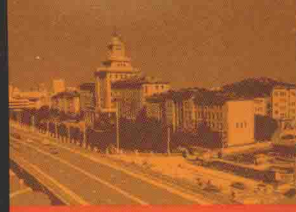


俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Geometric Transformations (Ⅱ)

几何变换(Ⅱ)

[苏]雅格洛姆 著　詹汉生 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

几何变换（Ⅲ）

Geometric Transformations (Ⅲ)

[苏] 雅格洛姆 著

詹汉生 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字　08-2015-001 号

内 容 简 介

本书主要讨论的是几何中的相似变换.内容大致可分为两部分:在前一部分中,作者首先讨论中心相似、螺旋相似和膨胀反射等变换,并仔细分析了它们的特征性质,在此基础上,给出了相似变换的完全分类;后一部分着重介绍保距变换和相似变换的许多有趣的应用.

本书内容丰富,重点突出,讲述富于启发性.在每个新概念引进或在主要定理的证明之后,都配有一定数量的习题,书后附有全部习题的详细解答.

本书可供中学生、大学低年级学生、中学教师以及广大数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

几何变换.2/(苏)雅格洛姆著;詹汉生译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.6

书名原文:Geometric transformations

ISBN 978-7-5603-5269-5

Ⅰ.①几…　Ⅱ.①雅…　②詹…　Ⅲ.①平面几何—研究　Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 060494 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 10.5　字数 218 千字
版　　次　2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5269-5
定　　价　28.00 元

◉ 作者简介

雅格洛姆(Яглом),1921 年出生于苏联哈尔科夫市,1942 年毕业于斯维尔德洛夫大学,1945 年获得副博士学位.他早年曾在莫斯科大学、奥彼克霍夫基辅教育学院等校任教,1957～1968 年任莫斯科国立教育学院的几何学教授.1968 年以后,他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教.

他对苏联的数学教学具有相当大的影响.他还发表了许多科学论著,其中有不少被译成英文,如 *Complex Numbers in Geometry*,*Convex Figures*,等.

序言(摘译)

这套书分为两册[①],是专为初等几何写的.长期以来,尤其是在19世纪,初等几何的领域里积累了极其丰富的资料.许多关于圆、三角形和多边形的美妙而意想不到的定理被证明了.在初等几何的内部,还形成了一些完整的分支,如“三角形的几何”、“四面体的几何”等.这些分支都有各自广泛的题材,各自的习题和解题的方法.

然而,本书的目的并不是向读者介绍初等几何中那些他们所不熟悉的定理.我们认为,上面谈到的初等几何的那些发展,并不说明需要有专著来阐述它们.这是因为超出高中课程范围的大部分定理只不过是一些“古董”,它们既没有什么实用价值,又脱离了数学发展的主流.但是,在初等几何中,除去一些具体的定理之外,还包含了两个重要的有普遍意义的思想,它们构成了几何学的一切进一步发展的基础,其重要性远远超出了几何学的界限.其中之一是演绎法和几何学的公理基础,另一个是几何变换和几何学的群论基础.这些思想都是内容丰富和卓有成效的.例如,两者的直接发展都导致了非欧几何的产生.本书的任务是阐明这两种思想之一——几何学的群论基础.

……

① 中译本分为四册.——中译者

我们还要对本书的特点说几句话.本书是面向十分广泛的读者的.在这种情况下,就难免为照顾一部分读者而不能顾及另一部分读者的兴趣.作者牺牲了基础较好的读者的某些兴趣,力求使本书简单明了、通俗易懂,而不去过分追求严密性和逻辑上的精确性.例如,我们不一般地对几何变换这个概念下定义,因为尽管定义的术语在直观上是清楚的,但它总是使一些缺乏经验的读者感到困难.由于同样的原因,我们不得不避开有向角的概念,并且把有向线段的概念推迟到第2章引进,尽管这样做使得正文和习题解答中的某些论证严格地说可以认为是不完整的……,但是我们认为,基础好的读者自己能够去完善这些论证;而对于基础不那么好的读者,严格性上的欠缺不会对他们有什么妨碍……

