幼儿园教师进修教材

数学·下册

上海教育出版社

幼儿园教师进修教材

数　　学

下　　册

华东七省市、四川省幼儿园教师进修教材编写委员会　编

上海教育出版社

幼儿园教师进修教材

数　学

下　册

华东七省市、四川省幼儿园教师进修教材编写委员会　编

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　　上海崇明印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张7.5　字数162,000

1987年6月第1版　　1997年2月第10次印刷

印数234811—260830本

ISBN7-5320-0213-6/G·194　　定价：5.50元

编写说明

一、本套幼儿园教师进修教材是在华东七省市和四川省教育行政部门领导下，根据八个省市共同制定的《幼儿园教师进修幼儿师范教学计划》和教学大纲的要求编写的，供已达到初中毕业水平的幼儿园教师进修幼儿师范课程使用．这套教材既可作函授和二年制脱产进修班的教材，也可供学员自学或作幼教职业班的教材．

二、本套教材在保证内容思想性、科学性和系统性的同时，注意从成人、在职、业余进修的特点和幼儿园教学实际出发，贯彻少而精，理论与实际相结合，面向幼儿园的原则，并考虑到适应幼儿园教师各种进修形式的需要．

三、《数学》（下册）是本套教材的一种，由上海市和安徽省幼儿园教师进修教材编写组编写．

华东七省市、四川省幼儿园

教师进修教材编写委员会

1987年3月

目　录

第七章　排列、组合和概率初步

排列、组合与概率在工农业生产和科学技术中有着广泛的应用，初等教育工作者学习一些这方面的数学知识是相当必要的.

本章我们将学习有关排列、组合与概率的初步知识，其中包括两个基本原理，排列、组合概念，排列、组合数公式，概率的定义以及等可能事件、互斥事件与相互独立事件的概率的计算.

一　排列与组合

7.1　基本原理

我们先看下面的问题：

从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车或轮船. 而每天从甲地开往乙地有4班火车，2班汽车，3班轮船. 问一天中从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

因为一天中从甲地到乙地共有4班火车，所以乘火车有4种走法. 同样，乘汽车有2种走法，乘轮船有3种走法. 因此，从甲地到乙地共有

$$4+2+3=9$$

种不同的走法.

一般地，有如下的原理：

加法原理　设完成一种事有 n 类办法，在第一类办法中

有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，只要选择任何一类办法中的一种方法，这件事就可以完成，那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

我们再看下面的问题：

如果从 A 幼儿园去 B 幼儿园的道路有 3 条，从 B 幼儿园去 C 幼儿园的道路有 2 条（图 7.1），从 A 幼儿园经 B 幼儿园去 C 幼儿园，共有多少种不同的走法？

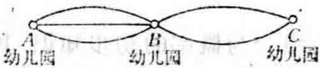


图 7.1

因为从 A 幼儿园到 B 幼儿园有 3 种走法，按这 3 种走法的每一种走法到达 B 幼儿园以后，再从 B 幼儿园到 C 幼儿园又有 2 种走法. 因此，从 A 幼儿园经 B 幼儿园去 C 幼儿园，共有

$$3\times2=6$$

种不同的走法.

一般地，有如下的原理：

乘法原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，只有每一步都完成，这件事才完成. 因此完成这件事共有

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$$

种不同的方法.

例 (1) 某工厂的车工和铣工都可以生产出某件产品. 这个工厂有车工 20 人，铣工 15 人，由不同的工人一个人完成这件产品的生产，共有多少种方法？

(2) 某件产品的生产有两道工序. 做第一道工序有20人, 做第二道工序有15人, 完成这件产品的生产可以有多少种不同的方法?

解 (1) 完成产品的生产方案有两种(车工与铣工), 每一个车工或铣工都可以独立完成产品的生产, 由加法原理, 完成这件产品的生产共有

$$20+15=35$$

种方法.

(2) 完成产品的生产步骤有两个(两道工序), 只有这两个步骤都完成, 产品才算完成. 由乘法原理, 完成这件产品的生产共有

$$20\times 15=300$$

种方法.

