李成章教练奥数笔记

第3卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第3卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第三卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿.书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法.

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记. 第3卷/李成章著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5567-2

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第191111号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451—86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张15.25 字数169千字
版　　次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5567-2
定　　价 38.00元

◎

目录

一　图论(二)　//1

二　条件子集问题　//23

三　体育问题　//68

四　考试问题　//91

五　均匀排列法　//117

六　分组构造法　//131

七　立体几何中的组合问题　//152

八　集合　//177

编辑手记　//221

一 图论（二）

1 设图G中每点度数都是3，求证图G中必有一个圈，它的边数不能被3整除．（2000年全俄数学奥林匹克）

证 我们来证明如下的加强命题：图G中每点度数都不小于3，则图中必有一个圈，它的边数不能被3整除．

若不然，则存在一个每点度数都不小于3的图，其中任何一个圈的边数都能被3整除．

考察具有上述性质的顶点数目最小的图G．显然，图G中的边数大于顶点数，所以必有圈．将图中边数最小的圈记为Z．于是Z上的任何两个不相邻的顶点之间都无边相连，否则将导致边数更少的圈，而与Z的边数的最小性矛盾．又因每个顶点的度数都不小于3，故Z上每个顶点都至少有1条边与圈外顶点相连，而且这些连出的边中，不能有两条边连到同一个顶点．否则，设Z上的顶点A和B都有边与Z外的顶点C相连，则圈Z被A和B分成的两部分中至少有一部分的边数模3不为1，从而加上ACB的圈上的边数不是3的倍数．

假设存在连结Z上的顶点A和B的链S，它与Z没有公共边，则则因S与Z被A和B分成的两段中的每一段所合成的圈的边数都是3的倍数，Z的边数也是3的倍数，所以S的边数也是3的倍数．

下面构造一个新图G_1：把图G中圈Z上的所有点合并成一个顶点D，保留G中不在圈Z上的所有顶点及它们之间的边．原来Z外的顶点与Z上某顶点有边相连时，则在新图G_1中将该顶点与D之间连一条边．由于图G中的圈Z至少有3个顶点，每点至少向圈外连出1条边，故点D的度数不小于3．又因其它点在G_1中度数不变，当然都不

小于3，而且易见，新图G_1中每个圈的边数都能被3整除。但G_1中顶点数小于G的顶点数，此与G的顶点数的最小性矛盾。所以，图G中必有一个圈的边数不能被3整除。

另一方面，连结A、B两点的链S当然存在。由于点A和B各有1条边连向圈外，记为A_1、B_1，因A_1、B_1度数均为3，故可接着一条边走向新点A_2、B_2，继续这个过程，由于图中只有有限多个顶点，故必有相连的时刻。于是连结A、B两点的链就产生了。

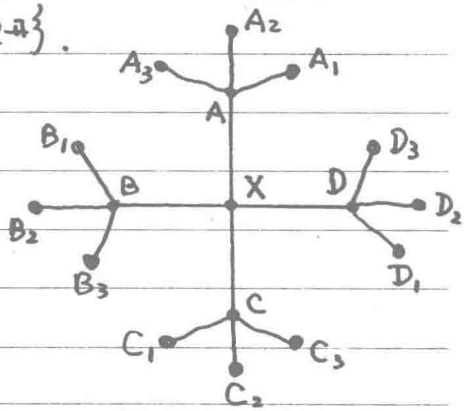
2 某次聚会共有17人，其中每个人都恰好认识另外的4个人，求证存在两个人，他们彼此不认识且没有共同认识的人．

（1992年独联体数学奥林匹克）

证 若不然，则对于17人中的任何2人，都或者两人认识，或者两人有一个共同认识的人．

用17个点来代表这17个人，如果两人认识，则在相应两点之间连一条线段，于是得到一个图，且在这个图的任何两点间，或者有一条连线，或者有一个张角（即存在第3点与这两点都有连线）．

由于图中每点都是4度，即都有4条连线，故以该点为顶点的张角恰有6个，所以图中共有张角 $6\times17=102$ 个．又因图中共有 $4\times17\times\frac{1}{2}=34$ 条边，图中共有点对 $C_{17}^{2}=\frac{1}{2}\times17\times16=136$ 个，而 $102+34=136$，所以，图中既无三角形又无四边形．

