

九章
丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套人大版·赵树嫖主编

教你用更多的自信面对未来!

一书两用
同步辅导+考研复习

经济应用数学基础(二)

线性代数

(人大·第四版)

同步辅导及习题全解

主 编 肖楚阳

习题超全解

名师一线经验大汇集, 解题步骤超详细, 方法技巧最实用

新版

$$\begin{aligned} \text{Let } x &= \frac{1}{2}(u-1) \\ \frac{x^2}{(1+2x)^3} dx &= \int \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{(1+2x)^3} 2dx \\ &= \int \frac{1}{2} \times \frac{(\frac{1}{2}(u-1))^2}{u^3} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} \left(\frac{1}{4}(u^2 - 2u + 1) \right) du \\ &= \frac{1}{8} \int (u^{-1} - 2u^{-2} + u^{-3}) du \\ &= \frac{1}{8} \left(\log_e u - 2u^{-1} + \frac{u^{-2}}{-2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\log_e(1+2x) - \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{(1+2x)^2} \right) \end{aligned}$$



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济应用数学基础（二） 线性代数（人大·第四版） 同步辅导及习题全解

主 编 肖楚阳



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与中国人民大学出版社出版的、赵树嫄主编的《经济应用数学基础(二) 线性代数(人大·第四版)》一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书共有五章,分别介绍行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型。本书按教材内容安排全书结构,各章均包括本章知识框架图、本章常考点归纳、本章知识回顾、常考基本题型、典型例题解析、考研真题精解、课后习题全解六部分内容。全书按教材内容,针对各章节习题给出详细解答,思路清晰,逻辑性强,循序渐进地帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《经济应用数学基础(二) 线性代数(人大·第四版)》课程的辅导教材,也可作为考研人员复习备考的辅导教材,同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(二) 线性代数(人大·第四版)
同步辅导及习题全解 / 肖楚阳主编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2016.2

(高校经典教材同步辅导丛书)

ISBN 978-7-5170-4123-8

I. ①经… II. ①肖… III. ①线性代数—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第032768号

策划编辑: 杨庆川

责任编辑: 宋俊娥

封面设计: 李 佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 经济应用数学基础(二) 线性代数(人大·第四版) 同步辅导及 习题全解
作 者	主 编 肖楚阳
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规 格	148mm×210mm 32开本 9.625印张 338千字
版 次	2016年3月第1版 2016年3月第1次印刷
印 数	0001—5000册
定 价	15.80元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

赵树嫖主编的《经济应用数学基础(二)线性代数(人大·第四版)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《经济应用数学基础(二)线性代数(人大·第四版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到《经济应用数学基础(二)线性代数(人大·第四版)》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 本章知识框架图。每章的知识网络图系统全面地涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

2. 本章常考点归纳。根据教学大纲要求,总结学习的重点以及需要掌握的知识点。

3. 本章知识回顾。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

4. 典型例题解析。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

5. 考研真题精解。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

6. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者
2016年1月

目 录

前 言

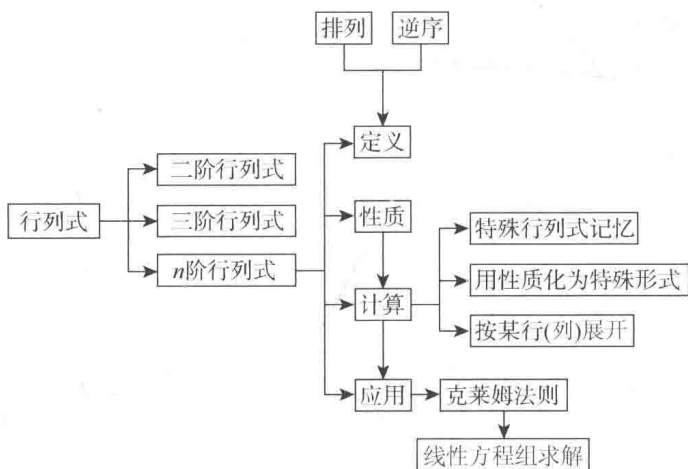
第一章 行列式	1
本章知识框架图	1
本章常考点归纳	1
第一节 二阶、三阶行列式	2
本节知识回顾	2
常考基本题型	3
第二节 n 阶行列式	5
本节知识回顾	5
典型例题解析	8
第三节 行列式的性质	10
本节知识回顾	10
常考基本题型	11
第四节 行列式按行(列)展开	18
本节知识回顾	18
常考基本题型	20
第五节 克莱姆法则	23
本节知识回顾	23
常考基本题型	24
课后习题全解	30
第二章 矩 阵	63
本章知识框架图	63
本章常考点归纳	63
第一节 矩阵的概念	64
本节知识回顾	64
第二节 矩阵的运算	65