练 习

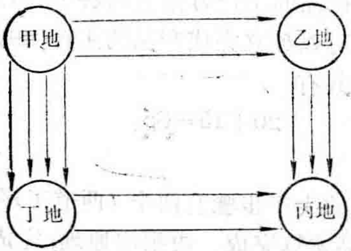
1. 一项工作可以用两种不同方法完成. 有5个人会用第一种方法完成, 另有4个人会用第二种方法完成. 任选一个人完成这项工作, 可以有多少种选法?

2. 从2个数学教师、3个语文教师、2个体育教师中推选一个代表去开会, 有多少种不同的选法?

3. 一儿童做加法游戏. 在一个红口袋中装着20张分别标有数目1, 2, …, 19, 20的红卡片, 从中任抽一张, 把这个数作为被加数; 在另一个黄口袋中装着10张分别标有数目1, 2, …, 9, 10的黄卡片, 从中任抽一张, 把这个数作为加数, 这个儿童一共可以列出多少个加法式子?

4. 乘积$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$展开后共有多少项?

5. 如图，从甲地到乙地有2条路可通，从乙地到丙地有3条路可通；从甲地到丁地有4条路可通，从丁地到丙地有2条路可通．从甲地到丙地共有多少种不同的走法？



（第5题图）

6. 有5个小电灯排成一排，每个小电灯有亮和不亮两种状况，总共可以表示多少种不同的信号？

7.2 排列

我们看下面的问题：

1．北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线，需要准备多少种不同的飞机票？

因为任何一种飞机票上总是相应地排列着两个站名（起点站排在前，终点站排在后），因此，求三站需要准备多少种飞机票的问题，就是求在三站中每次取出两站，按照起点站在前，终点站在后的顺序排列，一共有多少种不同的排列的问题．

首先确定起点站，在三站中，任选一个站为起点站，有3种方法；其次确定终点站，当选定起点站后，终点站就只能在其余的两个站中去选，因此，有2种方法．那么，根据乘法原理，在三个站中，每次取两个，按起点站在前、终点站在后的顺

序排列的不同方法共有

$$3\times2=6$$

种．也就是说，需要准备如下 6 种不同的飞机票：

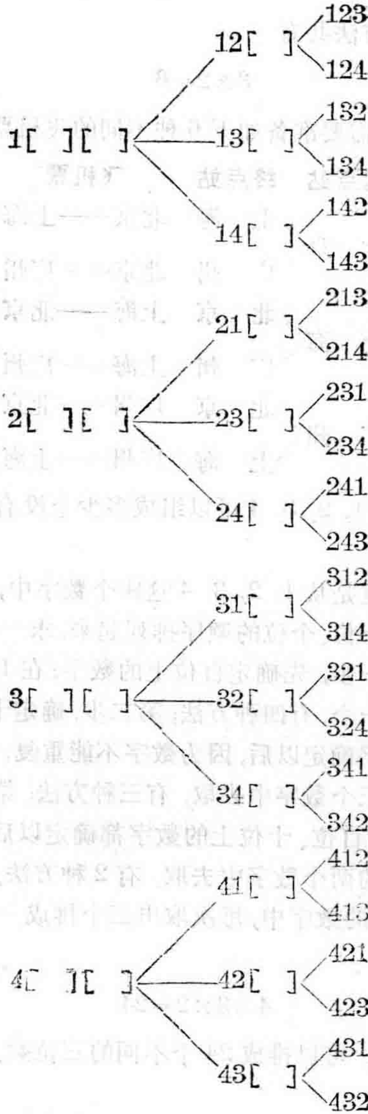
起点站	终点站	飞机票
北　京	上　海	北京——上海
	广　州	北京——广州
上　海	北　京	上海——北京
	广　州	上海——广州
广　州	北　京	广州——北京
	上　海	广州——上海