在术语的选用上也有同样的考虑.作者根据自己当学生时的经验确信,如果在一本书中出现大量生疏的术语,会大大增加它的难度.因此在术语的使用上尽量做得最为经济.在某些情况下,不得不放弃一些方便的术语,这样也就可能忽视了基础较好的读者的某些兴趣……

习题给读者提供了一个检验自己对正文内容掌握情况的机会.不必按顺序解所有的习题,但是我们主张读者在每一组习题中至少选做一个(做几个更好).本书的结构使得照这个办法做的读者将不会丢失任何基本的内容.在解完(或试图去解)一个习题时,读者应当研究一下书后的解答.

习题一般不一定与正文相衔接,但解答都是用本书中的基本内容和初等几何的变换.特别要注重的是解题方法而不是结论.个别的习题可能出现在几个不同的地方,因为将同一个问题的几种不同的解法加以比较,常常是有益的.

本书有许多作图题,在解这些习题时,我们并不去追求“最简单”(在某种意义下)的作图法.作者对这些题目的主要兴趣是在逻辑上,而实际上并不关心怎样去完成这些作图.

……

I·M·雅格洛姆

前言

什么是几何学

在《几何变换(Ⅰ)》的前言中,我们曾经把几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科;而运动则定义为不改变图形中任何两点之间距离的变换. 由于点之间距离的概念(线段的长度)看起来好像是整个几何中最重要的概念,因而图形的最重要的几何性质似乎是它的各点之间的距离. 但是,如果我们仔细考察一下像基谢廖夫的教科书中所讲过的全部几何定理,我们看到点之间距离的概念几乎都不在这些定理中出现. 关于平行线和垂线的所有定理(例如,若两平行直线被第三条直线所截,则同位角相等,或从不在给定直线上的每个点可以向给定的直线引一条且仅能引一条垂线),关于圆的大部分定理(例如,过不在一直线上的三个点可以作一个且仅可作一个圆),关于三角形和多边形的许多定理(例如,三角形内角之和等于一个平角,或菱形的对角线互相垂直并且平分菱形的各个角)都与距离的概念毫无关系. 即使在那些其表述中包含有长度概念的定理中(例如,三角形任意一个角的平分线分对边所成两部分之比等于这个三角形两邻边的比;在给定的圆或等圆中,两条不等长的弦中的长弦离圆心更近;或者甚至毕氏定理:若用同一单位度量直角三角形的边,则斜边长度的平方等于两直角边长度的平方之和),实际上起作用的并不是某条线段或某些线段的长度,而只是两条或几条线段长度之比. 只要回想一下这些定理的内容,这一点是容易确信的. 例如,在毕氏定理中,起作用的不是三角形的各边的实际长度,而只是斜

边长度与两直角边长度之比. 这个定理说，如果 Rt$\triangle ABC$ 的两直角边的长度为 b 和 c，用 k 和 l 分别表示这两直角边长度与斜边长度 a 之比(即 $\frac{b}{a}=k$，$\frac{c}{a}=l$)，则有 $k^2+l^2=1$.

这背后的道理是不难理解的. 线段长度的概念本质上依赖于某个固定长度单位的选取；如果我们分别用厘米、千米或英寸去度量线段，那么表示同一线段长度的数将是不同的. 但是几何定理的内容不能依赖于特定的度量单位的选取. 由此可见，在几何定理中长度本身不能出现，我们能遇到的只是两条或几条线段长度之比(这些比是不依赖于度量单位的选取的). 因此，毕氏定理中开始的那句话"若直角三角形的边用同一单位度量，则 ……" 正是告诉我们定理说的是三角形边长之比. 如果我们知道几条线段都是用同一单位度量的，而我们又不知道度量的单位是什么，那么我们只能考虑这些线段长度之比. 当然，在定理的假设中要求用规定的度量单位(例如用米) 去度量线段是不足取的. 显然，一个定理不能仅当其中的线段用厘米去度量时是正确的，而当用英寸去度量这些线段时却是错误的.

