



统计学

主 编 ◇ 李继根



华东师范大学出版社



高校教材

高等学校经济与管理类系列教材



统计学

主 编 ◇ 李继根



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

统计学/李继根主编. —上海:华东师范大学出版社,
2015. 5

ISBN 978 - 7 - 5675 - 3567 - 1

I. ①统… II. ①李… III. ①统计学 IV. ①C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 104525 号

统计学

主 编 李继根
项目编辑 孙小帆
审读编辑 伍 平
封面设计 孔薇薇

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021 - 60821666 行政传真 021 - 62572105
客服电话 021 - 62865537 门市(邮购)电话 021 - 62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 上海丽佳制版印刷有限公司
开 本 787 × 1092 16 开
印 张 20
字 数 448 千字
版 次 2015 年 10 月第 1 版
印 次 2015 年 10 月第 1 次
书 号 ISBN 978 - 7 - 5675 - 3567 - 1/O · 263
定 价 41.00 元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021 - 62865537 联系)

目录

第1章 绪论	1
1.1 统计学思想发展简史	3
1.2 无所不在的统计学	11
第2章 数据的收集与整理	19
2.1 数据的类型与收集	21
2.2 使用图表来展示数据	33
2.3 使用数值指标来展示数据	61
第3章 概率论基础	91
3.1 随机事件与概率	93
3.2 离散型随机变量	103
3.3 连续型随机变量	114
第4章 统计量的抽样分布	125
4.1 样本均值的抽样分布	127
4.2 三大抽样分布	130
4.3 样本比例的抽样分布	136
4.4 列联表分析及其卡方检验	138
第5章 参数估计和假设检验	143
5.1 点估计	145
5.2 假设检验	147
5.3 区间估计	171
第6章 方差分析	183
6.1 方差分析概述	185
6.2 单因素方差分析	187

6.3 双因素方差分析 196

第7章 一元回归分析 207

7.1 一元线性回归分析 209

7.2 一元非线性回归分析 234

第8章 指数分析 245

8.1 个体指数和综合指数 247

8.2 常见的经济指数 256

第9章 时间序列分析 263

9.1 时间序列及其描述性分析 265

9.2 时间序列的长期趋势分析 285

9.3 时间序列的季节变动分析 307

参考文献 314

第 1 章 绪 论

1.1 统计学思想发展简史

1.1.1 统计学的酝酿和创立

统计活动古已有之。在我国,战国时魏国人士托名大禹的著作《尚书·禹贡》,大约成书于公元前5世纪前后,不仅记载了禹分九州、经营国土的史迹,还条列了“九州”的地质地貌、风土人情、物产人口与贡赋情况,大概可以看作反映当时国情国力的一篇重要文献。托名商鞅的《商君书》中,明确提出:“竟内仓府之数;壮男壮女之数;老弱之数;官士之数;以言说取食者之数;利民之数;马、牛、刍藁之数。欲强国,不知国十三数,地虽利,民虽众,国愈弱至削。”显然已涉及“强国”的人口素质、资源占有、职业结构等方面的十三个数值指标。到了秦代,统计活动的突出特点则是用统计报告等法制形式确定了当时的统计工作(人口和农田统计等)。我国古代的统计可以说主要是人口调查,毕竟“民惟邦本,本固邦宁”。

在古代,这种人口调查,本质上是为了征兵和收税。英文中表示人口调查的单词 census,来源于表示收税的拉丁文 censere。古罗马帝国称为调查员(censors)的官员,每隔5年会调查登记人口和他们的财产,以便征税和抽壮丁。最后一次正规的人口调查是在公元74年举行的。在之后漫长的中世纪里,由于封建制度的制约,这种全国性的人口调查很难恢复。

欧洲早期最著名的统计活动是公元1085年征服者威廉一世(William I, 1028—1087)下令作出的“对英格兰的描述”。于是田地的所有者、名称及其面积,牛羊的只数等信息被收集后编辑成《末日审判书》(Doomsday Book)。书名的由来,是因为调查员个个如此严肃,调查内容又非常细致,加之这已是千年未行之事,使得老百姓感觉如履薄冰,好像在接受上帝使者的末日审判一样。这本书也成了之后几百年征税的依据。好在老百姓的末日最终并未到来,反倒是威廉两年后接受了上帝的“末日审判”。

