的位置可由三个曲面的交点来确定.这三个曲面由 u_1=常数、u_2=常数、u_3=常数来表示.u_1、u_2 和 u_3 称为**坐标变量**.如果三个曲面相互正交,我们得到一个正交坐标系.

令 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 分别表示三维正交坐标系中指向 u_1、u_2 和 u_3 正位移方向的单位矢量,如图 1.2.1 所示.在 P 点,它们相应地分别垂直 u_1=常数、u_2=常数、u_3=常数构成的曲面.由变量 u_1、u_2 和 u_3 组成,且其相应单位矢量相互垂直的坐标系称为**正交曲线坐标系**.

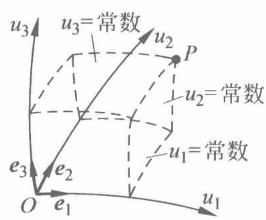

图 1.2.1 曲线坐标系

由于三个曲面在空间各点彼此正交,在右手正交坐标系中,三个单位矢量的关系为

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

及

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

其中

$$i,j = 1,2,3 \text{ 及 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

因此,在三维正交坐标系(u_1,u_2,u_3)中,空间某点的矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表达为

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

其中 A_1,A_2,A_3 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在该点沿相应坐标曲线上的分量(简称**坐标分量**).

在矢量分析中,我们常需要进行线、面、体的积分运算.这些积分都需要微分元.然而,有些坐标变量并不一定是长度.例如,稍后介绍的柱坐标中的坐标变量 φ,球坐标中的坐标变量 θ 和 φ,它们都表示角度.因此,我们需要有一个变换因子,将不表示

长度的微分元 $\mathrm{d}u_i$ 转变为相应坐标变量方向的微分长度元 $\mathrm{d}l_i$. 因此,微分长度元可写成

$$\mathrm{d}l_i = h_i \mathrm{d}u_i, \quad i = 1,2,3$$

其中 h_i 称为**度规系数**,它可能是 u_1, u_2, u_3 的函数. 例如,二维极坐标中 $(u_1, u_2) = (r, \varphi)$,沿 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的微分长度元 $\mathrm{d}l_2 = r\mathrm{d}\varphi(h_2 = r = u_2)$ 是对应于坐标变量 φ 的微分元 $\mathrm{d}\varphi(=\mathrm{d}u_2)$. 由此,在曲线正交坐标系中,一个有向微分线元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}l_1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}l_2\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_3$$

可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3$$

同样,在 $u_1 =$ 常数的曲面上,大小为 $\mathrm{d}S_1$ 的有向面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_1 = h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_1$$

同理,在 $u_2 =$ 常数和 $u_3 =$ 常数的曲面上,大小为 $\mathrm{d}S_2$ 和 $\mathrm{d}S_3$ 的有向面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3$ 分别表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_2 = h_1h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3 = \mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\boldsymbol{e}_3 = h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_3$$

因此,空间中一个有向微分面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\boldsymbol{e}_3 \\ &= h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_1 + h_1h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_2 + h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

空间中的体积元 $\mathrm{d}V$ 可表示为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

在正交曲线坐标系中,两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\end{aligned}$$

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3)\times(B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

同理可以得到

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

事实上,有许多正交坐标系,但最常用的是三个正交坐标系:直角(笛卡儿)坐标系、柱坐标系和球坐标系. 下面一一介绍.

1.2.2 直角坐标系

直角坐标系由三条相互正交的直线构成，这三条直线分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$. 因坐标变量微元已是长度微元，因此直角坐标系度规系数是

$$(h_1, h_2, h_3) = (1, 1, 1)$$

这些轴的交点是原点，三个坐标变量的范围是从 $-\infty \sim \infty$. 相应的单位方向矢量是 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$，它们分别在 x 轴、y 轴、z 轴的方向. 三个单位矢量的关系为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

空间中一给定点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三个面 $x = x_0$，$y = y_0$，$z = z_0$ 的交点，如图 1.2.2 所示.

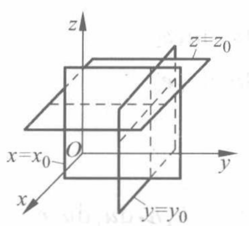

图 1.2.2 直角坐标系

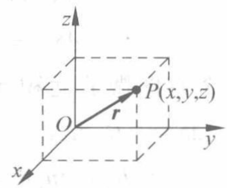

图 1.2.3 位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的投影

P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$，它是由坐标原点 O 指向 P 点的矢量，如图 1.2.3 所示. 利用其坐标分量可以表达为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表达为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积表示为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积表示为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

数量三重积表示为

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

在直角坐标系中,有向微线元 d$\boldsymbol{l}$ 可表达为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$$

有向微面元d$\boldsymbol{S}$可表达为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_z$$

体积微元可表达为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1.2.3　柱坐标系

柱坐标系由一个柱面、一个半无限大平面和一个无限大平面构成. 坐标变量半径 r,角度 ϕ 和高 z 如图 1.2.4 所示,$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$. 其相应的取值范围分别为

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

相应的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$,其正方向分别为 r、ϕ、z 增加的方向. 在柱坐标中,$\boldsymbol{e}_z$ 是一个常矢量. $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 在空间各点方向不一定一样,因此 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 是变矢量. 给定空间中的某点 $P(r_0, \phi_0, z_0)$ 是三个面的交点,如图 1.2.4 所示.