这与下面这样一个事实是相关联的，即从几何观点看，所有的线段都是同等的，它们之中没有某一条以任何方式显得与众不同. 所以从几何的观点看，所有长度单位的规定都有完全任意的性质. 例如，把米规定为保存在巴黎计量局中某铂铱棒的长度；或把它规定为在某些标准条件下镉所放射出的红光的波长的 1 552 734.83 倍. 另一个这样的例子是英国的码最初被定为从英王亨利一世的鼻子到他伸直了的手的中指尖的距离. 因此，在几何定理的陈述中不用线段的长度而只用线段长度之比(一些不依赖于度量单位选取的量) 是自然的①.

按照我们对几何所下的定义，应当扮演基本角色的是点之间距离的概念，实际上距离又不直接出现在几何定理中，这种情况已经由第一个给几何以严格定义的 F·克莱因指出. 事实上，克莱因的定义与《几何变换(Ⅰ)》的前言中所给的定义稍有不同. 克莱因的定义是：几何学是研究几何图形在相似变换下不变的那些性质的学科. 相似变换可定义为不改变点偶之间距离之比的那种变换. 相似变换的这个抽象的定义可以用对所有这类变换的完全的描述来代替. 这样的描述将在本书 1.2 节中给出. 克莱因的定义说，在一定意义下，几何学不仅不区分全等的图形，而且它甚至不区分相似的图形. 事实上，为了断定两个三角形是全等而不仅仅是相似，我们必须始终固定一个用以度量这两个三角形边

① 注意，与线段长度相反，角度大小常常在几何定理的陈述中出现. 这是因为角的度量单位可以纯几何地加以规定：弧度定义为长度等于圆的半径的弧所对的圆心角，直角可以定义为与它的补角相等的角. 线段的长度与角度的大小的这种差别，例如可以通过下面的定理得到很好的说明：在直角三角形中，如果它的一个锐角等于 30°，则最短的边长与斜边长之比是 1∶2.

的长度单位.正是相似图形之间的这种“不可区分性”，使得我们能把一个尺寸很大的图形描绘在一张图纸上.当老师要求学生们把他画在黑板上的图形“准确地”画到他们的笔记本上去的时候，老师用的正是这个原理.当然，如果不缩小图形的尺寸，这是不可能办到的①.

这样，我们知道在初等几何中基本的角色实际上是由相似变换扮演的.因此，这类变换的研究是重要的.相似变换的研究不仅在理论上有很重要的意义，而且在解许多各种各样的问题时也是很有用的.事实上，在这方面相似变换并不亚于保距变换.我们可以用“求作一个四边形，使它与一给定的四边形相似，并且它的边经过四个给定的点”这样一个问题(参看第2章中问题7(2))作为例子.这个问题是下面三个熟知的问题的推广，而这三个问题通常是要用正方形、长方形和菱形的特殊性质来解的：

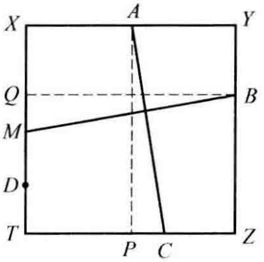
(1) 作一个正方形，使它的边经过四个给定的点.

(2) 作一个边长为给定比的长方形，使它的边过四个给定的点.

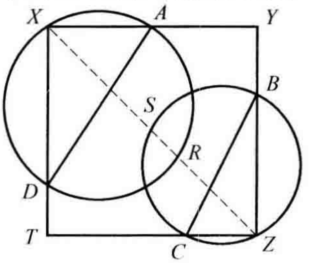
(3) 作一个有给定角的菱形，使它的边过四个给定的点.

问题(1) 可以用下面的方法来解：若点 A,B,C 分别在正方形 $XYZT$ 的边 XY,YZ 和 ZT 上(图1(a))，并且过 B 垂直于 AC 的直线交直线 XT 于点 M.因为图1(a)中的 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BMQ$ 全等，于是 $AC=BM$.这样，若已知落在正方形四条边上的四个点 A,B,C,D，则我们就能在边 TX 上(或在它的延长线上)找到一点 M，并且作出过点 D 和 M 的直线(假设点 D 与 M 不重合)TX.