在德国,从1660年起,康令(Hermann Conring, 1606—1681)以“国势学”为题在大学讲授政治活动家应具备的知识,开创了国势学派。“国势学”主要研究“国或多数国家的显著事项”,以文字叙述为主,主要用对比分析的方法(后来又加入了图表)研究国家的组织、领土、人口、资源财富和国情国力,并比较各国实力的强弱。后来,康令的再传弟子阿肯瓦尔(Gottfried Achenwall, 1719—1772)在哥廷根大学开设“国家学”课程,将国势学派的思想发展到极盛。他著有《近代欧洲各国国势学纲要》(1749年,德文版)一书,“Statistics”(统计学)一词就来源于书中给国势学起的新名称“STATISTIK”。一百多年后,国势学派从事的比较各国国情的统计实践活动,逐步发展为政府统计部门独立承担的统计工作,国势学派逐渐消亡。

在英国,服饰店店主格朗特(John Graunt, 1620—1674)通过小册子《根据死亡公报做出的自然和政治观察》(Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality, 1662年),开创了以“社会数字”引导政策研究的先河。此书一度“洛阳纸贵”,多次再版,并使得格朗特被英国国王举荐为新成立的英国皇家学会的会员。尽管思想解放的国王表态说

“他们当然应该接纳格朗特先生，而且如果以后他们能再发现像格朗特这样的商人，他们也应该毫不犹豫并毫不拖延地接纳”，但思想保守的皇家学会官员还是在数年后终止了格朗特的会员资格。在书中，格朗特通过对 1604 年到 1661 年长达 57 年里人口变动数据的分析，揭示了一系列的人口变化规律，并且还采用了不少新颖独特的数字资料整理、表示和估算方法。通过对数据的检查，格朗特提取出了各种通用的、有效的结论以及许多创新思想，其中最著名的就是**伦敦生命表**(如表 1.1 所示)，它为人口统计学研究奠定了基础。至于为什么对死亡公报如此感兴趣，他解释道：“虽然此事无足轻重，但是处理新鲜事物时，总是有着许多快乐。”并进一步明确地指出：“贸易行业和政府部门可能需要定期和准确地得到这些数据，因为如果他们知道各类人口的数量，他们就能知道人们的消费水平。”事实上，格朗特的研究成果正当其时，因为当时英国社会正处在从农业社会向商业社会转变的时代，越来越多的人开始居住到城镇之中，这使得人口问题逐渐进入了人们的视野。

表 1.1 伦敦生命表

年龄	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106
格朗特	1 000	640	400	250	160	100	60	30	10	—	—	—

在老师托马斯·霍布斯(Thomas Hobbes, 1588—1679)的重要观念“科学推理和数学论证方式在政治学中是有用武之地的”的影响下，格朗特的朋友威廉·配第(William Petty, 1623—1687)于 1676 年写成《政治算术》(Political Arithmetic, 1690 年)一书，并在死后出版。在书中，配第明确宣称要“采用数字、重量、尺度等语言表达自己的想法”，从而旗帜鲜明地开创了**政治算术学派**，被誉为“政治经济学之父”。然而配第的建议没有得到国王的热烈回应，原因主要是技术上的局限，因为当时的英国缺少一个庞大的官僚体制，同时广阔的殖民疆域也大大增加了统计的难度。

到了 1693 年，年轻的天文学家哈雷(Edmund Halley, 1656—1742)写出了一篇著名的论文，尽管几年前为了资助牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)出版《自然哲学的数学原理》(拉丁文版, 1687 年)，他放下了自己的研究工作，校对牛顿的书稿，并用极其微薄的积蓄支付了全部费用。他根据小城市布雷斯劳城 1687—1691 年的人口数据，制作出了著名的“**哈雷生命表**”，并指出“它不仅提供了国家和人口状况的概念，而且能够为我所知的现存的任何事物提供用途”，比如计算服兵役的适龄人数。该表的最大贡献，是他使用详细的数学分析法分析了年金的价值，这项工作后来促成了欧洲关于人寿保险的计算工作。遗憾的是，在他的时代，政府并没有注意到他的生命表。当然，哈雷最著名的工作是在 1705 年预测了哈雷彗星将于 1758 年返回。

人口统计学中出现的一些规律性，那时常常被视为“神意”或“神定规则”，这种**人口神学**的巅峰之作就是牧师苏斯密尔希(Johann Peter Sussmilch, 1707—1767)的《神授法则》(德文版, 1741 年)一书。撇开其神学外衣和道德说教不谈，该书系统地论述了“政治算术”，并指出“统计学是精密社会科学之一种，其任务在于发现支配人生的天然法则”。苏斯密尔希发现：事实若多一分，人事现象的规律则多一分；事实若少一分，人事现象的规律则少一分。据此他在统计中首倡大量观察法(与之对应的则是概率论中的大数定律)，使之成为一个半世纪

里统计思想的核心,直至20世纪初小样本理论兴起。

“政治算术”与“国势学”之间虽然存在互相借鉴的情形,但最终却爆发了长达百余年的争论。通过争论,人们明确意识到统计研究方法的数量特征。到了1850年,大多数人的意见是:“政治算术”无统计学之名却有统计学之实,而“国势学”则有名无实。然而“政治算术”学派当时使用的多是简单、粗略的算术方法,配第也只不过是许多材料分分类而已。这说明,此时的统计学必须要引入强有力的数学“外援”,才能获得真正的突破。这个“外援”,就是概率论。