由于 dr 和 dz 是长度元,因此它们的度规系数为 $h_1 = h_3 = 1$. ϕ 是角度,我们需要一个度规系数 h_2 将 dϕ(du_2)转换成沿坐标变量 ϕ 增加方向上的长度微分元 dl_2. 由图 1.2.5,d$l_2 = r$dϕ,我们得到 $h_2 = r$. 因此,柱坐标系的度规系数是

$$(h_1, h_2, h_3) = (1, r, 1)$$

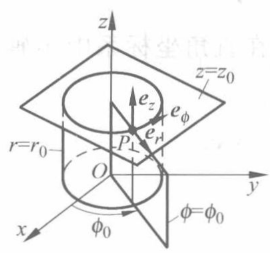

图 1.2.4　柱坐标系

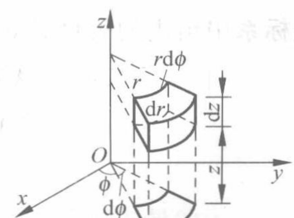

图 1.2.5　柱坐标中的微分体积元

在柱坐标系中,矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z$$

有向长度微元 d$\boldsymbol{l}$、有向面积微元 d$\boldsymbol{S}$ 和体积元 dV 分别表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_r + \mathrm{d}r\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_\phi + r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_z$$

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

如图 1.2.6 所示,我们得到

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_r = \cos\phi, \quad \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi$$

$$\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_r = \sin\phi, \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_\phi = \cos\phi$$

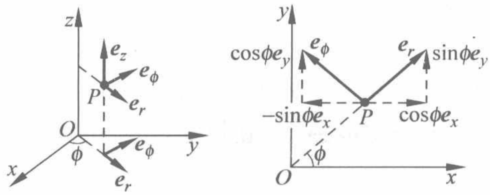

图 1.2.6 各单位矢量在点 $\boldsymbol{P}$ 的方向和分量

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \cos\phi \boldsymbol{e}_x + \sin\phi \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi \boldsymbol{e}_x + \cos\phi \boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

由此,我们得到直角坐标和柱坐标之间单位矢量的变换关系:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}$$

其逆变换为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}$$

在柱坐标系中给出的矢量 $A_r\boldsymbol{e}_r + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z$,其在直角坐标系中 x 轴分量为

$$\begin{aligned} A_x &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_x \\ &= (A_r\boldsymbol{e}_r + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{e}_x \\ &= A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned} A_y &= A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned}$$

上面结果写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

其逆变换:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

例 1.2.1　在柱坐标中，给定点 $P\left(2,\frac{\pi}{6},3\right)$ 的矢量 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{e}_r+2\boldsymbol{e}_\phi+\boldsymbol{e}_z$，给定点 $Q\left(4,\frac{\pi}{3},5\right)$ 的矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\phi-\boldsymbol{e}_z$，求出在给定点 $S\left(6,\frac{\pi}{4},7\right)$ 的矢量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解　单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向在空间各点并不一样. 因此，不能将两矢量直接相加. 为方便，我们将其转换到直角坐标系中计算.

由式(1.2.1)，在点 $P\left(2,\frac{\pi}{6},3\right)$ 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ & 0\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.73\\2.73\\1\end{bmatrix}$$

同样地，对于矢量 $\boldsymbol{B}$ 有

$$\begin{bmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ & 0\\ \sin60^\circ & \mathrm{con}60^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.37\\1.87\\-1\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=1.10\boldsymbol{e}_x+4.60\boldsymbol{e}_y$$

由式(1.2.2)，我们再将矢量 $\boldsymbol{C}$ 转换成在柱坐标系中点 $S\left(6,\frac{\pi}{4},7\right)$ 的表达式

$$\begin{bmatrix}C_r\\C_\phi\\C_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos45^\circ & \sin45^\circ & 0\\ -\sin45^\circ & \cos45^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.10\\4.60\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.03\\2.47\\0\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{C}=4.03\boldsymbol{e}_r+2.47\boldsymbol{e}_\phi$$

这里要注意的是，一个矢量在坐标系转换时，并不改变矢量的大小和方向.

1.2.4　球坐标系

球坐标系是由一个球面、一个锥面和一个半无限大的平面构成. 在球坐标系中，三个坐标变量是半径 r、角度 θ 和 ϕ，$(u_1,u_2,u_3)=(r,\theta,\phi)$，如图 1.2.7 所示. 其域值范围为

$$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$$

在点 P，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向分别是 r、θ 和 ϕ 增加方向. 显然，这三个单位矢量都是变矢量. 对于空间中的给定点 $P(r_0,\theta_0,\phi_0)$，它是三个面 $r=r_0$、$\theta=\theta_0$、$\phi=\phi_0$ 的交点，如图 1.2.7 所示.

由于 $\mathrm{d}r$ 已是一长度微元，因此 $h_1=1$. 而坐标变量 θ 和 ϕ 是角度，我们需要度规系数 h_2，h_3 将 $\mathrm{d}\theta(\mathrm{d}u_2)$ 和 $\mathrm{d}\phi(\mathrm{d}u_3)$ 转换为沿坐标变量 θ 和 ϕ 增加方向的长度元 $\mathrm{d}l_2$ 和