这同一个问题也可以用另一种方法来解：像前面一样，令 A,B,C,D 是正方形的边 XY,YZ,ZT 和 TX 上的点，以 AD 为直径的圆过点 X，令 R 是对角线 XZ 与这个圆的另一个交点.同样，以 BC 为直径的圆过点 Z，令 S 是对角线 XZ 与这个圆的另一个交点(图1(b)).因为 XZ 平分以 X 为顶点的角，点 R 是 $\overset{\frown}{ARD}$ 的



(a)



(b)

图 1

① 顺便提一下，在某些场合《几何变换(Ⅰ)》中所给的几何的定义比这里所给的要好，关于这个问题在《几何变换(Ⅲ)》的引论中有更充分的论述.

中点. 同理, S 是$\overset{\frown}{BSC}$ 的中点. 于是 XZ 可以作为过这两个中点 R 和 S(如果 R 与 S 不重合) 的直线被作出来. 这条直线与上述两个圆的另外两个交点就是所要求的顶点 X 和 Z.

上面概述的第一种解法可以自然地加以推广, 用来解问题(2), 现在 $AC : BM = AP : BQ = TX : XY$ 是已知的(图 2(a)). 作正方形问题的第二种解法正好可以推广用来解问题(3). 但是这时这些圆弧必须张在线段 AD 和 BC 上, 并且所含的圆周角等于给定菱形的角. 然后和前面一样, 对角线 XZ 作为过这两个圆弧的中点 R 和 S 的连线可以定出来(图 2(b)).

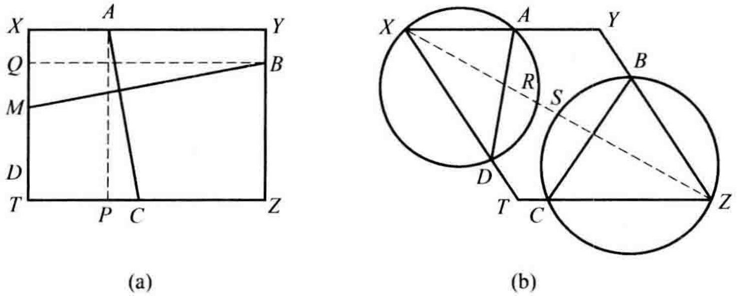


图 2

虽然问题(1), (2), (3) 的这些解法都很漂亮, 但它们都有点不自然, 人们不容易想出这样一些证明. 基于相似变换的一般考虑, 使我们能对一个包括上面三个问题作为特例的更一般的问题, 找出一个较为自然的解法. 读者将会找到许多可以用相似变换来解的其他问题.

还要注意, 因为保距变换是相似变换的特殊情形, 许多能用保距变换来解的问题, 如果改用相似变换来解, 它们可以被大大地推广. 例如, 以一个多边形的各边为底, 作有给定顶角的等腰三角形, 已知这些三角形顶角的顶点, 求作此多边形这样一个问题(我们在《几何变换(Ⅰ)》中曾说过这个问题) 可以推广成下面的样子:

以一个 n 边形的各边为底作 n 个三角形, 使与 n 个给定的三角形相似, 已知这些三角形的顶点, 求作这个 n 边形(参看第 1 章中问题 37).

读者在第 1 章中将会找到很多这样的例子.