概率论处理的是随机现象,而随机性的中心思想就是不可预测性。早期的蒙昧使得人们只能将偶然性看成是神的意志的体现,并通过抛距骨、掷骰子、抽签等占卜仪式请求“神意”。后来从这些仪式中逐渐发展出用骰子赌博等娱乐。到了中世纪,基督教教会屡屡发布禁赌令,因为赌徒总是希望不劳而获,学者们认为这种行为是不道德的,类似于抢劫。正是宗教上和道德上的这种禁忌,才使得概率理论的发展如此缓慢。

人们通常认为概率论肇始自德·梅雷(Chevalier de Méré, 原名 Antoine Gombaud, 1607—1684)向帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662)提出的**赌金分配问题**。帕斯卡苦思多年,并在1654年与费马(Pierre de Fermat, 1601—1665)通信,讨论了这个问题和其他问题,其中运用了组合理论,使用了加法定理、乘法定理和全概率公式,还引进了“值”(指的是赌注乘以获胜概率,即后来的数学期望)的概念。第二年,旅行至巴黎的惠更斯(Christiaan Huygens, 1629—1695)对轰动一时的赌金分配问题也产生了极大的兴趣。他多方收集资料,同时展开深入研究,最终将它们汇集于《论机会游戏中的推理》(法文版,1657年)一文。在文中,他从公理“赌徒愿意押的赌注不大于其获得赌金的运气的值”(“运气的值”就是后来的数学期望)出发,推导出了数学期望的3个定理,并据此解决了赌金分配问题。他在文中还深刻地指出,他所处理的“绝不仅仅是赌博问题而已,其中实际上包含了很有趣、很深刻的理论基础”。在长达50年的时间里,该文始终被作为概率论的标准教材。

事实上,赌金分配问题仅仅是概率论诞生的导火索,推动概率论形成的本质性因素是社会实践的需要,具体体现在两个方面:首先是源于经济上人们对公平获利的思考;其次则是人们对于公正的期望。当时西欧的商业气氛日渐浓厚,特别是航海商业,形同赌博,这导致高利贷等投机性活动日趋频繁,也催生了保险业的快速发展,进而产生了对“风险计算工具”的期望,以及法律上逐渐允许人们根据契约公平地追求合理的利润。当然,作为交换,契约的合伙人必须心甘情愿地交换他们的“期望”。因此问题的焦点就集中在保证期望公平上:只有契约的合伙人对预期收益即“风险的代价”拥有平等的期望,这份契约才是公平的。

政治算术的工作也吸引了一些数学家。雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705)毕生都在积极思考如何在不确定情形中应用“机会的理论”进行推理。在未完稿的《猜度术》(拉丁文版,1713年)一书中,他给出了著名的“**伯努利大数定理**”:设罐内有 r 个白球和 s 个黑球,则“随机抽取一球为白球”的概率为 $p = r/(r+s)$,从而对给定常数 c ,存在足够大的 n ,使得自此罐内进行 $N = nt$ (其中 $t = r+s$)次有放回的抽球时,取到 X 次白球的频率 X/N 接近于 p 的概率远远大于不接近 p 的概率,即

$$P\left\{\left|\frac{X}{N} - p\right| \leq \frac{1}{t}\right\} > cP\left\{\left|\frac{X}{N} - p\right| > \frac{1}{t}\right\}$$

雅各布本人非常珍视这个结果,并指出:“它有如此绝妙的应用,以至于它在这个学科的每一分支都有很高的价值和地位。”该书第四卷的题目是“前面的研究对于民事、道德和经济问题的应用”,尽管他还没来得及讨论这些应用就英年早逝(他病逝时才 51 岁),但在将“出生肮脏”的概率论应用于高雅的科学、道德、经济、政治等传统学术领域上,他的这种观念已为后来者指明了方向。

与此同时,棣莫弗(Abraham de Moivre, 1667—1754)将概率论的研究工具从仅适用于离散情形的组合方法,更新为处理连续情形的数学分析方法。在《机会论》(The Doctrine of Chances, 1718 年)一书中,他给出了二项分布的近似表示、斯特林公式和母函数,并在 1738 年的第二版中,加入了他的重要成果:当 $p = 1/2$ 时,二项分布收敛于正态分布。此即“中心极限定理”的最初阐述,也就是 n 次独立重复试验中随机事件出现 m 次的概率的期望值满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a < \frac{m - n/2}{\sqrt{n}/2} < b\right\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

