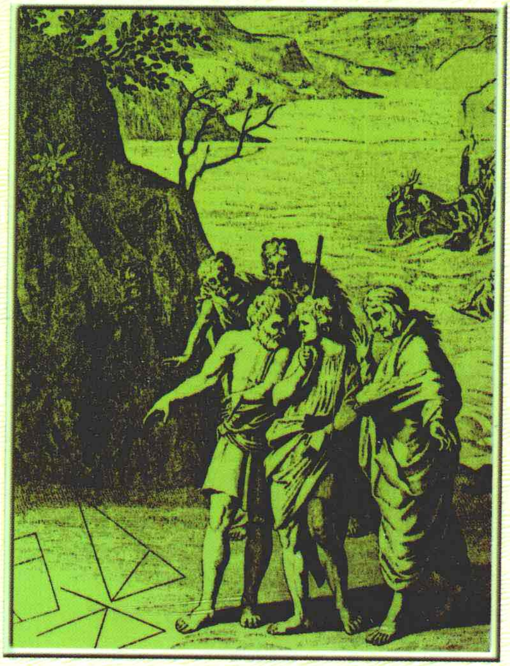
《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

哈密尔顿-凯莱定理

——从一道高中数学联赛试题的解法谈起

佩捷 梅根 编



◎ 3 个美国大学生和博士生遇到的问题

◎ 矩阵在相似变换下的 Jordan 标准形

◎ 非线性最优化中的一个特征问题

◎ 四元数的创立者——哈密尔顿

◎ 哈密尔顿-凯莱定理的另一证法

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

哈密尔顿－凯莱定理

——从一道高中数学联赛试题的解法谈起

佩捷　梅根　编

◎3个美国大学生和博士生遇到的问题

◎矩阵在相似变换下的Jordan标准形

◎非线性最优化中的一个特征问题

◎四元数的创立者——哈密尔顿

◎哈密尔顿－凯莱定理的另一证法

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道高中数学联赛试题的解法谈起，详细介绍了哈密尔顿-凯莱定理的相关知识. 全书共分为五章，分别为：引言、基础篇、应用篇、人物篇与进一步的讨论.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

哈密尔顿-凯莱定理：从一道高中数学联赛试题的解法谈起/佩捷，梅根编. — 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.9

(小问题大定理丛书)

ISBN 978-7-5603-4850-6

Ⅰ.①哈… Ⅱ.①佩… ②梅… Ⅲ.①矩阵 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 175121 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　单秀芹
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 9.5　字数 100 千字
版　　次　2014 年 9 月第 1 版　2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4850-6
定　　价　18.00 元

◎目录

第1章 引言

1.1 一个高中联赛试题的两个初等解法

设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_0=1,b_0=0$且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}(n=0,1,2,\cdots)$$

证明：$a_n(n=0,1,2,\cdots)$是完全平方数.(2000年全国高中联赛)

证法一 由假设得$a_1=4,b_1=4$且当$n\geqslant 1$时

$$\begin{aligned}&(2a_{n+1}-1)+\sqrt{3}b_{n+1}\\ =&(14a_n+12b_n-7)+\sqrt{3}(8a_n+7b_n-4)\\ =&[(2a_n-1)+\sqrt{3}b_n](7+4\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2a_n-1)+\sqrt{3}b_n\\ =&(7+4\sqrt{3})^{n-1}(2a_1-1+\sqrt{3}b_1)\\ =&(7+4\sqrt{3})^n\end{aligned}$$

同理

$$(2a_n-1)-\sqrt{3}b_n=(7-4\sqrt{3})^n$$

从而 $a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$

由于 $$7\pm4\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^2$$

所以 $$a_n=\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n\right]^2$$

由二项式展开得

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n\\&=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\mathrm{C}_n^{2k}\cdot 3^k\cdot 2^{n-2k}\end{aligned}$$

显然 c_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

证法二 由已知得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=7a_n+6b_n-3\\&=7a_n+6(8a_{n-1}+7b_{n-1}-4)-3\\&=7a_n+48a_{n-1}+42b_{n-1}-27\end{aligned}$$