本节知识回顾	65
本节知识回顾	68
第三节 几种特殊的矩阵	73
本节知识回顾	75
常考基本题型	76
第四节 分块矩阵	76
本节知识回顾	79
常考基本题型	81
第五节 逆矩阵	81
本节知识回顾	82
常考基本题型	89
第六节 矩阵的初等变换	89
本节知识回顾	91
常考基本题型	97
第七节 矩阵的秩	97
本节知识回顾	98
典型例题解析	103
课后习题全解	147
第三章 线性方程组	147
本章知识框架图	147
本章常考点归纳	148
第一节 线性方程组的消元解法	148
本节知识回顾	152
常考基本题型	158
第二节 向量与向量组的线性组合	158
本节知识回顾	160
第三节 向量组的线性相关性	165
本节知识回顾	165
常考基本题型	167
典型例题解析	171
第四节 向量组的秩	171
本节知识回顾	173
常考基本题型	177
第五节 线性方程组解的结构	177
本节知识回顾	179

常考基本题型	187
第六节 投入产出数学模型	187
本节知识回顾	194
课后习题全解	222
第四章 矩阵的特征值	222
本章知识框架图	222
本章常考点归纳	223
第一节 矩阵的特征值与特征向量	223
本节知识回顾	224
常考基本题型	229
第二节 似矩阵与矩阵对角化	229
本节知识回顾	230
第三节 实对称矩阵的特征值和特征向量	236
本节知识回顾	236
典型例题解析	238
第四节 矩阵级数的收敛性	243
本节知识回顾	243
课后习题全解	247
第五章 二次型	266
本章知识框架图	266
本章常考点归纳	266
第一节 二次型与对称矩阵	266
本节知识回顾	267
常考基本题型	268
第二节 二次型与对称矩阵的标准型	269
本节知识回顾	269
常考基本题型	271
第三节 二次型与对称矩阵的有定性	274
本节知识回顾	274
典型例题解析	275
第四节 正交性和负定性的一个应用	279
本节知识回顾	279
课后习题全解	281

第一章 行列式

本章知识框架图



本章考点归纳

本章在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 行列式概念的理解:行列式的项数、各项的特点、每项符号的确定等.
2. 行列式的计算或证明:利用行列式的定义、性质和展开定理,计算各阶行列式.特别是利用一些常用的方法和技巧,如降阶法、行(列)累加法、加边法、归纳法或递推法等,来计算某些特殊的 n 阶行列式的值,或证明与其有关的命题.
3. 克莱姆法则的应用
 - (1) 对非齐次线性方程组,在系数行列式不为零时,通过计算行列式的值求得方程组的解;
 - (2) 对齐次线性方程组,当有非零解时,确定方程组中的某些参数.
4. 特殊行列式的记忆及变形

第一节 二阶、三阶行列式

本节知识回顾

知识点 1 二阶行列式

1. 定义

二阶行列式是对两行两列共 4 个元素的一种运算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. 运算法则——对角线法则

二阶行列式的值,等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

知识点 2 三阶行列式

1. 定义

三阶行列式是三行三列共 9 个元素的一种运算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. 运算法则——对角线法则

三阶行列式的值,等于主对角线方向上三个元素的乘积之和,减去副对角线方向上三个元素的乘积之和.

小提示 三阶行列式的运算结果共有六项:三项带正号,三项带负号,与主对角线方向平行的三项为正,与副对角线方向平行的三项为负.

典型例题解析

题型分析 计算二阶和三阶行列式,可以根据对角线法则来进行.

例1 计算下列行列式

$$(1) \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解题提示 注意各项的符号.