由此他最先导出了正态曲线(钟形曲线)的表达式。另外他也意识到概率论与统计学结合的必要性,对年金等问题做了系统的研究,并导出了计算年金的公式。遗憾的是,正态分布的这一起源直到 1924 年才被后人注意到。

随着理性精神的传播以及微积分的产生和发展,理性成为时代的旋律,人们希望在道德科学(即当时的社会科学)中,也能够研究“理性人”(在处理事务和各种行为中以富有经验和智慧而闻名的人)的个体举止和行为,以得到一些明确的规则,用以引导芸芸大众。可是彼得堡悖论(提出于 1738 年)中数学计算与实际常识的抵牾,使得人们开始怀疑概率论中的期望,进而导致了人们失去了数学有效性的判别标准。丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli, 1700—1782)由是区分了两种期望:一种就是“数学期望”,仍对应“事件的值与事件的发生概率的乘积”;另一种则是“道德期望”,即经济学中的“效用”。彼得堡悖论的出现,也激起了许多数学家的探讨热情,最终使得概率论的研究中心彻底地从数学期望转移到了大数定理和中心极限定理上。

总之,在统计学的创立阶段,德国的国势学派、英国的政治算术学派、法国及瑞士的古典概率论,汇聚成了统计学发展的三股主要源泉,并最终浩荡出了统计学发展的大洪流。

1.1.2 统计学的发展

随着曾经富可敌国的法国财政总监约翰·劳(John Law, 1671—1729)吹出的“密西西比泡沫”的破灭,法国经济迅速崩盘,并陷入长期萧条之中。在笃信宗教的母亲的辛勤养育下,因自幼丧父而饱尝生活艰辛的孔多塞(Marquis de Condorcet, 1743—1794),逐渐显露出过人的数学天赋,并受到了达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783)等一流数学家的称赞。1772 年,他结识了法国经济学家(后任法国财政总监)蒂尔戈(Anne-Robert-Jacques Turgot, 即 Baron de Laune, 1727—1781),开始对政治和经济产生浓厚的兴趣。在这些伟人的影响下,孔多塞开始主张用数理方法研究社会科学(他称之为“道德科学”),并希望创立一种“有益于人类进步和完善”的新的“社会数学”,从而将社会科学理性化,而概率论则为这一目标的实现提供了有力工具。他还身体力行地把概率论应用于选举的程序组织、证言的可

信性、陪审团的构成形式等实际事务。他坚信可用数学方法来定量研究社会科学,作为“1789年法国大革命的擎炬人”,这种执着的信念明显感染和鼓舞了拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749—1827)。

法国大革命之后,法国科学出现了最辉煌的年代。在概率论上,拉普拉斯贡献了集大成之作《分析概率论》(法文版,1812年),标志着概率论从“组合概率”向“分析概率”的彻底转变。在书中,他以“等可能性”为基础,建立了古典概率的定义(事件的概率等于有利情况的数目除以所有可能情况的数目),进而演绎出了概率的基础理论。书中用大部分篇幅讨论了概率论的各种应用,涉及自然科学、天文学、大地测量学、人口统计、保险、决策论、道德期望、证言可信度和判决的概率等。当然,最重要的是书中彻底证明了**棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理**,即二项分布收敛于正态分布,从而创立了连续型概率论,开创了概率论的新时代。同时作为伟大的天文学家,拉普拉斯当然会尝试用概率论解释潮汐等天文现象,于是发现了其中的“误差曲线”(即棣莫弗的钟形曲线)。后来高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)也以自己丰富的天文观察为基础,在《天体运动论》(德文版,1809年)的末尾,以极其简单的手法,导出了误差分布(就是正态分布),并用最小二乘法进行了验证。这使得正态曲线经常被称为高斯曲线或高斯分布。

将概率论与统计学真正结合起来的是凯特勒(Adolphe Quetelet, 1796—1874)。作为拉普拉斯的弟子,他的统计学实际上是将大数法则、钟形曲线、中心极限定理等成果应用到其他领域,尤其是社会科学领域。在《论人类》(法文版,再版时改名为《社会物理学》,1835年)中,正如书名所指出的,他希望在以人类社会为研究对象的社会科学中也建立起物理学中的严格规律。通过对英、法、比等国的统计资料作出的统计分析,他发现每年犯罪的次数大体不变,而且各种类型的犯罪也有惊人的重复性。对结婚、自杀等的分析也让他震惊:“多少寻觅、多少思考、多少巨大的偶然性发生在结婚之前,结果怎样呢?你的行为绝不是任意的。”凯特勒的“平均人”思想影响也很大。所谓“平均人”就是运用统计方法计算出来的人体各种素质标志的综合平均值,分为两类:一类是身高、体重、视力、寿命等肉体素质;另一类是智力、犯罪、自杀等道德素质。随着统计学应用领域的不断扩大,“平均人”取代“理性人”成为大众新的美学追求。凯特勒的工作也标志着社会研究从关注理性自利的计算转向对社会定律的探讨,从研究个体的理性判断转向研究群体社会学,而且这种转向伴随着统计学的不断成功应用得以反复加强。也正是在他的倡导和组织下,1851年在布鲁塞尔召开了第一届国际统计会议,同时各国也逐渐建立了各种统计学会,国际统计交流与合作也日渐昌盛。凯特勒开创出了“凯特勒时代”,并被誉为现代统计学之父。