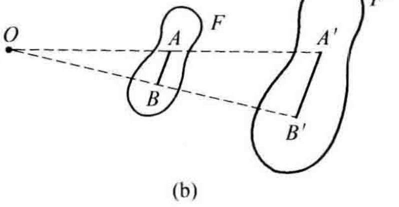
目录

第1章 相似变换的分类

1.1 中心相似(同位相似)

我们说点 A' 是由点 A 经过中心为 O，相似系数为 k 的中心相似(或同位相似)得到的，如果 A' 在直线 OA 上，和 A 位于 O 的同侧，并且 $\frac{OA'}{OA}=k$(图 1.1(a)). 平面到自身的变换，如果它把平面的每个点 A 变到由 A 经过中心为 O，相似系数为 k 的中心相似所得到的点 A'，则称这个变换为中心相似(或同位相似). 点 O 称为中心，数 k 称为这个变换的系数，点 A' 称为 A 在这个变换下的象. 图形 F 的全部点的象构成一个图形 F'，F' 称为是中心相似于 F 的图形(有相似中心 O 和相似系数 k)(图 1.1(b)). 显然，图形 F 也中心相似于 F'(有同样的相似中心，

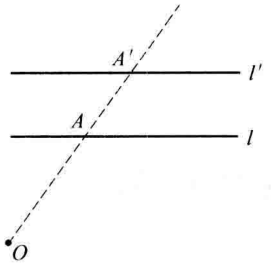
(a)



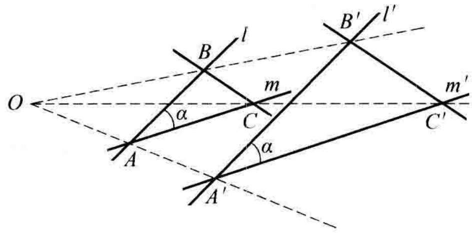
(b)

图 1.1

但相似系数为$\frac{1}{k}$). 这使得我们可以说F和F'是一对中心相似的图形. 有时也说图形F和F'是相似的[①],或者说它们处于相似位置. 中心相似变换把直线l变成与它平行的直线l'. 为了作出l',只要找出直线l上某个点A在中心相似变换下的象A',然后再过A'引一条平行于l的直线(图1.2(a)). 如果两条直线l和m相交成角α,那么它们的象l'和m'也相交成同样的角α. 因而与给定的$\triangle ABC$中心相似的$\triangle A'B'C'$跟$\triangle ABC$有同样的内角,即这两个三角形是相似的(图1.2(b)). 一个中心在A,半径为r的圆S,经过中心相似变成中心在A',半径为$r'=kr$的新圆S',这里A'是点A在中心相似下的象,而k是相似系数(图1.3). 事实上,由$\triangle OAM$和$\triangle OA'M'$相似(这里M是S的任意一点,M'是它的象),可知$\frac{A'M'}{AM}=k$,即$A'M'=kr$. 这证明圆S变成了中心在A',半径为kr的圆.



(a)



(b)

图 1.2

显然,可以认为任何两个中心分别在点A和A',半径分别为r和r'的不全等的圆S和S'是中心相似的. 这只要把直线AA'上位于线段AA'之外,并使得$\frac{OA'}{OA}=\frac{r'}{r}$的点$O$作为相似中心,把比$\frac{r'}{r}$作为相似系数就行了(图1.3). 这个点$O$称为圆$S$和$S'$的外相似中心(对应于我们在下面将要谈到的内相似中心). 为了作出两个不全等的圆S和S'的外相似中心O,只需在这两个圆中引任意两条平行且有相同指向的半径AM和$A'M'$,再用直线连M和M',O就是AA'和MM'的交点. 如果这两个圆中较小的圆不在较大的圆的内部,则外相似中心也可以作为它们的外公切线的交点确定出来(图1.3(a));如果S和S'内切,则相似中心与切点重合(图1.3(b)).

把在同一条直线上的两条线段AB和CD之比认为有确定的符号常常是方便的:当线段AB和CD的方向(即从点A到B的方向和从点C到D的方向)相

① 因为在中心相似变换下所有线段的长度都乘上同一个数k,所以中心相似变换是前言中所定义的那种相似变换.