解 (1) $\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = \sin \theta \times (-\sin \theta) - \cos \theta \times \cos \theta = -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$

$= -1;$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times 3 \times 1 + 1 \times 4 \times 1 + (-2) \times (-1) \times 2 - (-2) \times 3 \times 1 - 0$$

$$\times 4 \times 2 - 1 \times (-1) \times 1 = 0 + 4 + 4 + 6 - 0 + 1 = 15.$$

例2 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bx & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$

证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bx & ca & ab \end{vmatrix} = ab^2 + bx^2 + ca^2 - b^2c - c^2a - a^2b$

$$= b(c^2 - a^2) + b^2(a - c) + ca(a - c) = (c - a)(bx + ab - b^2 - ca)$$

$$= (c - a)[b(c - b) + a(b - c)] = (a - b)(b - c)(c - a).$$

方法技巧: 以上三阶行列式均是用对角线法则展开的,本章后面学习了行列式的性质后,运用性质可以更简单地得到它们的结果.

例3 设 $a + b + c = 0$, 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值为_____.

解题提示 按对角线法则展开,再分解因式.

解 答案为0.

因为 $a+b+c=0$, 所以 $c=-a-b$, 按对角线法则有

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3ab(-a-b) - a^3 - b^3 - (-a-b)^3$$

$$= -3a^2b - 3ab^2 - a^3 - b^3 + (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2)$$

$$= 0.$$

例 4 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的展开式中, x 的系数是_____.

解题提示 不必全部展开, 从对角线法则分析含 x 的项即可.

解 答案为 2.

根据对角线法则, 行列式中含有 x 的项有两项: $1 \cdot x \cdot 1$ 项取正号, $(-1) \cdot x \cdot 1$ 项取负号, 两项合并后为 $2x$, 故 x 的系数是 2.

题型 II 求解有关行列式的方程

题型解析 有关行列式方程的求解, 通常是把行列式展开成多项式, 从而把方程变换为一般的代数方程来解决.

例 设 m 为方程 $\begin{vmatrix} \lg x^2 & \lg x & 1 \\ \lg x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的根, 则 m 的值为().

- A. 10 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{10}$ D. 1

解 本题选 A.

$$\begin{vmatrix} \lg x^2 & \lg x & 1 \\ \lg x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lg x^2 + \lg x + \lg x - 1 - \lg x^2 - \lg^2 x$$

$$= 2\lg x - 1 - \lg^2 x = -(\lg x - 1)^2,$$

故原方程等价于 $\lg x = 1$, 于是其解为 $x = 10$, 即 m 的值为 10.

题型 11 二阶和三阶行列式的应用

题型解析:通过计算二阶和三阶行列式,可以求解二元一次和三元一次方程组.

第二节 n 阶行列式

|| 本节知识回顾

知识点 1 排列

1. 定义的理解

一个 n 级排列,是把 n 个不同的数经过排序而组成的有序数组.

2. 排列数目

n 个不同的数,能够组成的排列总数为 $p_n = n!$.

知识点 2 逆序

1. 逆序

在一个排列中,说两个数构成一个逆序,是指它们的排序与自然次序不同,也就是发生了“前大后小”的情况.

2. 逆序数

一个排列中所有逆序的总数,叫做这个排列的逆序数.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

3. 奇排列,偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列;

逆序数为偶数的排列称为偶排列.

4. 重要结论

排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

知识点 3 对换

对换,是一种调整排列顺序的手续.

将排列中两个元素对调,而保持其余的元素不动,就构成一个对换.

对换的性质

- (1) 将一个排列中的任意两个元素进行一次对换,排列改变奇偶性;
- (2) 将奇排列变成标准排列所需的对换次数为奇数,将偶排列变成标准排列所需的对换次数为偶数;
- (3) n 个自然($n > 1$)共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇、偶排列各占一半.

知识点 4 n 阶行列(重点、难点)

n 阶行列式,是由 n 行 n 列共 n^2 个数组成的一个算式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素($i, j = 1, 2, \cdots, n$).

- (1) 行列式表示是由取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和;
- (2) 运算结果中,列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列, $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为此排列的逆序数, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和,由于共有 $n!$ 个排列,故此代数和中有 $n!$ 项.

小提示

当把行列式每一项的行标按自然顺序排列时,各项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的逆序数,一般项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$, 即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时,该项取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时,该项取负号.

- (1) n 阶行列式展开共有 $n!$ 项;
- (2) 每项 n 个元素,分别位于不同的行和不同的列(即每行每列各有一个元素);
- (3) 在总共 $n!$ 项中,正项和负项各半,即 $\frac{n!}{2}$ 项带正号, $\frac{n!}{2}$ 项带负号($n > 1$).