凯特勒肇端的政府统计与社会调查相结合的优良传统,在当时的德国得到很好的传承,并形成了**社会统计学派**,奠基人就是恩格尔(Ernst Engel, 1821—1896)和克尼斯(Karl Knies, 1821—1898)等人。恩格尔从1860年起担任德国统计局局长,在任内他不遗余力地促进了政府统计工作的发展。在对工人家庭收支问题的研究中,他提出了著名的“恩格尔法则”:家庭收入越多,则饮食费支出在家庭收入(或总支出)中所占百分比越小。推而广之到国家上,一个国家越穷,每个国民的平均支出中用来购买食物的费用所占比例就越大。1857年,他根据“恩格尔法则”引申出“**恩格尔系数**”:

$$\text{恩格尔系数} = \frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}} \times 100\%$$

如今恩格尔系数已经成为国际上通用的衡量家庭或国家富裕程度的一项重要指标。

1836年,凯特勒曾在萨克森-科堡-萨尔费尔德公国指导阿尔伯特王子(Prince Albert, 1819—1861)读书,王子后来“嫁到”英国,成了表姐维多利亚女王(Alexandrina Victoria, 1819—1901)的丈夫阿尔伯特亲王。亲王非常崇拜凯特勒,并帮助他与英国科学家建立了密切的联系,其中就包括高尔顿(Francis Galton, 1822—1911)。高尔顿对凯特勒的发现十分着迷,尤其是钟形曲线。但受表哥达尔文(Charles Darwin, 1809—1882)的自然选择学说和英国文化的影响,高尔顿更关注的是差异而不是相同点。他认为“杰出的人物以及天才们在很大程度上讲是有共性的”,因此为了发展优生学,他收集了大量证据,试图证明天才和杰出是遗传的特征。但是遗憾的是,他发现“杰出的生命极为短暂”(正所谓“富不过三代”)。他意识到必须首先解决数据为什么会分布成钟形曲线,由此他发明了“高尔顿板”,进而发现任何群体(无论大小)都会倾向于按照正态分布的形状来排列(弹球会形成一个正态分布)。在他1875年做的一个豌豆实验证实了这些发现,同时也证实了他的观点,即“后代的特征是由其父母决定的”。在豌豆实验中,他还发现母豌豆直径的变化范围比子豌豆大得多。由此他提出了“向均值回归”的原理。这对他的优生学又是个坏消息。十年后,他以保密和金钱报酬方式收集到205对夫妇和他们的928个成年子女的身高数据,对这些数据的分析再次证实了“子女的身高更接近整体均值”,即“如果父母的身高比平均值偏高,则他的子女会比他们略矮;如果父母的身高比平均值偏矮,则他的子女会比他们略高”。几年后,他又注意到一些人类学数据如果都取“统计尺度”,那么不仅存在两条回归直线,而且它们有相同的斜率,据此他提出了“相关性”的概念,用来衡量两个不同序列的相近程度。“向均值回归”的原理激发了各种风险承担和预测理论的产生,被认为是“在我们的科学观念上创造了一场革命”。

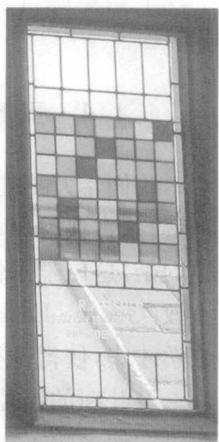
高尔顿是生物统计学派的创始人,而真正扛起这面大旗的则是他的高足卡尔·皮尔逊(Karl Pearson, 1857—1936, 俗称“老皮尔逊”)。他将老师的回归和相关推广为一般统计方法,进而提出了复相关和偏相关等概念,并将力学中的概念“矩”(moment)移植到统计学中,贡献出了矩估计法。在1900年一篇标题长得吓人的文章里,他明确指出统计学不是要研究样本本身,而是要根据样本对总体进行推断,并据此提出“拟合优度检验”,即检验作为样本取出的个体是否“拟合”从理论上确定的总体分布,这是假设检验的先声。他还为此重新发现了卡方分布,并提出了“卡方检验法”。另外要特别指出的是,在高尔顿丰厚的资金支持下,他主持的《生物统计》杂志成了世界上第一份印有全彩图片的杂志,并在之后的数理统计历史上扮演了重要角色。最重要的是,现代统计学的主要奠基人都是他的弟子,其中还包括他的爱子。