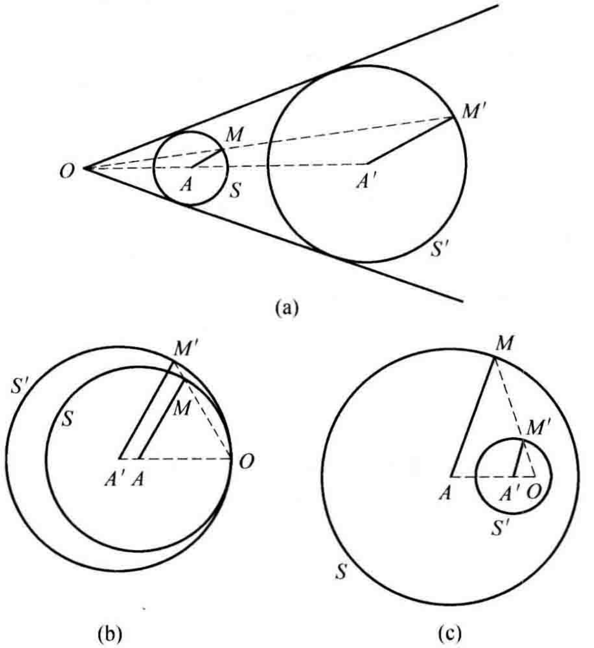


图 1.3

同时(图 1.4(a)),认为比$\frac{AB}{CD}$是正的;而当它们的方向相反时(图 1.4(b)),认为比$\frac{AB}{CD}$是负的. 显然,在这里线段端点的次序是本质的. 例如,$\frac{BA}{CD}=-\frac{AB}{CD}$. 关于线段之比的符号的这个规定,对很多几何问题是方便的,以后我们将要用到它①. 如果我们承认这个规定,那么两个中心相似图形的相似系数就可以是正

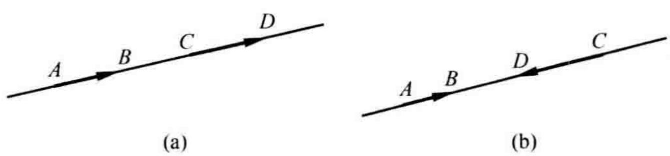


图 1.4

① 线段比的符号的这个定义可以解释如下:在直线上选取某个方向作为正向(它可以用直线上的一个箭头来表示). 直线上的线段 AB 被认为是正的,则它的方向(从点 A 到点 B)是正向,否则认为它是负的. 于是,两线段之比可以是正的,也可以是负的. 容易看出,这个比与直线上正方向的特别选取无关. 如果线段 AB 和 CD 有相同的符号(即两条线段或者都是正的,或者都是负的),则比$\frac{AB}{CD}$是正的;如果两线段符号相反(即一条线段是正的,而另一条是负的),则比是负的.

带有确定符号的线段的比,可以用向量的语言定义如下:$\frac{AB}{CD}=k$,其中 k 是使得 $AB=kCD$ 成立的正数和负数.

的或负的. 换句话说，两个图形 F 和 F' 称为是以 O 为相似中心，$-k$(负的) 为相似系数中心相似的，如果这两个图形的每一对对应点 A 和 A' 在一条过 O 的直线上，位于 O 的两侧，并且线段 OA' 和 OA 的长度之比等于 k(图 1.5)，这个条件可写成 $\frac{OA'}{OA}=-k$. 一个以 O 为相似中心，有负相似系数 $-k$ 的中心相似，与先作一个以 O 为中心，有正相似系数 k 的中心相似(把图形 F 变到 F_1，如图 1.5 所示)，然后将平面作关于点 O 的中心对称(把 F_1 变到 F')；或者先将平面作关于点 O 的中心对称(把图形 F 变到 F_2，如图 1.5 所示)，再接着作一个以 O 为中心，有正相似系数 k 的中心相似(把 F_2 变到 F')，所得出的变换是相同的. 因而，具有负相似系数 $-k$ 的中心相似，是一个有同样中心 O 和正系数 k 的中心相似与一个关于点 O 的中心对称变换之和①，这个和与两个变换施行的次序无关. 以后当谈到中心相似时，我们总是认为相似系数可以是正的，也可以是负的. 有负相似系数 $-k$ 的中心相似也把直线 l 变成直线 l'(但是，现在相似中心在直线 l

