# 高中数学常见错解剖析

陈昌明　编著

GAOZHONG SHUXUE CHANGJIAN CUOJIE POUXI

四川大学出版社

# 高中数学常见错解剖析

陈昌明　编著

四川大学出版社

责任编辑:王　平
责任校对:李思莹
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:李　平

**图书在版编目(CIP)数据**

高中数学常见错解剖析 / 陈昌明编著. —成都：四川大学出版社，2005.1
ISBN 7－5614－2955－X

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 137297 号

书名　**高中数学常见错解剖析**

编　著　陈昌明
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号（610065）
发　行　四川大学出版社
印　刷　郫县犀浦印刷厂
开　本　850mm×1 168mm　1/32
印　张　11.5
字　数　282 千字
版　次　2005 年 1 月第 1 版
印　次　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　数　0 001～2 000 册
定　价　17.00 元



◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：www. scupress. com. cn

# 前　言

望子成龙,哪个家长不希望自己的子女如愿以偿地考起大学(进重点、上名牌)。欲达此目的,孩子手中有一本好书就是最重要的条件之一。一般说来,有经验的教师都有这样的体会:在教学概念、定义、定理、公式、法则以及解题过程中,老师如果只是从正面反复讲,提醒学生注意这样、注意那样,有时效果不一定好;如果针对学生经常出现的错误讲,往往会收到事半功倍的效果。人们所说的"错误常常是正确的先导"的道理就在于此。

现在,书店里的参考书籍琳琅满目,杂志文章浩如烟海,但对高中数学解题错误进行剖析的书却甚少。所幸的是,编者注意到北京师范大学出版社于 1993 年为小学生出版了名为《错误百出》的参考书,安徽省少年儿童出版社于 1998 年为小学生出版了名为《小学数学易错辨析手册》的参考书,并从中得到启示:高中生呢?难道高中生就不需要这样的书?答案显然是否定的。对社会、学校进行抽样调查的结果表明,百分之百的学生、学生家长和老师都渴望着有大量的这样的书来指导和帮助学生剖析解数学题产生错误的原因,纠正错误。于是,本书就在这样的背景下编写出来了。本书的出版,对高中生解题能力的提高,对高中生在解题中尽量避免出错,无疑将起到良好的帮助作用。

本书的内容分上篇、下篇和附篇。上篇主要是按学科体系进行编排,由第一章代数、第二章立体几何、第三章解析几何组成。下篇由第四章最值问题、第五章逻辑论证问题、第六章充要条件问题、第七章心理和策略因素问题组成。附篇由第八章总复习性质的六套高考数学模拟自测试题及参考答案或提示组成。

需要说明的是，下篇的四章独立成篇，主要考虑到两点：一是这四章涉及上篇的各门学科，若把其纳入上篇，将出现多次不必要的重复，理路不顺，不便于读者阅读。二是这四章综合性强，且量多难度大，单独设立篇章有利于读者分析比较，有利于读者掌握知识和突破难点。

本书对高中生有一定的指导作用，可使学生在学习数学知识时尽量避免出现书中所指出的错误；就是错误出现了，学生也能知道错在哪里，为什么会错，从而最终达到提高数学学习成绩的目的。

本书对高中教师的教学有一定的参考作用，可使教师在教学中对学生常错的地方心中有数，注意运用辨析、对比等方法预防这些错误，使学生在学习中少出现这些错误，从而提高数学教学质量。

本书对高中生家长辅导子女学习数学有一定的帮助作用，可使家长知道孩子在学习数学时出现的错误是属于知识性的呢，还是属于心理性的？以便有的放矢，帮助孩子及时纠正错误，使孩子学好数学。

本书在编写过程中参考了有关教材和学术杂志，由于篇幅所限，只将主要的参考文献列于书后，在此，一并向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2003 年 11 月于重庆·秀山