1.1.3 统计学的成熟

20世纪之前,以老皮尔逊为代表的旧统计学所提出的统计方法,强调的是对由自然观察所得大量数据的统计处理,在统计学研究领域占据着主导地位。到了1908年,老皮尔逊的学

生哥塞特(William Sealy Gosset, 1876—1937)以笔名“Student”在《生物统计》杂志上发表《均值的或然误差》(The Probable Error of a Mean, 1908年)一文,提出了一种新的分布即“ t 分布”,从而开创了**小样本理论**。四年后,费希尔(Ronald Fisher, 1890—1962)注意到这篇小文,并发现了其中的推导漏洞。经过十余年潜心研究,他在《“Student”分布的应用》(Applications of Student's Distribution, 1925年)一文中,给出了 t 分布的一个严格推导,提出了 t 检验法,并编制了 t 分布表,从而构建了小样本理论的数学基础。

早在1912年,费希尔就在他的统计学处女作《关于拟合频率曲线的一个绝对法则》(1912年)之中,给出了参数估计的极大似然估计法,十年后,在著名的《理论统计学的数学基础》(On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics, 1922年)中,他不仅证明了极大似然估计法“优于”矩估计法,还向老皮尔逊等创立的“描述统计学”发起挑战,从而真正建立起了“**推断统计学**”。在别人的想法的基础之上,他提出了 F 分布及 F 检验(现代统计学上的三大分布即卡方分布、 t 分布和 F 分布中,有两个与他直接有关)。另外他还开辟了方差分析、实验设计等统计新领域。他孜孜不倦地耕耘在新的统计学上,贡献出近400篇(部)各类文章和著作,这些贡献使得1920年至二战结束前的这段时间被称为统计学的“**费希尔时代**”。为了纪念费希尔,剑桥大学冈维尔与凯斯学院在宴会厅里的染色玻璃窗上,用彩绘方格来纪念拉丁方阵(Latin square),方格下方的白色文字则是费希尔的生卒信息。



费希尔对描述统计学的不断攻击也是20世纪前半叶的统计学中绕不开的话题。如今多数人都承认,描述统计学是推断统计学的基础,推断统计学则是描述统计学的进一步发展,两者共同构成了现代统计学的整体体系。

老皮尔逊的爱子爱根·皮尔逊(Egon Pearson, 1895—1980, 俗称“小皮尔逊”)受父亲与费希尔的论战的影响,开始探索如何在两人的思想之间架设桥梁。经过几年思索,他与奈曼(Jerzy Neyman, 1894—1981)合作发表了《关于统计假设的最有效检验问题》(1932年)一文,发展了假设检验的严格数学理论。在文中,他们引进了“检验功效函数”作为判断检验程序好坏的标准,明确了统计推断的思想,从而正式启动了一场“**准哥白尼革命**”。当初一心想成为理论数学家的奈曼,更是以自己深厚的纯数学基础,发表长文《基于经典概率论的统计估计理论纲要》(Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability, 1937年),正式建立了**区间估计理论**,并将统计学引向了理论化、数学化的道路,从而彻底“装修”了理论统计学这座大厦。

自从拉普拉斯概率理论诞生后,在受到热烈追捧的同时,也一直受到猛烈批评。当时最有影响力的哲学家孔德(Auguste Comte, 1798—1857)轻蔑地写道:“一些几何学家通过时髦的数学概率证明的方式反映社会调查结果,这是徒劳的。”柯西(Augustin Louis Cauchy, 1789—1857)也批判了其中的一些不严密之处。然而真正击中“**阿喀琉斯之踵**”的,是贝特朗(Joseph Louis François Bertrand, 1822—1900)提出的“**贝特朗悖论**”。到了19世纪末,公理化浪潮兴起后,米泽斯(Richard von Mises, 1883—1953)等开始尝试概率论的严格化工作,这反映在他给出的概率的统计定义上。随着实变函数理论和测度论的提出,数学家逐渐意

识到概率论与测度论在基本概念上的深刻相似性。测度论的创始人博雷尔(Émile Borel, 1871—1956)首先用测度论方法对概率论中的重要问题进行研究。至于柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903—1987),从1920年代就开始从测度论途径探讨整个概率论理论的严格表述,最终在《概率论基础》(德文版,1933年)中,他通过集合测度与事件概率的类比、积分与数学期望的类比、函数正交性与随机变量独立性的类比……终于赋予了概率论以演绎数学的特征,自己也因此成为概率论的一代宗师。奈曼的装修工作,宏观上当然源自公理化思潮,至于概率论方面的影响,则来自柯尔莫戈罗夫的《概率论基础》。