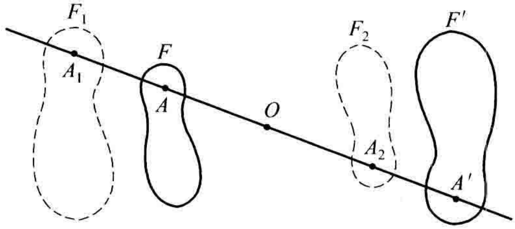


图 1.5

和 l' 之间，如图 1.6 所示)，并且也把圆 S 变成另一个圆 S'(圆 S' 的中心 A' 以 $-k$ 为相似系数，中心相似于圆 S 的中心 A，并且两圆半径之比 $\frac{r'}{r}$ 等于 k，如图 1.7 所示). 任何两个圆 S 和 S' 都是中心相似的，它们有负相似系数 $-\frac{r'}{r}$(其中 r 和 r' 是两个圆的半径)，相似中心 O 在它们圆心的连线 AA' 上，并且使得 $\frac{OA'}{OA}=-\frac{r'}{r}$. 点 O 在线段 AA' 内，称为圆 S 和 S' 的内相似中心. 为了找出两个圆 S 和 S' 的内相似中心，只需在这两个圆中引任意两条平行并且反向的半径 AM 和 $A'M'$，O 就是 AA' 和 MM' 的交点(图 1.7). 如果 S 和 S' 不相交，则它们的内相似中心也就是两圆的

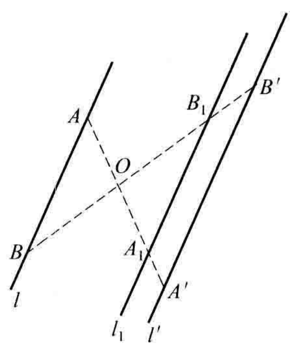


图 1.6

---

① 先作变换 $f:A\to A'$，接着再作另一个变换 $g:A'\to A''$，所得的结果是复合变换 $g\circ f:A\to A''$，通常称它为 f 和 g 的乘积 $g\circ f$，但是在本书中称它为 f 与 g 的和.

内公切线的交点(图 1.7(a));如果 S 和 S' 外切,则 O 是切点(图 1.7(b)). 这样,任何两个不全等的圆可按如下两种方式看作是中心相似的:相似系数可以认为是 $\frac{r'}{r}$ 或 $-\frac{r'}{r}$. 两个全等的圆只以一种方式中心相似,相似系数为 -1. 对于两个同心圆(并且仅对同心圆),外相似中心和内相似中心彼此重合,并且与这两个圆的中心重合.

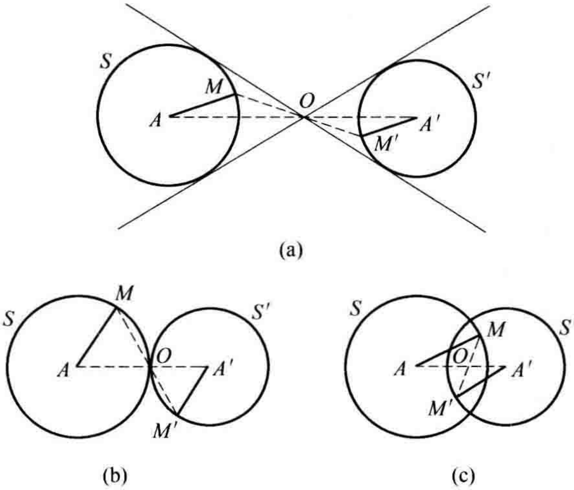


图 1.7

不是恒等变换的中心相似(恒等变换可以看作是中心相似的特殊情形,它的相似系数 $k=1$) 仅有的不动点是中心 O,它的不动直线是所有过 O 的直线.