2．由数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

这个问题就是从 1, 2, 3, 4 这四个数字中，每次取出三个，按照百位、十位、个位的顺序排列起来，求一共有多少种不同的排法．第一步，先确定百位上的数字，在 1, 2, 3, 4 这四个数字中任取一个，有四种方法；第二步，确定十位上的数字，当百位上的数字确定以后，因为数字不能重复，十位上的数字只能从余下的三个数字中去取，有三种方法；第三步，确定个位上的数字，当百位、十位上的数字都确定以后，个位上的数字只能从余下的两个数字中去取，有 2 种方法．根据乘法原理，从四个不同的数字中，每次取出三个排成一个三位数的方法共有

$$4\times3\times2=24$$

种．也就是说，可以排成 24 个不同的三位数．具体排法如下：


1[ ][ ]
12[ ]
123
124
13[ ]
132
134
14[ ]
142
143
2[ ][ ]
21[ ]
213
214
23[ ]
231
234
24[ ]
241
243
3[ ][ ]
31[ ]
312
314
32[ ]
321
324
34[ ]
341
342
4[ ][ ]
41[ ]
412
413
42[ ]
421
423
43[ ]
431
432

我们把被取的对象(如上面问题中的民航站、数字)叫做**元素**. 上面第一个问题,就是从3个不同的元素中,任取2个,然后按一定的顺序排成一列,求一共有多少种不同的排法;第二个问题,就是从4个不同的元素中,任取3个,然后按一定的顺序排成一列,求一共有多少种不同的排法.

一般地说,**从n个不同元素中,任取m($m\leqslant n$)个**(在本章中,只研究被取出的元素各不相同的情况),**按照一定的顺序排成一列,叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列.**

从排列的定义知道,两个排列相同,不仅指这两个排列的元素必须完全相同,而且排列的顺序也必须完全相同. 如果所取的元素不完全相同,它们是两个不同的排列. 即使所取的元素完全相同,但排列顺序不同,也不是相同的排列. 如问题2中的三位数"213"和"231",虽然它们的元素相同,但排列顺序不同,也是两个不同的排列.

7.3 排列数公式

按照排列的定义,我们就可以把某种问题的所有的排列都写出来. 能写出多少个排列,也就表示排列的个数是多少. 但在许多实际问题中,当n和m都比较大时,要把所有不同的排列都写出来是相当困难的. 例如,从11个不同元素中,取出10个元素的所有不同排列的个数是39,916,800种. 这么多的排列,在短时间内不可能把它们都写出来. 因此,对许多实际问题来说,一般只需求出所有排列的个数就可以了.

从n个不同元素中取出m($m\leqslant n$)个元素的所有排列的个数,叫做**从n个不同元素中取出m个元素的排列数**,用符号P_n^m表示.

例如,从5个不同元素中取出2个元素的排列数表示为P_5^2;从5个不同元素中取出3个元素的排列数表示为P_5^3;等

等.

排列数 P_5^2 计算如下：因为在每一种排列里都有两个元素，把这两个元素所排列的位置划分为第一位、第二位. 第一位可以从5个元素中任取一个，有5种方法；第二位只能从余下的(5-1)个元素中任意取一个，有(5-1)种方法(图7.2). 所以

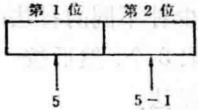


图 7.2

$$P_5^2=5\times4=20,$$

即有20种不同的排法.

排列数 P_5^3 计算如下：因为在每一种排列里都有3个元素，把这3个元素所排列的位置划分为第一位、第二位、第三位. 第一位可以从5个元素里任取一个，有5种方法；第二位可以从余下的(5-1)个元素里任取一个，有(5-1)种方法；第三位只能从余下的(5-2)个元素里任取一个，有(5-2)种方法(图7.3).

图 7.3

所以 $$P_5^3=5\times4\times3=60,$$

即有60种不同的排法.

类似地，我们可以得到

$$P_5^4=5\times4\times3\times2=120,$$

等等.

观察上面几个式子可以看出：所求的排列数是若干个连续自然数的乘积，乘积中最大的一个因数就是所给元素的个数，乘积中因数的个数等于排列中含有的元素的个数. 例如，求 P_8^4，它是4个连续自然数的乘积，最大的一个是8，于是得到 $P_8^4=8\times7\times6\times5=1680$.

我们完全可以用类似于上面的方法来求排列数 P_n^m：假定

有排好顺序的m个空位(图 7.4). 从n个不同元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$中, 任意取m个元素去填空, 一个空位填一个元素, 每一种填法就得到一个排列; 反过来, 任何一个排列总可以由一种填法得到, 因此, 所有不同填法的种数就是排列数P_n^m.