1.1.4 贝叶斯及贝叶斯统计学

我们千万不能遗漏一位重量级人物:贝叶斯(Thomas Bayes, 1701—1761)。对概率的三种解释(古典解释、频率解释和主观解释)中,主观解释就可追溯到他1760年的一篇遗文。有趣的是,这位学术怪杰在世时只发表过两篇文章,另一篇发表于1736年,是为了还击贝克莱主教(George Berkeley, 1685—1753)对牛顿微积分思想的攻击。可能正是该文中所显示的数学才华,使得他得以在1742年当选为英国皇家学会会员。

贝叶斯的这篇遗文可谓“科学史上最著名的论文之一”,因为它的思想影响了孔多塞,进而极大地影响了之后拉普拉斯概率论的发展,对20世纪乃至21世纪统计学的意义尤为深远和广泛。当然,这首先得益于他选择了普莱斯(Richard Price, 1723—1791),“一个道德高尚的人”。普莱斯曾为世界首家寿险保险公司编制了一份生命表,成为该领域一百多年内的“圣经”,因而被称为“保险精算之父”。贝叶斯在逝世前四个月即1760年写下的一封遗书里,将此文连同100英镑一起付托给普莱斯,虽然他当时连人家的居住地址都不知道。普莱斯认识到这篇遗文的价值,并于两年后在英国皇家学会上宣读了它。

这篇当初被视为玩文字游戏的文章中蕴含的**逆概率**等思想,受到了拉普拉斯的重视,并在《分析概率论》中辟专章予以讨论。到了1945年,瓦尔德(Abraham Wald, 1902—1950)以博弈的观点处理统计,提出**统计决策理论**,其间经常用到的贝叶斯方法,让人们再次感受到贝叶斯的重要作用。随着信息社会的兴起,贝叶斯方法在人工智能、金融数学等领域更是大显身手,以致林德莱(Dennis Victor Lindley, 1923—2013)大声提倡“二十一世纪的统计学是贝叶斯的时代”。事实上,在奈曼和爱根建立的现代统计学中,将概率理解成频率的稳定值,作出统计推断时主要依据的是样本信息;而**贝叶斯统计学**则将概率定义为个人对事件发生可能性的一种信念,因此如果能把样本信息与先验信息(通过历史资料算出的频率、个人基于经验所做出的主观判断等)有机结合,那么统计推断的可靠性就更有保障。显然两种统计学的区别在于:如何利用各种先验信息合理地确定先验分布。从方法论上看,经典统计学依据的是归纳推理,而贝叶斯统计学则更具辩证推理的意蕴。我们知道,微积分的兴盛归功于对矛盾的辩证处理,如此说来,东方哲学中的“阴阳五行”、“中庸之道”今后或许更能促进统计学的大发展,让我们拭目以待。

1.2 无所不在的统计学

1.2.1 什么是统计学

如果说 20 世纪以前,统计学的领域主要是人口统计、生命统计、社会统计和经济统计,那么随着社会、经济和科学技术的发展,尤其是随着二战后计算机技术的蓬勃发展,统计的范畴如今已覆盖了社会生活的一切领域,统计学已被广泛用于研究社会和自然界的各个方面,并发展成为有着许多分支学科的科学。事实上,统计学几乎无所不包,已成为了通用的方法论科学。在我国,在 2011 年国务院学位办公布的最新学科目录中,统计学从从属于数学和经济学的二级学科,进化成了与它们并列的一级学科。调整后的统计学一级学科将原来应用经济学和数学下与统计相关的学科进行了整合,并在一级学科下设有数理统计、社会经济统计、生物卫生统计、金融统计与风险管理和精算、应用统计(教育统计、心理统计、人口统计、工程质量管理等)等 5 个二级学科,可授予经济学学位或者理学学位。借这股东风,许多高校纷纷成立了统计学院。

那么,到底什么是统计学呢?