如果中心相似的系数是 -1,那么这个变换就是关于相似中心的中心对称. 因而,关于某个点的中心对称是中心相似的一种特殊情形. 利用这一点,我们可以推广《几何变换(Ⅰ)》中那些用中心对称方法解的第 1 章中的问题 9 ~ 11. 为了解这些更一般的问题,我们必须用比中心对称更为一般的中心相似. 例如,在问题 9 中我们可以要求"所作直线在给定的直线和圆之间的线段被点 A 分成给定比 $\frac{m}{n}$";在问题 10(2) 中我们可以要求"当所求直线被圆 S_1 和 S_2 截下的弦的长度分别乘以给定的数 m 和 n 时,它们的差有给定的值";在问题 11 中我们可以要求"点 J 把弦 CD 上的线段 EF 分成比 $\frac{m}{n}$". 这些新的问题的解法与问题 9 ~ 11 的解法是类似的. 我们把它们留给读者自己去完成.

习　题

1. 给定两直线 l_1, l_2 和一点 A. 过 A 引直线 l,使得此直线被 l_1 和 l_2 截得的

线段 BC 满足 $AB : AC = m : n$.

2.(1) 给定圆 S 和 S 上一点 A,找所有经过 A 的弦的中点的轨迹.

(2) 给定圆 S 和 S 上面的三个点 A,B,C,作弦 AX,使得它被弦 BC 平分.

3. 给定两个相切的圆 R 和 S. 设 l 是过切点 M 的直线,它与 R 交于另一个点 A,与 S 交于另一个点 B. 证明:R 在点 A 处的切线平行于 S 在点 B 处的切线.

4. 设 R 和 S 是两个互不相交的圆,任何一个都不在另一个的内部. 设 m,n 是圆 R 和 S 的两条外公切线,M 是 m 和 n 的交点. 设 l 是过 M 的直线,交 R 于点 A,B,并且交 S 于点 C,D. 最后,令 E 是 m 和 R 的切点,F 是 m 和 S 的切点. 证明:

(1) $\triangle ABE$ 相似于 $\triangle CDF$.

(2) $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 的面积之比等于 R 和 S 的半径之比的平方.

(3) 由 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 的中线交点所确定的直线经过点 M.

5. 设 $ABCD$ 是梯形,它的边 AD 和 BC 延长后交于点 M. 令 N 是对角线 AC 和 BD 的交点. 证明:

(1) $\triangle ABM$ 的外接圆 R 和 $\triangle DCM$ 的外接圆 S 相切.

(2) $\triangle ABN$ 的外接圆 R_1 和 $\triangle CDN$ 的外接圆 S_1 相切.

(3) R_1 和 S_1 的半径之比等于 R 和 S 的半径之比.

6.(1) 以梯形 $ABCD$ 的两平行边 AB 和 CD 为底作等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle CDF$. 要求这些三角形作在它们底边的同一侧(即如果把 AB 和 CD 看作是水平的,则这两个三角形或者都在底边的上面或者都在底边的下面). 证明:直线 EF 过梯形的两条不平行边延长线的交点.

(2) 在梯形的平行边 AB 和 CD 上向梯形外作正方形. 证明:连这两个正方形中心的直线过梯形对角线的交点.

7. 证明:梯形的两平行边中点的连线过其他两边延长线的交点以及对角线的交点.

8.(1) 给定两个同心圆 S_1 和 S_2. 作直线 l 依次交这两圆于点 A,B,C,D,使得 $AB = BC = CD$(图 1.8(a)).

(2) 给定三个同心圆 S_1,S_2 和 S_3. 作直线 l 依次交 S_1,S_2,S_3 于点 A,B,C,使得 $AB = BC$(图 1.8(b)).

(3) 给定四个同心圆 S_1,S_2,S_3 和 S_4. 作直线 l 分别交 S_1,S_2,S_3,S_4 于点 A,B,C,D,使得 $AB = CD$(图 1.8(c)).

9.(1) 在给定的 $\triangle ABC$ 中,作内接正方形,使得它的两个顶点在底边 AB 上,而其他两个顶点分别在边 AC 和 BC 上.

(2) 在给定的 $\triangle ABC$ 中,作内接三角形,使它的边分别平行于三条给定的