由 $$a_n=7a_{n-1}+6b_{n-1}-3$$

得 $$42b_{n-1}=7a_n-49a_{n-1}+21$$

从而

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=7a_n+48a_{n-1}+7a_n-49a_{n-1}+21-27\\&=14a_n-a_{n-1}-6\end{aligned}$$

由 $$a_0=1=1^2,a_1=4=2^2,a_2=49=7^2$$

设 $$c_{n+1}=4c_n-c_{n-1},c_0=1,c_1=2,c_2=7$$

由归纳法易知数列 $\{c_n\}$ 是唯一确定的正整数数列.

令 $d_n=c_n^2$，则

$$\begin{aligned}d_{n+1}&=c_{n+1}^2\\&=(4c_n-c_{n-1})^2\\&=16c_n^2-8c_nc_{n-1}+c_{n-1}^2\\&=14c_n^2-c_{n-1}^2-6-2(4c_nc_{n-1}-c_n^2-c_{n-1}^2-3)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&4c_nc_{n-1}-c_n^2-c_{n-1}^2-3\\
=&4c_nc_{n-1}-c_n(4c_{n-1}-c_{n-2})-c_{n-1}^2-3\\
=&c_nc_{n-2}-c_{n-1}^2-3\\
=&(4c_{n-1}-c_{n-2})c_{n-2}-c_{n-1}(4c_{n-2}-c_{n-3})-3\\
=&c_{n-1}c_{n-3}-c_{n-2}^2-3\\
=&\cdots\\
=&c_2c_0-c_1^2-3\\
=&0
\end{aligned}$$

故 $$d_{n+1}=14d_n-d_{n-1}-6, d_0=1, d_1=4$$

由唯一性得

$$a_n=d_n=c_n^2 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

故 a_n 是完全平方数.

1.2 高等解法

递推关系可改写成矩阵形式,从而求数列通项的问题转化为求矩阵方幂的问题,然后利用矩阵对角化思想求矩阵方幂,此时容易联想到特征理论,而哈密尔顿－凯莱(Hamilton-Cayley)定理是矩阵特征多项式的一个重要性质.

定义1 若递推关系改写成矩阵形式后,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则称递推关系是可对角化的;否则称为不可对角化的.

引理1 (哈密尔顿－凯莱定理)设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的 n 阶矩阵,$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+$

$a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}.$

该定理告诉我们,任给数域 P 上矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以找到数域 P 上一个多项式使得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

1.2.1 用哈密尔顿－凯莱定理求解可对角化双线性递推数列通项

例 1 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0=1, b_0=0$,且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}(n=0,1,2,\cdots)$$

证明:$a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是完全平方数.(2000 年全国高中数学联赛)

证明 将递推关系用矩阵表示:$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\8&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&6\\8&7\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$,则

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}&=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{B}\\ &=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-7&-6\\-8&\lambda-7\end{vmatrix}=\lambda^2-14\lambda+1$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1=7-4\sqrt{3}$, $\lambda_2=7+4\sqrt{3}$. 由哈密尔顿－凯莱定理得 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$. 于是令 $\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$, $\boldsymbol{D}=\dfrac{-\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$,则

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{C}+\lambda_2\boldsymbol{D}$$

$$C^2=(I-D)C=C$$
$$C^3=C^2C=C^2=C$$
$$\vdots$$
$$C^n=C$$

同理 $D^n=D$,所以

$$\begin{aligned}A^n&=(\lambda_1C+\lambda_2D)^n\\&=(\lambda_1C)^n+C_n^1(\lambda_1C)^{n-1}(\lambda_2D)+\cdots+C_n^n(\lambda_2D)^n\\&=\lambda_1^nC^n+\lambda_2^nD^n\\&=\lambda_1^nC+\lambda_2^nD\\&=\lambda_1^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\lambda_2^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)&\frac{\sqrt{3}}{4}(\lambda_2^n-\lambda_1^n)\\\frac{\sqrt{3}}{3}(\lambda_2^n-\lambda_1^n)&\frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为

$$I-A^n=I^n-A^n=(I-A)(I+A+\cdots+A^{n-1})$$

所以

$$I+A+\cdots+A^{n-1}=(I-A)^{-1}(I-A^n)$$

又

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-6&-6\\-8&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}(I-A^n)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) & \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_2^n \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_2^n & 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) \end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+ \\ &\quad \begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) & \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_2^n \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_2^n & 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\ * \end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n \\ &= \left[\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n\right]^2 \end{aligned}$$