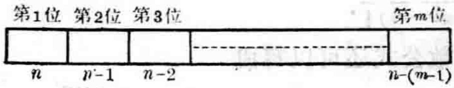


图 7.4

现在我们来计算共有多少种不同的填法. 如图7.4, 第一位从n个元素中, 任取一个填上, 共有n种填法; 第二位只能从余下的$n-1$个元素中, 任取一个填上, 共有$n-1$种填法; 依此类推, 当前面的$m-1$个空位都填上后, 第m位只能从余下的$n-(m-1)$个元素中, 任取一个填上, 共有$(n-m+1)$种填法. m个位置全部填完, 排列完成. 根据乘法原理, 全部填满m个空位共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

种填法. 所以得到公式

$$\boldsymbol{P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}.$$

这里n, m是自然数, 并且$m \leqslant n$. 这个公式叫做**排列数公式.**

特别地, 在排列数公式中, 当$m=n$时, 有

$$\boldsymbol{P_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

这个公式指出, n个不同元素全部取出的排列数, 等于自然数1到n的连乘积. n个不同元素全部取出的排列, 叫做n个不同元素的**全排列**. 自然数1到n的连乘积, 叫做n的**阶乘**, 用$\boldsymbol{n!}$表示. 所以n个不同元素的全排列数公式可以写成

$$\boldsymbol{P_n^n = n!}.$$

排列数公式可作如下变形：

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

因此，排列数公式还可以写成

$$\boldsymbol{P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}}.$$

注意　为了使这个公式在 $m=n$ 时也能成立，我们规定

$$0!=1.$$

例 1　计算 $P_8^4-2P_8^3$, P_{n+2}^3, P_6^6.

解　$P_8^4-2P_8^3=8\times7\times6\times5-2\times8\times7\times6$

$=8\times7\times6\times(5-2)=1008$;

$P_{n+2}^3=(n+2)(n+1)n$;

$P_6^6=6!=720$.

例 2　求证　$\dfrac{1}{P_n^n}+\dfrac{1}{P_{n-1}^{n-1}}=\dfrac{n+1}{P_n^n}$.

证明　$\dfrac{1}{P_n^n}+\dfrac{1}{P_{n-1}^{n-1}}=\dfrac{1}{P_n^n}+\dfrac{n}{P_n^n}=\dfrac{n+1}{P_n^n}$.

例 3　某信号兵用红、黄、蓝三面旗子从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以任挂一面，二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

解　用一面旗作信号有 P_3^1 种，用两面旗作信号有 P_3^2 种，用三面旗作信号有 P_3^3 种．根据加法原理，所求的信号种数是

$$P_3^1+P_3^2+P_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15(\text{种}).$$

答：一共可以表示 15 种不同的信号．

例 4　由 0, 1, 3, 5, 7, 9 六个数字可以组成多少个没有

重复数字的三位数?

解一 分两步来取．先取百位上的数字，因为百位上的数字不能为0，所以从0以外的其它5个数字中每次取一个，共有5种选法；再取十位和个位上的数字，当百位数字选定后，十位和个位上数字的选法，应从余下的5个数字中选2个，共有P_5^2种选法．根据乘法原理，所求的三位数有

$$5P_5^2=100(\text{个}).$$

解二 从六个不同的数字里，每次取出3个数字的排列种数是P_6^3．在这些排列里扣除以0为首的(有P_5^2种)，即为符合要求的三位数．因此，所求的三位数有

$$P_6^3-P_5^2=100(\text{个}).$$

这种解法的特点是：先不考虑"限制条件"，求出所有的排列种数，再区分符合条件的和不符合条件的两种情形，求出不符合条件的排列种数．根据加法原理，就可以间接地求出合乎条件的排列种数了．

练　习

1. 判断下列问题哪些属于排列问题(不必计算)：

(1) 从三个连续的自然数里每次取出两个相加，最多可以得到几个不同的和；

(2) 从三个不等差的自然数里每次取出两个相减，最多可以得到几个不同的差；

(3) 从三个连续的自然数里每次取出两个相乘，最多可以得到几个不同的积；

(4) 从三个连续的自然数里每次取出两个相除，最多可以得到几个不同的商；

(5) 从一个班级的45位同学中选出两位同学分别担任