# 目　录

## 上　篇



## 下　篇



## 附　篇

# 上篇

# 第一章　代　数

## 第一节　幂函数、指数函数和对数函数

［说明］　函数是中学数学中最重要的基本概念之一，它贯穿和渗透于中学数学各单元之中，既是中学数学的一大重点，又是中学数学的一大难点．同学们在初中阶段学习了函数概念以及函数关系的表示法，了解了正比例函数、一次函数、反比例函数、二次函数等最简单的函数．在高中阶段进一步学习函数，可以说是对函数概念的再认识．在此阶段，学生还将学习集合与函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数等基本初等函数，从而获得比较系统的函数知识，加深对函数概念的理解．但在学习中，学生们往往不能很好地从实例出发，将感性认识提高到理性认识；不能很好地注意运用对比的方法，反复比较几个意义相近或从属关系的概念的异同；不能很好地结合直观图形或函数图形来说明较抽象的概念和性质等，因而导致下列常见错误的发生．

### 一、忽视函数的值域而致错

**例 1.** 设
$$P = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$$
$$Q = \{y \mid y = 2 - |x|, x \in \mathbf{R}\}$$
求 $P \cap Q$.

**【错解】** 由
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - |x| \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

所以
$$P \cap Q = \{(-1,1),(1,1)\}$$

**【剖析】** 上述解的错因在于题目要求的是求 $P$ 这个函数的值域与 $Q$ 这个函数的值域的交集，而不是求 $P$ 的表达式 $y = x^2$ $(x \in \mathbf{R})$ 和 $Q$ 的表达式 $y = 2 - |x|$ $(x \in \mathbf{R})$ 方程中 $x, y$ 的值的交集.

**【正确解】** 由 $P = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 知 $P = \{y \mid y \geqslant 0\}$，由 $Q = \{y \mid y = 2 - |x|, x \in \mathbf{R}\}$ 知 $Q = \{y \mid y \leqslant 2\}$，所以 $P \cap Q = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

**例 2.** 求函数 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ 的单调区间.

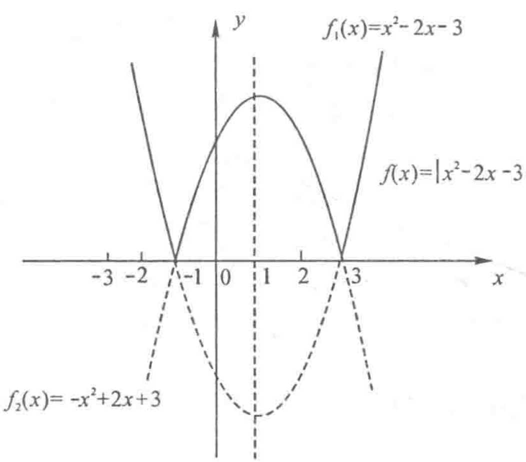


图 1－1

**【错解】** 由 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ 得

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x-3, & x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)\\ -x^2+2x+3, & x\in[-1,3]\end{cases}$$

由图 1－1 可知，$f(x)$ 的单调增区间是 $[-1,1]\cup[3,+\infty)$，$f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,-1]\cup[1,3]$.

**【剖析】** 上述解的错因在于“$\cup$”的使用不当. 虽然

$$f(x)=|x^2-2x-3|$$

在 $[-1,1]$，$[3,+\infty]$ 上分别递增，但在其并集上并不递增. 例如，$0\in[-1,1]$，$3\in[3,+\infty)$，显然有 $0<3$，而 $f(0)=3$，$f(3)=0$，知 $f(0)\not<f(3)$.

**【正确解】** 根据上述剖析，只需在上述解中将符号“$\cup$”换为“,”就行了，即 $f(x)$ 的单调增区间是 $[-1,1]$，$[3,+\infty)$，$f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,-1]$，$[1,3]$.

**例 3.** 求函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}\quad(x<1)$ 的反函数.

**【错解】** 由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$，将 $x$，$y$ 互换，得原来函数的反函数为 $y=\dfrac{x+3}{x-2}\quad(x\neq2)$.

**【剖析】** 根据反函数的定义，在求原来函数的反函数时，必须已知或先确定原来函数的值域. 上述错解的原因就在于反函数的定义域不是由原来函数的值域所确定，而是根据反函数解析式的意义所决定.

实质上，$y=\dfrac{x+3}{x-2}\quad(x\neq2)$ 是 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}\quad(x\neq1)$ 的反函数.

**【正确解】** 易证 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}\quad(x<1)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是减函数，故其值域是 $(-\infty,2)$；

由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 解得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$,将此式的 $x,y$ 互换,即得原函数的反函数是 $y=\dfrac{x+3}{x-2}\quad(x<2)$.