由二项式定理得

$$\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n=\sum_{0\leqslant 2m\leqslant n}\mathrm{C}_n^{2m}2^{n-2m}3^m\in\mathbf{N}^*$$

所以 a_n 为完全平方数.

1.2.2 用哈密尔顿-凯莱定理求解不可对角化双线性递推数列通项

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$$

且 $a_1=a, b_1=b$，求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解 将递推式改写成矩阵形式：$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \boldsymbol{A}^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

即特征根出现重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，此时 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. 但由哈密尔顿－凯莱定理知，$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ 即 $(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{O}$，令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}$，则

$$\boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{O}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= (\lambda_1\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B})^n \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{I})^n + \mathrm{C}_n^1(\lambda_1\boldsymbol{I})^{n-1}\boldsymbol{B} + \\ &\quad \mathrm{C}_n^2(\lambda_1\boldsymbol{I})^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n\boldsymbol{B}^n \\ &= \lambda_1^n\boldsymbol{I} + n\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{B} \\ &= \lambda_1^n\boldsymbol{I} + n\lambda_1^{n-1}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}) \\ &= n\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{A} - (n-1)\lambda_1^n\boldsymbol{I} \\ &= n\lambda_1^{n-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (n-1)\lambda_1^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} 3n\lambda_1^{n-1} - (n-1)\lambda_1^n & -n\lambda_1^{n-1} \\ n\lambda_1^{n-1} & n\lambda_1^{n-1} - (n-1)\lambda_1^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n+2)\lambda_1^{n-1} & -n\lambda_1^{n-1} \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是有

哈密尔顿-凯莱定理

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\lambda_1^{n-2} & -(n-1)\lambda_1^{n-2} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= (n+1)\lambda_1^{n-2}a - (n-1)\lambda_1^{n-2}b \\ &= (n+1)2^{n-2}a - (n-1)2^{n-2}b \end{aligned}$$

本节主要应用哈密尔顿-凯莱定理和二项式定理等知识求解两类双线性递推数列通项，充分体现了新课程中新增内容矩阵和新课程中的传统内容数列的有机统一，有助于拓展教师的解题视角.

1.3 3个美国大学生和博士生遇到的问题

例1 若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$和$\boldsymbol{A}^{-7}$.（美国加州大学伯克利分校博士学位水平测试题，1987）

解 由$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$.

又由欧几里得（Euclid）除法，设$t^{100}=g(t)(t-1)^2+at+b$，两边求导得

$$100t^{99}=g'(t)(t-1)^2+2g(t)(t-1)+a$$

用$t=1$代入上两方程，可求得$a=100$，$b=-99$.

注意到由哈密尔顿-凯莱定理，有$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}^{100}=100\boldsymbol{A}-99\boldsymbol{I}$，从而

$$\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix} 51 & 50 \\ -50 & -49 \end{pmatrix}$$

类似地，$A^7 = 7A - 6I = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$，故 $A^{-7} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

注 当然问题亦可先求出 A 的特征值和特征向量，然后将 A 化为对角阵，比如 $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$，再去计算 A^{100} 和 A^{-7}.

下面的例子在某种程度上可看成求解方程组问题，又可视为矩阵方幂计算的反问题.

例2 设 $M \in \mathbf{R}^{3\times3}$，且 $M^3 = I, M \neq I$.（1）求 M 的实特征值；(2)给出一个这样的矩阵.（美国加州大学伯克利分校博士学位水平测试题，1977）

解 （1）由哈密尔顿－凯莱定理知 M 的最小化零多项式为

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

而 $x^2+x+1=0$ 无实根，从而 M 仅有实特征根 1.