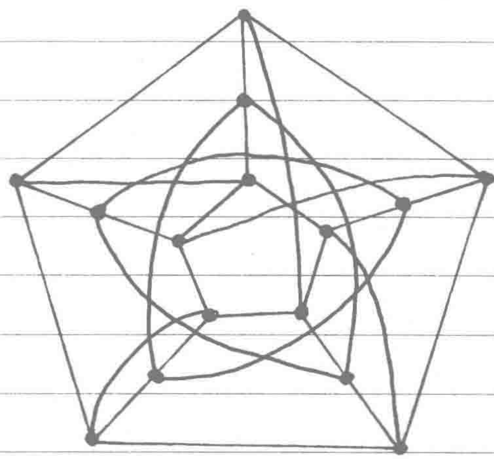


考察点X，设它的4条边的另4个顶点分别为A，B，C，D．又因这4点也都是4度，除与点X相连之外每点都与另3点相连．由于图中没有四边形，故这4组12个点互不相同．又因图中没有三角形，所以A，B，C，D之间没有连线且每组的另3点之间也都没有连线．这样一来，这12点中的每一点都要向其它组中的顶点再连出3条线．对于每一条这样的线，比如 A_3B_1，就导致一个以X为一个顶点的五边形 A_3B_1BXA．由于这样的连线共有 $3\times12\times\frac{1}{2}=18$ 条，从而图中共有18个以顶点X

为一个顶点的五边形. 由对称性知17个顶点都是如此, 故图中共有18×17个五边形(包括重复计数). 由于五边形的5个顶点各被计数1次. 所以在上述计数过程中, 每个五边形恰被计数5次. 故上面的总数应为5的倍数. 但18×17不是5的倍数, 矛盾. $\boxed{\text{换序求和法}}$

2′ 若将2题中的人数改为15人, 问在同样条件下, 同样的结论是否仍然成立?

解 右图中, 任何两点之间都或者有边相连, 或者有一个张角张在两点之间且15个顶点每点都是4度. 所以, 2题的结论这时不再成立.



2″ 若将2题中的人数改为16人, 在同样条件下, 同样的结论是否仍然成立?

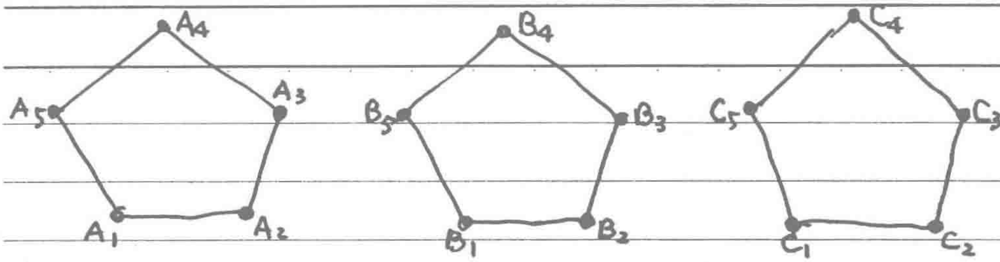
解 考察16个点中的任一点X. 这时只能如下图所示:

由于与点X无边相连的11个点与X之间均有张角，故只能是图中所示的状态。图中存在一个以X为一个顶点的四边形XBEC。由对称性知，图中必存在4个四边形，两两之间没有公共顶点。这导致图中共有8个点对，每对两点之间均无连线但却都有两个张角。

图中16个顶点，每点均为4度，故图中共有32条边和96个张角。16点共构成$C_{16}^{2}=120$个点对。由于$32+96=128$而上面已有8个点对之间各有两个张角，故当结论不成立时，余下的每个点对的两点之间或恰有1条边，或者恰有1个张角。这样一来，上图中每组3点（点E属于两组）之间不能再有连线。

象在题2的证明中一样，我们来考察图中以X为一个顶点的五边形的个数。上图中已有16条边，而另外的16条边，都是连结在4组中不同组的两个顶点的。从图中可以看出，从点E连出的两条边，每条边都导致产生两个五边形，而另外的14条连线，会产生一个五边形。所以，图中共有18个以X为一个顶点的五边形。注意，若顶点F与G之间有边相连，虽然产生两个五边形，但却只有一个以X为一个顶点，所以只计数一次。这样一来，图中共有18×16个五边形。在这个计数中，每个五边形恰被计数5次，但18×16却不是5的倍数，矛盾。这表明2题的结论仍然成立。

注 若将2题中的图形拆开，还可举例如下：



连结另外15条线如下：

A_1B_1，A_2B_3，A_3B_5，A_4B_2，A_5B_4，

A_1C_1，A_2C_3，A_3C_5，A_4C_2，A_5C_4，

B_1C_1，B_2C_3，B_3C_5，B_4C_2，B_5C_4.

容易验证，每两点之间或有连线，或有张角，或二者兼有之.

3　在凸多面体的每条棱上都标上一个箭头，使得多面体的每个顶点都分别至少有1个箭头指向它，至少有一个箭头离开它. 求证存在多面体的两个面，使得分别在二者的边界上可以沿着箭头所指的方向环绕周界走一圈.（1975年基辅，1987年西德）

证1　按题设，对于多面体的每个顶点，都至少可以沿1条棱向它走来，也至少可以沿另一条棱离它而去. 所以在多面体上没有“死胡同”. 于是能够从一个顶点出发，沿箭头所指的方向走过一条由首尾相接的棱组成的任意长的链. 由于顶点数有限，故在某个时刻首先回到一个已经走过的顶点E. 因此存在一条封闭的由首尾相接的棱组成的从顶点E出发又走回顶点E的圈L，它将多面体的表面分成两部分G和H，而圈L是两部分的公共边界. 设G是在圈L前进方向的左方.