**注:**经验告诉我们,为了避免与上述类似的错误,可将求反函数的两个步骤改为如下三个步骤,即

① 求 $f(x)$ 的值域(即求 $f^{-1}(x)$ 的定义域);

② 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

③ 互换 $x,y$ 得出反函数 $y=f^{-1}(x)$,并注明定义域.

## 二、忽视定义域而致错

**例 4.** 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2+(x+1)^0$;

(2) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(3) $f(x)=x+1$.

**【错解】** (1) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^2+(-x+1)^0\\&=x^2+(x+1)^0=f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\\&=(-x-1)\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\\&=(x-1)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 因为

$$f(-x)=-x+1\neq-f(x)$$

而且 $-x+1\neq f(x)$,所以 $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

**【剖析】** 奇函数、偶函数定义中隐含着一个重要条件:有奇偶性的函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 必是一个关于原点的对称区间. 若一个函数的定义域关于原点不对称,则这个函数必无奇偶性.

题(1) 中的 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,是关于原点不对称的.

题(2) 与题(1) 同理. 事实上,由 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 可得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$,是关于坐标原点不对称的. 故 $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

题(3) 乍一看,答案是对的,但理由不妥. 错因在于:其一,$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,$0\in\mathbf{R}$,且 $f(-0)=f(0)$,因而 $-x+1\neq f(x)$ 并非对定义域 $\mathbf{R}$ 内的一切值都适合;其二,由函数奇偶性定义本身所具有的充要性可知,判断一个函数是非奇非偶函数,并不要求对函数定义域内的任一 $x$ 都要有等式 $f(-x)=-f(x)$ 和等式 $f(-x)=f(x)$ 均不成立.

**【正确解】** (1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,是关于坐标原点不对称的,所以 $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

(2) 由 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 可得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$,是关于坐标原点不对称的,所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 改用下述解法,更觉简便. 如果函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 有某一个 $x_0(x_1)$,使得

$$f(-x_0)\neq-f(x_0)\quad(f(-x_1)\neq f(x_1))$$

则 $f(x)$ 在 $D$ 内是非奇非偶函数. 例如,本例第(3) 小题可简解为:

因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,且 $\pm 1 \in \mathbf{R}$,但 $f(-1) \neq \pm f(1)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内是非奇非偶函数.

从上面的例子可以看出:判断函数的奇偶性不能离开函数的定义域,只有当函数的定义域关于坐标原点对称时,才有必要讨论它的奇偶性.

**例 5.** 讨论函数 $y = \log_a(x^2 - 3x + 2)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的单调性.

**【错解】** 令 $u = x^2 - 3x + 2$,则 $y = \log_a u(a > 0$ 且 $a \neq 1)$. 由复合函数的增域性可知:当 $a > 1$ 时,$y = \log_a u$ 是增函数,其单调性与函数 $u$ 的单调性相一致;当 $0 < a < 1$ 时,$y = \log_a u$ 是减函数,其单调性与函数 $u$ 的单调性相反.

**【剖析】** 上述分析虽然正确运用了复合函数的单调性,但却忽略了复合函数的定义域,结果是功亏一篑.

**【正确解】** 由 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 得出函数 $y$ 的定义域为:

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

令
$$u = x^2 - 3x + 2 \quad (x \in D)$$

则
$$y = \log_a u \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

又因为函数 $u = x^2 - 3x + 2$ $(x \in D)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数,而在 $(2, +\infty)$ 上是增函数,故当 $a > 1$ 时,函数 $y$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数,在 $(2, +\infty)$ 上是增函数;

当 $0 < a < 1$ 时,函数 $y$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数,在 $(2, +\infty)$ 上是减函数.

**例 6.** 已知偶函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,求证:$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是减函数.

【错证】 在 $x \in (1, +\infty)$ 上任取 $x_1, x_2$ 且 $x_1 < x_2$,因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,所以 $f(x_1) < f(x_2)$.

因为 $f(x)$ 是偶函数,由 $f(x_1) < f(x_2)$ 可得

$$f(-x_1) < f(-x_2)$$

又因为 $-x_1 > -x_2$, $-x_1, -x_2 \in (-\infty, -1)$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是减函数.