对 k^2 个元素,按原来顺序构成一个 k 阶行列式 M ,称为 D 的一个 k 阶子式.

1. 几种特殊行列式

下三角形行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn};$$

上三角形行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn};$$

对角行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn};$$

范德蒙行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

方程组的系数行列式: 含有 n 个方程的 n 元线性方程组的一般形式为

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1.$$

 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. 其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 构成一个 n 级排列, 当 $j_1, j_2, \cdots, j_n$
取遍所有 n 级排列时, 则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项.

2. 几种常用行列式的代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1};$$

典型例题解析

题型 I 排列逆序数的计算

题型解析 在求排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数时, 可以从第 2 个数开始, 依次统计 $j_i (i = 2, 3, \cdots, n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数) τ_i , 设排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n$.

例 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

(1) 5 3 2 1 4;

(2) $n (n-1) \cdots 2 1$;

(3) 1 3 5 $\cdots (2n-1)$ 2 4 6 $\cdots (2n)$.

解 (1) $\tau(5 3 2 1 4) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$, 为奇排列;

(2) $\tau[n(n-1) \cdots 2 1] = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$;

由于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性必须根据 n 而定, 故讨论如下:

当 $n = 4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数.

题型 II 关于排列逆序数的证明问题

例 设排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 的逆序数为 k , 证明排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数是 $C_n^2 - k$.

解 将排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 倒排后, 其任意两个元素 $x_i, x_j (i \neq j)$ 之间的顺序发生了颠倒, 因而在原排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 和倒排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 中, 任意两个元素均存在唯一的一个逆序, 于是两个排列的逆序数之和必为 C_n^2 , 即

$$N(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) + N(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) = C_n^2,$$

由题设 $N(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) = k$, 得

$$N(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) = C_n^2 - N(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) = C_n^2 - k,$$

即所求的逆序数为 $C_n^2 - k$.

题型 III 利用对换的性质确定排列的属性

例 在 n 个自然数 ($n > 1$) 构成的 $n!$ 个排列中, 奇排列有 _____ 个.

解 答案为 $\frac{n!}{2}$.

设所有 $n!$ 排列构成集合 S . 在 S 中任取一排列, 不妨设其为 n 排列, 若对换其任意两个元素 (例如前两个), 则排列改变奇偶性, 新发现的排列即为一个偶排列, 自然也属于 S . 同理, S 中每一偶排列对换两个元素后也对应一个奇排列, 因此 S 中奇排列和偶排列的个数相等, 于是奇偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

题型 I 计算特殊行列式

题型解析 对于一些特殊的行列式, 可以根据定义求得其值. 由于行列式各项是不同行不同列元素的乘积, 所以当零元素较多时, 展开式中就有很多项为零, 只需分析非零元素构成的项即可.

例 行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的值为 _____.

解题提示 在总共 $5! = 120$ 项中, 有很多项为零, 只需考虑非零项即可.

解 答案为 216.

根据行列式的定义, 每一非零项由不同行不同列的 5 个非零元素构成, 第一行的非零元素只有“1”, 它位于第四列, 所以第二行的非零元素就不能在第四列中选取, 只能选取第三列的“2”.

同理, 第三行的非零元素不能在三、四列中选, 只有选第二列的“3”, 第四行只能选第一列的“4”, 由于前四列已被选过, 第五行的元素只能选取剩下的第五列的“9”了, 这样非零项只有一项

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 9 = 216.$$

因为所在列依次为 4, 3, 2, 1, 5, 而

$$(-1)^{N(43215)} = (-1)^6 = 1.$$

所以该项的符号为正,故行列式的值为 216.

第三节 行列式的性质

本节知识回顾

知识点 1 转置行列式

一个行列式的转置行列式,是把行列式的行与列按顺序互换,所得到的新行列式.

若行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则其转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

小提示 (1) D 也是 D^T 的转置行列式;

(2) 转置行列式也可以看作以主对角线为轴,把行列式翻转 180° 的结果.

知识点 2 行列式的性质描述

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^T$.

小提示 本性质说明行列式中“行”与“列”的地位是相同的,因此凡是对行立的性质,对列也同样成立.

性质 2 一行列式中任何两行(或两列)互换位置,行列式的值变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k ,等于用数 k 乘以此