（2）由前文的例知矩阵 $J = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ 的特征多项式为 x^2+x+1. 从而 $M = \begin{pmatrix} 1 & \\ & J \end{pmatrix}$ 满足 $M^3 = I$，且 $M \neq I$.

例3 若 $d_n(n \geqslant 1)$ 是矩阵 $A^n - I$ 元素的最大公因

子,这里 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\infty$.

(美国 Putnam Exam,1994)

证明 由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-8=\lambda^2-6\lambda+1$,容易算得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1=3+2\sqrt{2}$,$\lambda_2=3-2\sqrt{2}$.

这样 $\boldsymbol{A}^n$ 的元素皆可表示为 $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2\lambda_2^n$ 的形式.由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1-\lambda_2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1-\lambda_2) & \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\end{pmatrix}$$

用数学归纳法可以证明

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^n-\lambda_2^n)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1^n-\lambda_2^n) & \frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)\end{pmatrix}$$

又若 $\mu_1=1+\sqrt{2}$,$\mu_2=1-\sqrt{2}$,则 $\lambda_1=\mu_1^2$,$\lambda_2=\mu_2^2$.

又 $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mu_1^n+\mu_2^n)$ 和 $\frac{1}{2}(\mu_1^n+\mu_2^n)$ 均为有理数,则由 d_n 是 $\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{I}$ 的最大公因子,可有

$$d_n=\left(\frac{\lambda_1^n+\lambda_2^n}{2}-1,\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\mu_1^{2n}+\mu_2^{2n}}{2}-1,\frac{\mu_1^{2n}-\mu_2^{2n}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{(\mu_1^n\pm\mu_2^n)^2}{2},\frac{(\mu_1^n-\mu_2^n)(\mu_1^n+\mu_2^n)}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\mu_1^n\pm\mu_2^n}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_1^n\pm\mu_2^n}{\sqrt{2}},\frac{\mu_1^n\mp\mu_2^n}{2}\right)$$

这里(x,y)表示x,y的最大公因子，且注意到$\mu_1\mu_2=-1$，则

$$\frac{\mu_1^{2n}+\mu_2^{2n}}{2}-1=\frac{\mu_1^{2n}+\mu_2^{2n}-2}{2}$$

$$=\frac{\mu_1^{2n}+\mu_2^{2n}\pm 2\mu_1^n\mu_2^n}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\mu_1^n\pm\mu_2^n)^2$$

又$|\mu_1|>1$，$|\mu_2|<1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_1^n-\mu_2^n)=\infty$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\infty$.

注 结论又可推广到下面情形.

命题1 若$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$，其元素皆为整数，且$\det(\boldsymbol{A})=1$，又$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\pm 1$. 若$d_n$是$\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{I}$的元素的最大公因子，则$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\infty$.

例4 线性变换φ（或方阵$\boldsymbol{A}$）的特征多项式$f(\lambda)$是φ（或$\boldsymbol{A}$）的零化多项式.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的基，则可设

$$(\varphi\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\varphi\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\quad(\boldsymbol{A}\text{ 为 }\varphi\text{ 的方阵表示})$$

即$\varphi\boldsymbol{\alpha}_i$的坐标是$\boldsymbol{A}$的第$j$列，即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第$j$行，从而

$$\begin{pmatrix}\varphi & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \varphi\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

也可记为

$$\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\quad (\lambda\ \text{是不定元})$$

即

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

在左边乘以$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$（即方阵$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的古典伴随方阵），则

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=f(\lambda)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

也就是说，$f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i=f(\varphi)\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{O}(i=1,\cdots,n)$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是基，故对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$，$f(\varphi)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$，即得所证.

我们知道，可逆方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，因此方阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$的常数项$a_n=(-1)^n\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，反之亦然. 由哈密尔顿－凯莱定理

$$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}_{(n)}=\boldsymbol{O}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\left[-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I}_{(n)})\right]=\boldsymbol{I}_{(n)}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I}_{(n)})$$

例5 设