【剖析】 按单调函数定义,本题证明应取 $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ 且 $x_1 < x_2$,而上述证明取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$,从而使证明过程与正确证法的“走向”相反,所以出错.

【正确证明】 在 $(-\infty, -1)$ 上任取 $x_1, x_2$ 且 $x_1 < x_2$. 因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(-x_1) = f(x_1)$, $f(-x_2) = f(x_2)$. 由假设 $x_1 < x_2$ 可知 $-x_1 > -x_2$. 又已知 $f(x)$ 在 $(1, -\infty)$ 上是增函数,所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$,即 $f(x_1) > f(x_2)$,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是减函数.

## 三、认为函数 $y = f(x+1)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x+1)$ 而致错

例 7. 已知

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-3}$$

函数 $g(x)$ 的图形与 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称,则 $g(3) =$ ________.

【错解】 根据题意,$g(x)$ 是 $f^{-1}(x+1)$ 的反函数,而 $f^{-1}(x+1)$ 的反函数是 $f(x+1)$,所以

$$g(x) = f(x+1) = \frac{2(x+1)+3}{(x+1)-1} = \frac{2x+5}{x}$$

故得 $g(3)=\frac{11}{3}$.

**【剖析】** $f(x+1)$ 的反函数是 $f^{-1}(x+1)$ 吗?我们不妨来求 $f(x+1)$ 的反函数.

设 $y=f(x+1)$,则 $x+1=f^{-1}(y)$,$x=f^{-1}(y)-1$,互换 $x,y$ 得 $y=f(x+1)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)-1$,所以 $f(x+1)$ 的反函数不是 $f^{-1}(x+1)$. 反函数的定义是对自变量 $x$ 而言,不是对 $x+1$ 而言.

故上述解法是错误的.

**【正确解】** 由 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ 得 $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$,即

$$f^{-1}(x+1)=\frac{x+4}{x-1}$$ 的反函数是其本身

因为 $g(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,所以 $g(x)$ 是 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数.

故 $g(x)=\frac{x+4}{x-1}$,$g(3)=\frac{7}{2}$.

## 四、认为若 $f(x+1)$ 是偶函数,则 $f(-x-1)=f(x+1)$ 而致错

**例 8.** 如果函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数,那么函数 $y=f(x)$ 的图形关于__________对称.

**【错解】** 根据偶函数的定义,若 $f(x)$ 是偶函数,则

$$f(-x)=f(x)$$

同样,这里已知 $f(x+1)$ 是偶函数,则

$$f(-x-1)=f(x+1)$$

下面便无法得出 $f(x)$ 的图形的对称性.

【剖析】 上述解错误的原因是没有正确理解偶函数的定义.偶函数的定义是对 $x$ 而言,不是对 $x+1$ 而言.

【正确解 1】 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以

$$f(-x+1)=f(x+1)$$

即

$$f(1-x)=f(1+x)$$

显然 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=1$ 对称.

【正确解 2】 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以其图形关于 $y$ 轴(直线 $x=0$)对称. 将 $f(x+1)$ 的图形向右平移1个单位,即得到函数 $y=f(x)$ 的图形,显然 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=1$ 对称.

## 五、忽视零指数幂、负指数幂底数不能为 0 而致错

例 9. 函数 $y=\dfrac{x-(x-2)^0}{\sqrt{x-1}}$ 中自变量 $x$ 的取值范围是____________.

【错解】 因为$\sqrt{x-1}$ 在分母上,所以 $x-1>0$,即 $x>1$.

【剖析】 当 $x=2$ 时,$(x-2)^0$ 无意义,所以自变量 $x$ 的取值范围应当把 $x=2$ 排除.

【正确解】 根据剖析,有 $x>1$ 且 $x\neq 2$ 即为所求.

**例 10.** $(x^2+2x+1)^0=x^2-2x-2$,则 $x=$________.

【错解】 由题设得 $x^2-2x-2=1$,解得 $x_1=-1,x_2=3$.

【剖析】 当 $x=-1$ 时,$(x^2+2x+1)^0$ 无意义,应把$x=-1$ 排除.

【正确解】 由题设得 $x^2-2x-2=1$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$.