考察G中的所有这样的圈(包括L在内). 对于每个这样的圈l，其中所包含的面的个数记为$f(l)$，称为圈l的容量. 设圈l_0是所有这样的圈中容量最小的圈之一. 我们断言，$f(l_0)=1$，即圈l_0恰好环绕1个面.

$\boxed{\text{圈+极端原理}}$

若$f(l_0)>1$，则在l_0所环绕的范围内，必存在一条棱K，它不在l_0上，但有1个端点在l_0上. 设这个顶点为P，不妨设棱K上的箭头指向棱K的异于P的另一个顶点P_1. 于是可以从圈l_0上的顶点P出发沿着棱K走下去，直到或者回到l_0的另一个顶点或者回到方才走过的链上的某一个顶点为止. 无论哪种情形，都得到一个新圈，其容量小于$f(l_0)$，此与$f(l_0)$的最小性矛盾.

同理，在H中也可以找到一个容量为1的圈l_1. 由于凸多面体至

少有4个面，所以 h_0 和 h_1 不能都为 k，故 $h_0 \neq h_1$。可见，h_0 和 h_1 即为所求。

证2 设多面体共有 m 个顶点，第 i 个顶点的度数 $d(A_i)=d_i$，指向 A_i 的箭头数和离开 A_i 的箭头数分别为 d_{1i}，d_{2i}，于是

$$d_{1i}+d_{2i}=d_i,\quad d_{1i}\geq 1,\quad d_{2i}\geq 1,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

在一个面的周界上的顶点，若从它发出的两条棱上的箭头都指向该顶点或都离开该顶点，则称该顶点为"坏点"。注意，"坏点"是相对于面而言的，一个顶点完全可以在一个面上是"坏点"，而在另一个面上不是"坏点"。不能沿周界边上的箭头方向环绕一周的面称为"坏面"。不是"坏面"的面称为"好面"。我们的问题就是证明多面体至少有两个"好面"。显然，每个坏面上至少有两个坏顶点。

注意，顶点 A_i 至多是 $(d_{1i}-1)+(d_{2i}-1)$ 个面的坏顶点。于是整个多面体的所有面的坏顶点的个数至多为　　计数证明法

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(d_{1i}-1)+(d_{2i}-1)\right]=\sum_{i=1}^{m}(d_i-2).$$

多面体的棱数为 $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}d_i$，由多面体的欧拉定理知，面数为

$$f=2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}d_i-m.$$

坏面的个数

$$f'\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}d_i-m,\qquad f-f'\geq 2.$$

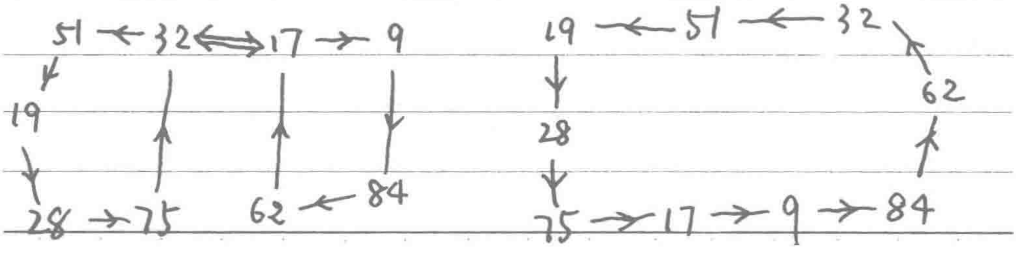
可见，多面体上至少有两个好面。

4 托尔斯泰全集共100卷杂乱无序地排放在书架上，每次允许将其中具有不同奇偶性卷号的任意两卷交换位置，于是存在正整数n，使得无论开始时如何摆放，至多交换n次总可以变成按照卷号摆放在书架上，求n的最小值。 （1990年圣彼得堡数学奥林匹克）

解 用100个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 来分别代表书架上的100个位置。当第i个位置上放着第j卷书时($i \neq j$)，就在点 A_i 与 A_j 之间连一条线并标上一个指向 A_j 的箭头。全部标好之后，我们得到一个有向图，其中每点的度数都为2或0，而在度数为2的每个顶点，都恰有1个箭头指向它，也恰有1个箭头离开它。注意，顶点 A_i 度数为0意味着第i个位置上恰好放有第i卷书。当第i卷书放在第j个位置而第j卷书放在第i个位置时，点 A_i 与 A_j 之间恰有两条连线，且其上箭头的方向相反。这时可以认为两个顶点及两条边也构成一个有向圈。因此，所得到的图不是简单图。 圈的分解定理+子图法