综观统计学的思想发展简史,我们不难看出,“统计学”的学科内容和研究方法是从无到有、“与时俱进”的,因此不同时期,对统计学的认识也不相同。兹举几种典型认识如下。

阿肯瓦尔:统计学是关于国家基本制度的学问,一个国家显著事项的整体,也包括与国家安宁福祉有关的事物以及如何兴利除弊。统计学为国家显著事项之结晶体;所谓显著事项者,即由此科学,可知国家理乱兴亡之迹。统计学就是国家显著事项学。

苏斯米尔希:统计学是精密社会科学之一种,其任务在于发现支配人生的天然法则。把社会现象及其统计规律性作为其研究对象,特别强调大量观察法的重要性。

南丁格尔(Florence Nightingale, 1820—1910,发明了极区图,并被称为“热情的统计学家”):要理解神的旨意,我们必须学习统计学,这是因为统计是神的意图的度量。

凯特勒:统计学不仅仅是国势的记述,还应当把它作为学术问题来研究。因为统计学是对性质相同的事物进行大量观察,从而探索出社会现象相继不绝的道理的一门学问。统计学以研究社会动态的事实为主;如果仅仅研究社会静态的事实,那便成为一门死学。我现在用来研究问题的统计学,在其语言的真正含义中,可以称为社会生活的力学,它将揭示与无机物体的力学同样可惊的各种规律。

费希尔:“统计学是应用数学的分支之一,也可以说是用于研究观察资料的数学。”因此,“同一公式可以同样地适用于绝对不同类型的具体对象”,“如果忽视了在不同领域应用统计方法的这种‘统一性’,其结果就会导致‘轻视作为统计学基础的数学理论’。”

C·R·劳(C. R. Rao, 1920—):“统计学与其说是收集整理数据引出答案的一组规则,不如说是一种思考或推理的方法。”“统计学是科学,是工艺,也是一门艺术。”“在终极的分析中,一切知识都是历史;在抽象的意义下,一切科学都是数学;在理性的基础上,所有的

判断都是统计学。”

陈希孺(1934—2005):统计学不止是一种方法或技术,还有世界观的成分——它是看待世界上万事万物的一种方法。

《大英百科全书》:统计学是一门收集数据、分析数据,并根据数据进行推断的艺术和科学。最初与政府收集的数据有关,现在包括了范围广泛的方法和理论。

维基百科:统计学是在统计实践的基础上,自 17 世纪中叶产生并逐步发展起来的一门社会学科。它是研究如何测定、收集、整理、归纳和分析反映客观现象总体数量的数据,以便给出正确认识的方法论科学,被广泛地应用在各门学科之上,从自然科学和社会科学到人文科学,甚至被用于工商业及政府的情报决策之上。

综上所述,统计学(statistics)是关于数据的科学,涉及数据的收集、整理、分析、推断、预测和决策等环节。数据收集就是取得统计数据;数据整理就是用图表和数值指标等形式来展示数据;数据分析是选择适当的统计方法来研究数据,并结合分析的结果对具体问题中数据的含义、事物变化的原因或者事物发展的规律等给出合理的说明;数据推断研究的是如何利用样本数据来推断出总体特征;数据预测则是指通过对现有数据的整理和分析,对未来的事情进行预先的推测或测定;数据决策则是通过对现有数据的整理、分析和推断,从拟定的多个可行方案中确定出问题的最终解决方案。统计学不仅为从数量方面把握世界提供具体的方法和思维方式,而且还是处理统计数据的艺术。

依据数据分析所使用的方法不同,可将统计学划分为描述统计学和推断统计学。描述统计学(descriptive statistics)研究的是数据的收集、整理、汇总、图表描述、数值概括与分析等方法;推断统计学(inferential statistics)则研究如何利用样本数据来推断总体特征,包括假设检验、参数估计、区间估计、预测、方差分析与回归分析等方法。描述统计学是推断统计学的基础,推断统计学则是描述统计学的进一步发展,两者共同构成了现代统计学的整体体系。

值得一提的是,在统计学的教学上,“统计和概率应互相渗透”以及“大统计”的理念如今越来越引起人们的关注。“大统计”思想认为数理统计和社会经济统计都是统计学的组成部分,是相互补充的两类方法,应该走向统一,共同发展。季羨林先生指出,“在 21 世纪,文理交融是学术发展前进的必由之路”,“文理交融”方能“明智研理”。今后的高考招生,已经不再区分文理,仅从这个角度,我们期待能出现更多反映“大统计”理念的统计学教学尝试。

1.2.2 统计学应用举隅

今天,对统计学的理解、研究和实际应用已经扩展到了自然科学、社会科学、工程技术、管理、经济、艺术和文学等领域。一言以蔽之,统计学无所不包,无处不在。在参考文献[8]的表 1-1 中,列出了统计的部分应用领域,数目达到 50 个之多,其中有些领域,比如考古学、历史研究、水文学、语言学、文学、政治学、宗教研究,绝对让人意想不到,进而“脑洞大开”。

近年来,随着大数据时代的到来(其标志是 2012 年 3 月美国启动的“大数据研究和发展计划”),人们越来越希望“从数据中获取知识,并采取行动”。如今,在传感器信号采集与分析、监控录像分析、网络聊天信息处理、文本挖掘、图像处理、视频和音频智能分析等领域,计算和 Web 已创造了新的数据领域,这就要求统计学的研究人员必须根据经验数据开发新算