去掉度数为0的孤立顶点，便得到一个每点度数皆为2的有向偶图，于是由图论的相关定理知，它可以分解为若干个两两没有公共顶点的圈。

如果交换位置的两本书处于两个不同的圈中，则交换后两个圈就变成一个圈：



当把孤立点也视为一个圈时，则将圈上一本书与孤立点的书换位时，也是两个圈变成一个圈，我们将这样的变换称为"化合"。如果将同一个圈中的两本书换位时，则一个圈变成了两个圈。当然，若一个圈上相邻的两本书换位时，则会出现一个圈退化为孤立点的情形，而这正是我们所希望出现的情形。我们称这样的换位为"分解"。

假设在分解出的所有圈中，有 a 个圈仅由偶数号的顶点组成，有 b 个圈仅由奇数号的顶点组成。显然有 $0\leqslant a,b\leqslant 25$。不妨设 $b\leqslant a$，于是经过 a 次"化合"之后，便可使得每个圈中都既有奇数号又有偶数号的顶点。这样一来，只要依次对每个圈作"分解"换位就可以了。实际上，每次"分解"都可以在一对相邻顶点上进行，从而使其中至少 1 点成为孤立点，且当圈中奇（偶）数号顶点较多时，就适当选择相邻顶点对，使得换位后奇（偶）数号顶点成为孤立点。于是分解过程可以进行到底，即全部顶点都成为孤立点，而且每个圈的最后一次分解，同时使两个顶点成为孤立点。可见，这样的分解至多进行 99 次，从而整个换位过程至多进行 124 次换位。

另一方面，当 50 个偶数号顶点组成一个圈而 50 个奇数号顶点每两个组成一个共组成 25 个圈时，为了消灭奇数号的圈，至少要进行 25 次"化合"换位。此外，设在整个变换过程中共产生 k 个既有偶数号又有奇数号的圈，则因原来只有一个圈中有偶顶点，故共需进行 $k-1$ 次不产生孤立点的分解。设这 k 个圈的顶点个数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，于是 $n_1+n_2+\cdots+n_k=100$。由于有 n_j 个顶点的圈要变成 n_j 个孤立点至少要进行 n_j-1 次分解，所以为使 100 个点全部成为孤立点所要进行的分解次数至少为

$$(k-1)+(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)=99.$$

这表明在这种情况下，至少要进行124次换位.

综上可知，所求的n的最小值为124.

※5　给定空间中9点，其中任何4点都不共面，在这9点间连结若干条线段，使图中不存在四面体．问图中最多有多少个三角形？证明理由．

K_4子图．　　（1994年中国集训队测验题）

解　将9点分成3组，每组3点：$\{A_1,A_2,A_3\}$，$\{A_4,A_5,A_6\}$，$\{A_7,A_8,A_9\}$，并在任何异组两点间连一条线而同组两点间不连线，这构成一个9阶图．显然，这些线段构成的图中没有四面体且共构成$(C_3^1)^3=27$个三角形．所以，所求的最多三角形个数不小于27．　从举例入手

若9阶图中没有四面体但至少有28个三角形，则28个三角形共有84个顶点（包括重复），但图中只有9个不同顶点，由抽屉原理知存在一点A是至少10个三角形的公共顶点．　按度数分类法

(1)若点A在图中至多引出6条线，则因以点A为顶点的每个三角形都是这6条线的点A之外的另6个端点中的两点连线与点A引向此两点的两条线段构成的，于是每个三角形对应于6个端点构成的子图中的一条边．10个三角形则对应于6阶子图中的10条边．但是6阶图中有10条边时，图中必有三角形，加上点A发向这个三角形3个顶点的3条边，导致9阶图中有四面体．矛盾．所以点A在图中至少引出7条线．　子图法

(2)若点A共引出8条线，则除点A之外另8点为顶点的子图中不能有三角形，至多有16条线，从而9阶图中至多有16个三角形．

(3)若点A共引出7条线，则除点A之外的7个端点为顶点的7阶子图中不能有三角形，至多有12条边，最后一点B与A无连线，即使它与另7点间都有连线，也导致9阶图中至多有24个三角形．矛盾．所以图中不可能有28个三角形．

综上可知，图中最多有27个三角形.

注1 证明过程中用到一个大家都知道的结果：

1. 在2n阶图中若有n^2+1条边，则图中必有三角形. 所以，在没有三角形时，图中至多有n^2条线段.

2 在2n+1阶图中若有$n(n+1)+1$条边，则图中必有三角形. 所以，在没有三角形的情况下，图中至多有$n(n+1)$条边.